结构系统动力特性分析

晏砺堂（主编）朱梓根
宋兆泓 李其汉 刘方杰 著

北京航空航天大学出版社

结构系统动力特性分析

晏砺堂 （主编） 朱梓根
宋兆泓 李其汉 刘方杰 著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书较全面地介绍了叶轮旋转机械结构动力特性分析的有关基础理论、计算方法和处理技术及其应用。内容包括叶片振动，轮盘振动、叶片颤振、转子的临界转速和响应、计算复杂转子动力特性的几种传递矩阵法、模态综合法及其在结构动力特性分析中的应用、转子的自激振动和稳定性、挤压油膜阻尼器理论及应用、转子瞬态动力特性分析、柔性转子的平衡技术和壳体振动等共十二章。编写中考虑到不同专业和不同人员的需要，大多数章有一定的独立性，以便于读者选学或参考。

本书适用范围较广，可作为航空发动机、压缩机、燃气轮机、涡轮泵、各种动力和机械类等专业高年级学生或研究生的教材或教学参考书，也可供上述专业的教师、科学研究人员和工程技术人员使用或参考。

3057

24

结构系统动力特性分析

JIEGOU XITONG DONGLI TEXING FENXI

晏砺堂（主编）朱梓根
宋兆泓 李其汉 刘方杰 著

責任編輯 陶金福
北京航空航天大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销
北京航空航天大学印刷厂印装
*
787×1092 1/16 印张：26 字数：662.4千字
1989年11月第一版 1989年11月第一次印刷 印数：2000册
ISBN 7-81012-123-5/TK·003 定价：5.15元

前　　言

随着近代机械工业的发展，叶轮机械，尤其是燃气轮机等获得了广泛的应用。在航空领域，绝大部分民航和军航均采用了燃气轮喷气、燃气轮风扇、涡轮螺桨、涡轮轴等发动机作为动力装置。当航天飞行器用液体火箭发动机作动力装置时，其燃烧剂泵和氧化剂泵等也都采用了叶轮泵。民用工业，如船舶、石油、化工、冶金、机械以及鼓风机、发电机组等无不采用叶轮机械。此外，涡轮机和叶轮压缩机在其它机械中也被普遍采用。

叶轮机械在设计、研究和应用期间的维修、排故中，其动力特性的分析、计算和处理技术常常占很重要的位置。近代电子技术的发展和应用，不仅使许多动力特性的计算节省了大量时间，提高了精度，而且其中有一些计算从前被认为不可能的，现在则成为可行。因此旋转机械及其它一些机械的动力特性分析、计算和处理技术越来越显示其功效和重要性。但毕竟不是事事和处处都需要计算，也不是都能算得了的。理论分析不仅为计算工作提供了基础，而且能直接用来指导实践，帮助解决实际问题。

本书以叶轮机械中重要结构系统的动力特性分析为主，介绍了叶轮机等高速旋转机械结构动力特性分析的基础理论和分析、计算方法，其中包括部分结构间的耦合动力特性分析、计算方法，以及它们的应用。除少数素材取自有关书籍外，大部分是教师们在教学和科学研究中搜集到的国内、外新近发表的资料和科研成果，其中也有不少是作者们自己的科研成果。

本书在动力特性分析、计算中，较多地采用了传递矩阵法和有限元素法。在研究动力特性领域中这两方法是当今各国采用得最多的方法，也是较新的方法，并适合应用电子计算机来计算。本书著者对原传递矩阵法作了各种不同的改进，以便于用来分析各种复杂转子系统的动力特性。有限元素法采用的元素多，元素种类也多，适用于各种不同的具体结构，且可较细緻地考虑边界条件。它虽是一种近似方法，而精度很高。但需要算机贮量大，计算较繁，且花费算时较多。它比较适用于计算板、壳零件及其它复杂的结构系统。两种方法都需要有矩阵理论和线性代数基础。后一方法还需要有有限元素法基础。所以本书适于作为动力专业、机械工程类专业、振动专业等高年级大学生和研究生的教材和教学参考书。

