抛物型偏微分方程

〔美〕A. 弗里德曼 著

夏宗伟 译

姜礼尚 校

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书是偏微分方程方面的一本重要著作，系统而详细地论述抛物型方程的一般理论(诸如基本解，解的存在和唯一性、可微性、渐近性态，极大值原理等)的主要结果和研究方法；无证明地叙述了椭圆型方程的相应结果，每章末附有不同难度的习题。

本书可供大学数学系学生、研究生、教师以及数学研究工作者参考。

A. Friedman
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF PARABOLIC TYPE
Prentice-Hall, Inc. 1964

抛物型偏微分方程

〔美〕A. 弗里德曼 著
夏宗伟 译
姜礼尚 校
责任编辑 张鸿林

科 学 出 版 社 出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年9月第 一 版　开本：850×1168 1/32
1984年9月第一次印刷　印张：13 1/2
印数：0001—9,300　字数：351,000

统一书号：13031 · 2679
本社书号：3683 · 13—1

定价：2.50 元

目　　录

第一章　基本解与 Cauchy 问题 …… 1

引言 …… 1

1. 定义 …… 2
2. 拟基本解方法 …… 4
3. 体位势 …… 7
4. 基本解的构造 …… 16
5. 基本解的性质 …… 25
6. 无界区域的基本解 …… 27
7. Cauchy 问题 …… 31
8. 伴随方程 …… 32
9. Cauchy 问题的唯一性 …… 36

问题 …… 39

第二章　极大值原理及其若干应用 …… 41

引言 …… 41

1. 极大值原理 …… 42
2. 极大值原理的推广 …… 47
3. 第一初值边值问题 …… 49
4. Cauchy 问题的正解 …… 52
5. 第二初值边值问题 …… 59
6. 比较定理 …… 63
7. 椭圆型方程 …… 64

问题 …… 68

第三章　第一初值边值问题 …… 70

引言 …… 70

1. Banach 空间和度量空间 …… 70
2. Schauder 型先验估计 …… 73
3. 第一初值边值问题的解 …… 78

4. 第一初值边值问题的解(续) …… 81
5. 解的可微性 …… 85
6. 解族 …… 95
7. Green 函数 …… 96
8. 椭圆型方程 …… 101
问题 …… 105
第四章 先验估计的推导 …… 107
引言 …… 107
1. 记号 …… 107
2. 预备引理 …… 109
3. 辅助定理 …… 113
4. 内估计的推导 …… 125
5. 基本引理 …… 129
6. 边界估计的辅助定理 …… 138
7. 边界估计的推导 …… 143
8. 热传导方程解的存在定理 …… 147
9. 椭圆型方程 …… 153
问题 …… 154
第五章 第二初值边值问题 …… 158
引言 …… 158
1. 基本解的结果概要 …… 159
2. 单层位势的跳跃关系 …… 161
3. 第二初值边值问题的解 …… 172
4. 单层位势的进一步结果 …… 177
5. 积分方程 …… 178
6. 椭圆型方程 …… 181
问题 …… 184
第六章 解的渐近性态 …… 186
引言 …… 186
1. 第一初值边值问题解的收敛性 …… 186
2. 定理 1 的证明 …… 189
3. 定理 2 的证明 …… 192
4. 解的渐近展开 …… 195

5. 第二初值边值问题解的收敛性 …… 197
6. 定理 5 的证明 …… 200
7. 后向抛物型方程解的唯一性 …… 205
8. 解的衰减速度的下界 …… 213
问题 …… 220
第七章 半线性方程. 非线性边界条件 …… 223
引言 …… 223
1. 非线性方程. 不动点定理 …… 224
2. $1+\delta$ 型的先验估计 …… 227
3. 定理 4 证明的完成 …… 234
4. $Lu=f(x,t,u,\nabla u)$ 的存在定理 …… 242
5. 有非线性边界条件的线性方程 …… 248
问题 …… 256
第八章 自由边界问题 …… 259
引言 …… 259
1. Stefan 问题. 化为积分方程 …… 260
2. Stefan 问题解的存在性和唯一性 …… 267
3. Stefan 问题解的渐近性态 …… 271
4. 解 Stefan 问题的另一种方法 …… 279
5. 其他自由边界问题 …… 283
问题 …… 285
第九章 抛物型方程组的基本解 …… 288
引言 …… 288
1. 定义 …… 288
2. 拟基本解 …… 291
3. 带参量方程的拟基本解 …… 300
4. 基本解的构造. Cauchy 问题 …… 304
5. 伴随方程组 …… 313
6. 基本解的可微性 …… 316
7. 椭圆型方程 …… 322
问题 …… 325
第十章 任意阶椭圆型和抛物型方程的边值问题 …… 328
引言 …… 328