在本书所分析研究的机械结构系统动力特性中，包括两种重要的动力特性：强迫振动特性和自激振动特性。强迫振动是各类机械中最常见的。大的强迫振动，尤其是共振容易导致机械故障或失效，故需要很好地研究这类振动和减小此类振动的有效措施。近些年来由于科学技术的发展，机器性能的提高，机器零件尺寸减小，厚度变薄，重量减轻以及双转子和其它复杂结构形式的应用，使得零件间互相的影响加大，以致于不再适宜分别地、孤立地研究某些机器零件的动力特性。零件间耦合振动的研究日益显得重要。另一方面近代旋转机械中柔性转子得到较广泛的应用，也带来了许多新问题，例如柔性转子的平衡技术问题，柔性转子的临界转速以及通过临界转速的减振问题。此外，大多数转子系统的自激振动和失稳问题都与柔性转子的应用有关。自激振动失稳的发生，近些年来时有所闻。它严重地影响了机器的研制和使用，使研制周期延长，计划推迟，经费增多，甚至造成破坏事故，后果更加严重。又由于叶轮机械中个别叶片折断丢失引起转子不平衡量的急剧增大以致引起严重事故

的事也时有发生，所以瞬态动力特性的研究也很重要。

随着这些变化了的新情况，本书用较多的篇幅来介绍叶-盘耦合振动、多转子的耦合振动，叶片的自激振动与颤振，转子的自激振动和稳定性，挤压油膜阻尼器的理论和应用，柔性转子的平衡技术以及转子系统瞬态动力特性分析、计算等新的科学、技术内容。

本书虽是以叶轮机械为主要对象来介绍的高速旋转机械结构系统动力特性分析的基础理论和计算、处理方法，但是，介绍的所有理论、研究方法和处理技术，无疑也可适用于分析、解决其它各种机械，特别是旋转机械的动力特性问题。

为了适应相近的多个专业的高年级学生和研究生的教材的需要，也考虑到科技研究人员、工厂技术人员和教师参考的方便，本书各章或相关几章与其它章节有一定的独立性。可按不同需要选取其中部分章节作为教材或参考。

本书由晏砺堂主编，其中第一、六、八、十一章由晏砺堂编写；第二、四章由宋兆泓编写；第三、五、十二章由朱梓根编写；第九章由刘方杰编写；第七、十章由李其汉编写。

本书内容涉及面较广，有部分内容尚不成熟，编写中采用了许多期刊、文献及我们自己的研究资料，无同类书籍可供参考借鉴，失误不当之处在所难免，欢迎读者指正。

主编者　1987.9月于北京航空航天大学

目　录

第一章　机械振动基础知识

§1. 机械振动

§1.1 机械振动的类型

最常见的机械振动是规律的、稳定的振动。这种振动最重要，研究得最多。许多机械还常出现一些不规律、不稳定的振动。规律且稳定的振动简称振动。它是物体运动的一种特殊形式。振动是物体按一定轨迹作重复性运动。早先人们将振动定义为物体相对于其平衡位置作往复运动。这对于非旋转的物体如摆、弦等的振动是很合适的。而旋转机械如转子振动时其轴心轨迹是圆、椭圆或其它形式的闭合曲线。轴心并不相对其平衡位置作往复运动。不规律或（和）不稳定的振动其运动轨迹是没有规律，或者虽有一定规律但并不作重复性运动。振幅是由小而大，或由大而小，或时小时大。它们是振动的一种演变形式，是一些特殊的振动。虽也将它们归入振动之中，但在称呼上应加限制词，例如随机振动，衰减振动等等。在研究机械振动时，也常研究那些不规律或不稳定的振动。

机械结构类型多种多样，振动类型也很多。集中质量的物体作点的振动；杆、轴零件则易出现横向弯曲振动和扭转振动；螺旋弹簧和轴向容易伸缩的物体则有轴向振动；盘、板一类零件会出现各型弯曲振动；环形和筒形零件容易发生周向波形或（和）轴向波形振动。振动类型相异，研究和分析的方法亦不尽同。一种机器包含许多零件，当零件互相对对方的振动特性影响很小时，可孤立地研究各零件的振动。但当相邻零件互有较大影响时，就应当将有关零件合成一组合件来研究其振动。比如有时我们可以孤立地研究叶片的振动、转子的振动；有的情况就需要研究叶片-轮盘的耦合振动及转子机匣系统的振动；有时甚至要研究叶-盘-轴的耦合振动和转子-机匣-机架整系统的振动。

从宏观看，机械多数是在一定不变的条件（如压力、温度、转速等）下工作，出现的振动也是稳定的无大变化的。这种振动叫稳态振动，研究得最多，实用价值最大。当工作状态变化情况下如起动、加速和不平衡量突然改变时的振动，叫瞬态振动。还有一种由某些多变因素或多种因素激起的振动，这种振动不大规律，叫随机振动。后两类振动在某些情况下也很重要，有时也要给予适当的重视，并认真研究。

机械中常常有一些周期性交变的载荷或位移作用于某些零件上，迫使它们振动。这种振动叫强迫振动。有的机械，起初被施加一个位移和速度，以后这种外部条件不再存在，而机件则稳定地振动起来，如没有任何阻碍振动的因素存在的话，振动将长期持续下去。这种振动叫自由振动。实际的自由振动虽不会长期存在，但其特性和研究方法很重要，是研究强迫振动以及其他振动的基础。

有的机械虽未受周期性载荷的作用，但有时因结构或（和）工作条件等原因，一旦出现振动就会产生一种能激发自己振动的载荷，使自己振动起来。这类振动叫自激振动。自激力往往与振幅有关。自激力大固然引起的振幅大，而振幅大引起的自激力也大。如果没有足够的阻碍振动的力存在的话，自激力与振幅互相促进的结果，会使振动突然增至很大。这种现

象叫失稳。失稳容易造成机械的严重振动疲劳损伤，甚至破坏。自激振动虽不象强迫振动那样在机械中经常发生，但自激振动一旦导致失稳就可能引起严重破坏事故。叶片机械中，叶片颤振就是自激振动引起的失稳现象。旋转机械转子系统中也可能出现多种类型的自激振动和失稳。因而自激振动和稳定性的研究也是非常重要的。

机械振动的基本要素有：振体的惯性、复原性、阻尼力和激振力。复原性是指机械发生变形（位移）时，自己有一种使之恢复到未变形时的趋势，即有一种弹性恢复力作用。力的大小正比于位移，方向则与位移方向相反。力与位移之比叫刚性系数。阻尼力是阻止振动的力，方向与振动速度方向相反，其中常见的一种粘性阻尼力，其大小与振动速度成正比。阻尼力与速度之比叫阻尼系数。激振力是周期性变化的外力，可利用傅里叶（Fourier）级数分解成许多个按余弦或正弦规律变化的力，称简谐力。它激起的强迫振动也是稳定的，但有时振动会很大，较危险。机器中也有一些非周期性变化的或不规律性变化的力作用，激起不稳定或不规律的振动。

从宏观看，多数情况，机器中四个振动要素是稳定不变的。这种情况下发生的振动叫线性振动。研究中可以应用线性迭加原理。有的机械在某些情况下，参加振动的质量和（或）刚性系数及（或）阻尼系数不为常数，而是随着时间略有变化。这种情况下发生的振动与线性振动不同，叫非线性振动。分析、研究中不能应用线性迭加原理，研究起来是相当麻烦的。至今尚无有效的统一的成熟的研究方法。这类振动要另作专门研究。

§1.2 简谐振动和其表达式

简谐振动是指振动位移随时间变化的关系可以用正弦或余弦曲线描绘的振动。前面说到周期性变化的激振力可以分解成许多个简谐力。对于线性系统来说，可以分别研究每一个简谐力激起的振动，然后按线性迭加原理将所得各振动迭加起来，便得出周期性变化的外力激起的总振动。因此研究简谐振动有重要意义。

简谐振动通常用三角函数表示如下：

$$x = A\cos(\omega t - \alpha) \tag{1.1}$$

式中：x——振动位移，（cm）；

A——振幅，即振动时的最大位移，（cm）；

ω——振动圆频率或称角频率，（1/s）；

f——振动频率，即每秒振动次数，单位是赫兹（Hz）或简称赫，$f=\omega/2\pi$；

T——振动周期，即每一次振动所用的时间，$T=1/f=2\pi/\omega$，（s）；

α——起始相位角，表示在 ωt 横坐标上起始振动时的角度。

简谐振动既可用余弦也可用正弦表示，这就等价于振体（以质心点表示）在圆周上以等角速度 ω 沿圆周运动时，它在横坐标或纵坐标上的投影的运动（参见图 1.1）。所以 ω 既是振动的圆频率，又等价于振体作圆运动时的角速度。

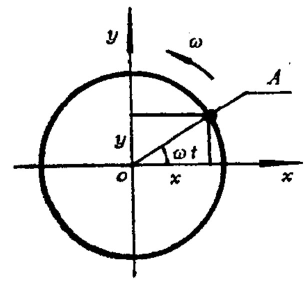

图1.1　简谐振动与圆运动关系图

设有两简谐振动，振幅相等，频率接近，起始相角均为零，则其合成振动为

$$x = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$
$$= 2A\cos[(\omega_1 - \omega_2)/2]t\ \cos[(\omega_1 + \omega_2)/2]t \tag{1.2}$$

上式描述的振动可视为振幅和振频分别为

$$A' = 2A\cos[(\omega_1 - \omega_2)/2]t \tag{1.3}$$

$$\omega' = (\omega_1 + \omega_2)/2 \tag{1.4}$$

的一种振动。这种振动的振幅按余弦曲线缓慢变化。因振幅只取正值，无所谓正、负之分，故振幅的变化频率是 $\omega_1 - \omega_2$。或说，其变化的周期是

$$T_B = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2) \tag{1.5}$$

若上述两简谐振动振幅不等，其余条件仍旧不变，则设 $A_2 > A_1$，且 $A_2 = A_1 + A_3$，则此两不等幅振动合成的振动为

$$x = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t = A_1(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) + A_3\cos\omega_2 t$$
$$= 2A_1\cos[(\omega_1 - \omega_2)/2]t\ \cos[(\omega_1 + \omega_2)/2]t + A_3\cos\omega_2 t \tag{1.6}$$

因 $\omega_2 \approx \omega_1$，故可知 $(\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega_2$。从而上式可写成

$$x \approx \{2A_1\cos[(\omega_1 - \omega_2)/2]t + A_3\}\cos[(\omega_1 + \omega_2)/2]t \tag{1.7}$$

上述振动的振幅等于在式（1.2）所示的两等幅简谐振动合成振动的振幅之上再迭加一常量振幅 A_3。振频则与式（1.2）所示振动相同。

将两等幅与不等幅的简谐振动合成的振动曲线分别绘出，如图 1.2（a）和（b）所示。此种振动振幅时大时小有规律地变化。最大振幅是两成分振动振幅之和；最小振幅是两成分振动振幅之差。最小振幅点叫节点。因振幅时大时小很有规律，好比打节拍，故叫拍振。两节点之间的时间叫拍振周期 T_B，如式（1.5）所示。拍振当然不是简谐振动。在试验中常常会测到拍振现象。

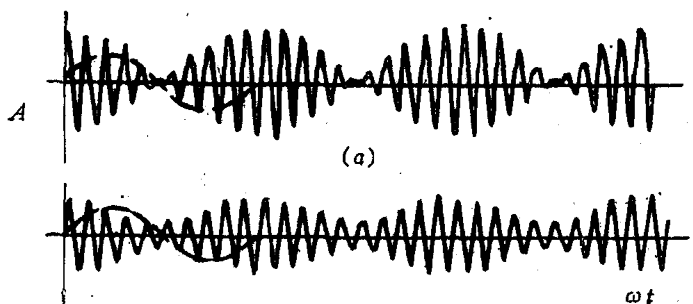

图1.2 两个振频接近的简谐振动合成的拍振

简谐振动还可以用指数或复数形式表示：

$$x = Ae^{i(\omega t - \alpha)} \tag{1.8}$$

展开得

$$x = A[\cos(\omega t - \alpha) + i\sin(\omega t - \alpha)] \tag{1.9}$$

与三角函数表示式（1.1）比较，可见振动只是由复数的实部（或虚部）表示，应写成

$$x = \mathrm{Re}\,Ae^{i(\omega t - \alpha)} \tag{1.10}$$

或

$$x = \mathrm{Im}\,Ae^{i(\omega t - \alpha)} \tag{1.11}$$

如果事先声明或规定，就不用写出实部符号 Re 或虚部符号 Im 了。为符合一般习惯——虚数

沒意义，不存在，故通常用复数实部表示较方便。运算时，按复数规则运算，算得结果后只取其实部作为要求的振动。有时用复数表示简谐振动，计算振动的某些特性甚为方便。

由式（1.10）可得

$$x=Ae^{i(\omega t-\alpha)}=Ae^{-i\alpha}e^{i\omega t}=\tilde{A}e^{i\omega t} \tag{1.12}$$

式中：$\tilde{A}=Ae^{-i\alpha}$ 为复数振幅。

式（1.12）是用复数分别表示振幅和振频的形式。振幅是向量，大小是 A，方向角是 $-\alpha$。频率则是 ω。

对于旋转的转子来说，当转子支承系统是轴对称时，所有径向特性是相同的，因此其径向振动也可用式（1.10）（省去符号 Re）或式（1.12）表示。

当转子支承系统正交的两向刚性或阻尼不等时，两向振动就不相同，但频率应相等。这种转子正交两向的振动用复数表示时为

$$\left.\begin{aligned} x&=\tilde{x}_0e^{i\omega t}=(x_c+ix_s)e^{i\omega t}=X\cos(\omega t+\alpha_x)+iX\sin(\omega t+\alpha_x)\\ y&=\tilde{y}_0e^{i\omega t}=(y_c+iy_s)e^{i\omega t}=Y\cos(\omega t+\alpha_y)+iY\sin(\omega t+\alpha_y)\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

式中：$X=\sqrt{x_c^2+x_s^2}$，$\alpha_x=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{x_s}{x_c}$ 别分为复数振幅的模和相角，Y，α_y 类似。

附带说一点，不稳定的振动其振幅必是时间的函数。若振幅仅是时间的某种简单函数，则可将其振幅表示为

$$\tilde{A}=Ae^{at} \tag{1.14}$$

如 $a>0$，则振幅随时间增长越来越大；如 $a<0$，则随着时间增长振幅越来越小；$a=0$ 则表示振幅不变。如果这种不稳定的振动频率是固定的，则该振动可用下式表示：

$$x=Ae^{at}e^{i\omega t}=Ae^{(a+i\omega)t} \tag{1.15}$$

或简写为

$$x=Ae^{\lambda t} \tag{1.16}$$

式中：

$$\lambda=a+i\omega \tag{1.17}$$

这样就把振动看成振幅为 A，频率为复数 λ。复数频率的实部实际上是代表振幅随时间变化的状态，虚部才是振动的频率。用这种方法表示某种有规律的不稳定振动以研究振动的稳定性是很方便的。式（1.15）代表的振动除 $a=0$ 外，都不是简谐振动。可见表示简谐振动的各种形式也可以推广用于一些较有规律的不稳定振动或稳定的非简谐振动。因此某些非简谐的和不稳定的振动均可用研究简谐振动的方法进行分析、研究。

复数表示振动的方法是非常灵活方便的，也是非常有用的。

§1.3 振动系统的自由度和坐标

1. 振动系统的自由度数

表示振动系统的振动所需要的独立坐标数称振动系统的自由度数。一个无约束的集中质量（点）在空间坐标系 $oxyz$ 中，x，y，z 方向均可自由运动，故它有三个自由度。一个物体在空间坐标系中，除可在三方向自由运动外，还可同时绕 x，y，z 轴转动，故总共有六个自由度。如果有两个约束条件 $y=0$，$z=0$，则一点的运动只有一个自由度，一物体的运动自由度数则是 $6-2=4$。一个具有 n 个集中质量的振动系统，如有 r 个约束条件，则有 $3n-r$ 个自由度。其余情况可类推。

2. 振动系统的坐标和广义坐标

表示振动位移的参量称为坐标。例如：x，y，z，θ_x，θ_y，θ_z和x_1，x_2，y_1，y_2等等都可作为坐标。n质量系统受到r个约束，则其运动只需用$6n-r$个坐标表示。如果不将具体约束条件写出，仅将$6n-r$个坐标写出，坐标可具有不同量纲，如长度、角度等，则这种坐标称广义坐标。表示物体实际位移的坐标叫物理坐标。如果坐标中部分或全部都是某些参数的函数，这些参数也可以用来做为振动系统的坐标。这种坐标也称广义坐标，坐标的量纲可以是任意的，并不需要全部相同。

一个振动系统如果原有100个自由度，也就是有100个坐标：$q_i=q_1$，q_2，…，q_{100}。如能用下列函数来代换q_i，即

$$q_i=\sum_{j=1}^{10}x_j u_{ij} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 100) \tag{1.18}$$

式中若u_{ij}是已知的或便于求出的，则显然坐标q_i可以用x_j来代换。这样只用10个广义坐标x_j就代换了原来的100个坐标q_i。使研究时使用的自由度数大为减少。分析、研究振动的工作将可大为简化。当然，在求得广义坐标x_j之后，还要按式（1.18）还原算出原物理坐标q_i。

3. 振动方程的建立方法

研究一个系统的振动首先要建立该系统的振动方程，也叫控制方程，因为建立的振动方程都是微分方程，故又叫微分方程。常用到的建立方程的方法有下面几种。

(1) 牛顿法或达朗伯法

此法也叫作用力法。按牛顿第二定律，振动系统每一质量上作用的外力与该质量的运动加速度有下列关系：

$$\sum F=m\ddot{x} \tag{1.19}$$

式中：F——作用于振体质量上的力；

x——振体质量的位移，上面加点表示速度，加两点表示加速度；加速度的方向在合力的作用方向。

上式可用于线运动，也可用于角运动（转动）。所以F可以是力也可以是力矩，称广义力。相应地，m是质量或转动惯量，称广义质量，$\ddot{x}$是线加速度或角加速度。

达朗伯定理是外载和振体质量的惯性载荷之和为零，即

$$\sum F-m\ddot{x}=0 \tag{1.20}$$

必须对每一坐标轴方向建立振动方程，除非已知有约束条件，某些坐标轴方向的振动为零。对于多自由度系统，必须对每个参加振动的质量和振体列出各坐标轴方向的线振动和绕坐标轴作角运动的振动方程，除非已知某些方向无振动。

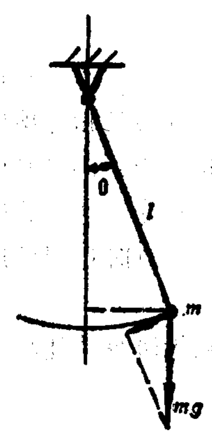

图1.3 单摆振动列式用图

例如一个在地心引力场振动的单摆，摆锤认为是集中质量m，它以圆弧形轨迹振动（见图1.3）。运动方向是切向。摆绳不计质量，取其摆动角度θ为坐标。那么振动到某一坐标θ时，摆锤上作用力为摆的重力，切线方向的分力为

$$F=-mg\sin\theta$$

式中右边用负号，表示作用力与振动位移θ方向相反。m是摆锤质

量，g是重力加速度。

摆锤运动的切向加速度是

$$a=l\ddot{\theta}$$

式中：l ——摆长；

$\ddot{\theta}$——摆运动的角加速度。

于是按牛顿定律或达朗伯原理列出方程：

$$-mg\sin\theta=ml\ddot{\theta} \tag{1.21a}$$

简化后得

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{1.21b}$$

又如图 1.4 所示的二质量在平面内上下振动的二自由度系统。m_1，m_2 为两集中质量，k_1，k_2 为图示两弹簧的刚性系数，弹簧质量不计。质量 m_1 上有外力 $F=F_0\cos\omega t$ 作用。振动位移分别从两质量的平衡位置算起。下面分别列出两质量的振动方程。质量 m_1 上除外载F外尚有两弹簧的弹性力作用；m_2 上则只有 k_2 弹簧的弹性力作用。按牛顿定律分别对 m_1，m_2 两质量列出振动方程：

$$\left.\begin{aligned}&m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=F_0\cos pt\\&m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

随后的工作就是要解振动方程，求出各质量的振动位移、系统的振动频率及振动引起的外传力、应力等。

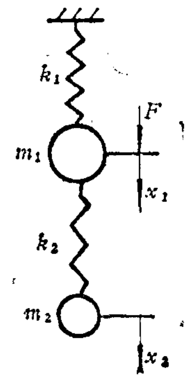

图1.4 二质量二自由度系统

(2) 拉格朗日（Lagrange）方程法

此法是一种能量法，在振动研究中用得很多。在力学中已导出拉格朗日方程，写出如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)+\frac{\partial U}{\partial q_j}=Q_j\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.23}$$

式中：T——振动系统总动能；

U——振动系统总势能；

q_j——广义坐标，$\dot{q}_j$是q_j对时间的导数；

Q_j——广义外力，含保守力与非保守力；

j ——作下标表示坐标号。

保守力是指它所做的功取决于质量的位置而与所经路程无关的力。重力、电力、磁力等均属保守力。同时有能量损耗的力如阻尼力、摩擦力等都是非保守力。仅具有保守力作用的系统称保守系统。我们通常研究的都是保守系统和有粘性阻尼力的情况。

有时也用拉氏函数L表示振动系统的动能与势能关系：

$$L=T-U \tag{1.24}$$

粘性阻尼消耗功用逸散函数 U_c 表示：

$$U_c=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_{xi}\dot{x}_i^2+c_{yi}\dot{y}_i^2+c_{zi}\dot{z}_i^2) \tag{1.25}$$

式中：c_{xi}，c_{yi}，c_{zi} 为 x_i，y_i，z_i 方向的粘性阻尼系数，i 是质量号。含有粘阻系统的

拉氏方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial U_{\circ}}{\partial \dot{q}_j}=Q_j \tag{1.26}$$

式中： Q_j——除粘阻力以外的其他外载。

以图 1.3 所示的单摆振动为例，用拉氏方程建立其振动方程。振动时的动能是

$$T=\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

势能是 $$U=mgl(1-\cos\theta)$$

外 载 $Q=0$，阻尼也不计。将它们代入式（1.24）后，求出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta},\quad \frac{\partial L}{\partial \theta}=-mgl\sin\theta\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}\end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

将式（1.27）代入式（1.26），得

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0$$

简化后得

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{1.28}$$

图 1.4 的二自由度系统，其振动动能是

$$T=\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2)$$

势能是 $$U=\frac{1}{2}[k_1x_1^2+k_2(x_2-x_1)^2]$$

拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}[m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2]-\frac{1}{2}[k_1x_1^2+k_2(x_2-x_1)^2]$$

求出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1,\quad \frac{\partial L}{\partial x_1}=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1\end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2,\quad \frac{\partial L}{\partial x_2}=-k_2(x_2-x_1)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_2\ddot{x}_2\end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

将式（1.29）和作用于 m_1 上的外载一起代入式（1.26），又将式(1.30）代入式（1.26)，分别列出两质量的振动方程

$$\left.\begin{aligned}&m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=F_0\cos\omega t\\&m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

比较式（1.28）同式（1.21）和式（1.31）同式（1.22），知用拉氏方程法与牛顿法列出的振动方程相同。但用拉氏方程法列式过程要麻烦得多。所以如能用牛顿法列出振动方程，就不必用拉氏方程法去列振动方程。对于复杂的振动系统，比较难于找到各质量的运动加速度和作用于其上的载荷时，则可用拉氏方程法列出系统的振动方程。

(3) 影响系数法

此法又叫柔度法。例如，对于梁形多质量系统，要列出它在平面内作弯曲振动的方程，用影响系数法较为简便。用 α_{ij} 表示影响系数或叫柔度系数，其定义如下：

$$\alpha_{ij}=\frac{q_i}{F_j} \tag{1.32}$$

即在第 j 个质量上单位力引起的第 i 个质量的位移。当 F_j 是静力时，引起的位移也是静的（非交变的），α_{ij} 叫静影响系数或静柔度；若 F_j 是简谐交变的力，引起的位移显然也是简谐变化的。这种情况下 α_{ij} 叫动影响系数或动柔度。动影响系数不仅与作用力大小有关，且与其变化的频率有关。研究振动时都用动影响系数。通常将动影响系数简称影响系数或柔度。

用影响系数法列振动方程是要求出系统各质量处的作用力（外力和惯性力）对每一质量处引起的总位移。所以本法又称位移法。对于图 1.5 所示的多质量系统，很容易写出其振动方程：

$$\left.\begin{array}{l} q_1=\alpha_{11}F_1+\alpha_{12}F_2+\cdots+\alpha_{1n}F_n \\ q_2=\alpha_{21}F_1+\alpha_{22}F_2+\cdots+\alpha_{2n}F_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n=\alpha_{n1}F_1+\alpha_{n2}F_2+\cdots+\alpha_{nn}F_n \end{array}\right\} \tag{1.33}$$

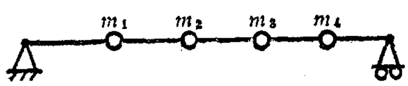

图1.5 梁式多质量系统

影响系数具有互换性，即

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji} \tag{1.34}$$

已知惯性力为

$$F_j=-m_j\ddot{q}_j$$

在没有外载作用时，得出该梁的振动方程为

$$\left.\begin{array}{l} q_1=-\alpha_{11}m_1\ddot{q}_1-\alpha_{12}m_2\ddot{q}_2-\cdots-\alpha_{1n}m_n\ddot{q}_n \\ q_2=-\alpha_{21}m_1\ddot{q}_1-\alpha_{22}m_2\ddot{q}_2-\cdots-\alpha_{2n}m_n\ddot{q}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n=-\alpha_{n1}m_1\ddot{q}_1-\alpha_{n2}m_2\ddot{q}_2-\cdots-\alpha_{nn}m_n\ddot{q}_n \end{array}\right\} \tag{1.35}$$

图 1.5 所示振动系统如用作用力法也可很快列出其振动方程：

$$\left.\begin{array}{l} -m_1\ddot{q}_1=k_{11}q_1+k_{12}q_2+\cdots+k_{1n}q_n \\ -m_2\ddot{q}_2=k_{21}q_1+k_{22}q_2+\cdots+k_{2n}q_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -m_n\ddot{q}_n=k_{n1}q_1+k_{n2}q_2+\cdots+k_{nn}q_n \end{array}\right\} \tag{1.36}$$

式中：k_{ij} 为类刚性系数，即仅在 j 坐标产生单位位移时，在第 i 坐标上需加的力。

对于图 1.5 所示系统，在求 a_{ij} 时，可假定在第 j 质量处加单位简谐力算出第 i 质量处的位移，即是 a_{ij}。按力学中给出的方法，计算并不困难。但若要求 k_{ij}，则须假定 j 质量处有单位位移，其他质量处位移为零，求出第 i 质量处应加的力。这就是说，需假定在除 j 以外各质量处，均相当于加了刚性支承，求出第 i 质量处的支反力。这是一个静不定问题，用力学中已给出的方法计算起来是很麻烦的。当然以后会学到其他并不太麻烦的方法，可以计算出 k_{ij}。

(4) 哈密顿（Hamilton）原理

哈密顿原理用数学式表示如下：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t = 0 \tag{1.37}$$

式中：L——拉氏函数，见式（1.24）；

δ——变分符号。

上式表示 L 对时间的积分的变分为零，即该积分为最小。利用此法列式较繁，且须学过变分法，故通常用得不多。这里不多介绍。

4. 振动方程的线性化

列出振动方程后接着就是求解振动方程。如果列出的是线性微分方程，可利用微分方程中所讲的方法求解。但有时列出的振动方程是非线性的，求解起来就很麻烦。如果非线性程度不高的话，可用近似方法将非线性方程线性化。机械振动中通常发生的都是较小振幅的所谓微幅振动。如果不是要研究非线性振动的特有性质的话，常常可以将列出的非线性振动方程线性化，变为线性方程，便于求解。

线性化是利用泰勒级数（Taylor Series）来进行的。设振动位移是相对于基点（或平衡位置）x_0 的增量，于是函数 $f(x_0+x)$ 可展开成泰勒级数

$$f(x_0+x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\frac{f''(x_0)}{2!}x^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}x^3+\cdots \tag{1.38}$$

式中：“′”表示对 x 求导数。

取 $x_0=0$，将振动方程中的每一非线性项看成 $f(x)$，然后将该项展成泰勒级数。因 x 很小，略去 x 的高次项便得出 $f(x)$ 的近似值。例如

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x = x - x^2/6+\cdots\approx x\\
&\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24-\cdots\approx 1\\
&\mathrm{tg}\,x = x + x^3/3+\cdots\approx x\\
&(1\pm x)^n = 1\pm nx\pm n(n-1)x^2/2\pm\cdots\approx 1\pm nx\\
&\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3+\cdots\approx x
\end{aligned}\right\} \tag{1.39}$$

前面列出的单摆振动方程式（1.21）和（1.23）中含有 $\sin\theta$ 项，该方程为非线性方程。通常摆的振动幅度 θ 角不大，则可取 $\sin\theta=\theta$，于是原非线性振动方程经线性化变为

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{1.40}$$

上式求解就很容易。