1. 弱导数和强导数．平滑算子 …… 329
2. 微分不等式 …… 339
3. 椭圆型方程 Dirichlet 问题解的存在理论 …… 351
4. 弱解在内部的可微性 …… 363
5. 在边界近旁的可微性 …… 369
6. 抽象存在定理 …… 377
7. 抛物型方程的第一初值边值问题 …… 387
8. 高阶方程的进一步结果 …… 392
问题 …… 394
附录　非线性方程 …… 397
附录的文献 …… 404
文献的附注 …… 407
参考文献 …… 411

第 一 章

基本解与 Cauchy 问题

引言 考虑热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{0.1}$$

对于每一固定的 (ξ, τ)，函数

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}(t-\tau)^{-n/2} \times \exp\left[-\frac{\sum(x_i-\xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right] \quad (t>\tau) \tag{0.2}$$

满足(0.1). 此外，对任何一个对于某个 $h>0$ 以 $0\{\exp[h\Sigma x_i^2]\}$ 为界的连续函数 $f(x)$，积分

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x, t; \xi, 0)f(\xi)d\xi_1\cdots d\xi_n \tag{0.3}$$

当 $T<1/4h$, $0<t\leqslant T$ 时存在，且当 $t\to 0$ 时

$$u(x,t)\to f(x). \tag{0.4}$$

$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 称为热传导方程的基本解. 函数 $u(x, t)$ 是 Cauchy 问题的解，即对 $0<t\leqslant T$ 求(0.1)的满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 的问题的解.

热传导方程的伴随方程定义为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}+\frac{\partial v}{\partial t}=0. \tag{0.5}$$

容易验证，对于每一固定的 (x, t)，$\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 作为 (ξ,τ) 的函数满足(0.5). 这可用来证明(0.1)的 Cauchy 问题，对于某个 $k>0$，在条件

$$u(x, t)=0\{\exp[k\textstyle\sum x_i^2]\} \tag{0.6}$$

之下解的唯一性.

在这一章中我们将对有 Hölder 连续系数的二阶抛物型方程构造基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$，然后用于解 Cauchy 问题. 在对方程系数作某些可微性的补充假定下，对伴随方程构造基本解 $\Gamma^*(x, t; \xi, \tau)$，使得 $\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma^*(\xi, \tau; x, t)$. 我们将利用这一关系去证明在条件 (0.6) 之下 Cauchy 问题解的唯一性.

1. 定义

我们以 R^n 记实 n 维欧氏空间. 以 $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ 定义 R^n 的点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 到原点的距离 (即 x 的模). 对于在 R^n 的某个有界闭集 S 上定义的函数 $f(x)$，如果存在某个常数 A，使对 S 中所有的 x，y 都有

(1.1) $$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|^\alpha,$$

就说 $f(x)$ 是在 S 中指数为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 Hölder 连续函数. 使 (1.1)成立的最小的 A 称为 Hölder 系数. 如果 S 是一个无界集，它与每一个有界闭集 B 的交是闭的，如果对于每一有界闭集 B，在 $S \cap B$ 中 (1.1) 成立，这里系数 A 可以与 B 有关，就说 $f(x)$ 是 S 中指数为 α 的 Hölder 连续函数. 如果可取 A 与 B 无关，就说 $f(x)$ 是一致 Hölder 连续的(指数为 α).

如果 S 是一个开集，而(1.1)关于每一有界闭集 $B \subset S$ 成立，这里系数 A 可以依赖于 B，就说 $f(x)$ 在 S 中是局部 Hölder 连续的(指数为 α). 如果 A 不依赖于 B，就说 $f(x)$ 为一致 Hölder 连续的(指数为 α).

如果 $f(x)$ 依赖于参数 λ，即 $f = f(x, \lambda)$，又 Hölder 系数不依赖于 λ，就说 $f(x, \lambda)$ 对于 x 是 Hölder 连续的，对于 λ 是一致的.

有时对于不同的模 $|x|$ 定义 Hölder 连续性是方便的. 例如见下面的 (1.4) 及第四、五章.

读者不难验证：如果 $f_1, \cdots, f_m$ 都是 Hölder 连续的 (指数为 α)，则 $f_1, \cdots, f_m$ 的 (分母不为零的) 任何有理函数也是 Hölder 连续的 (指数为 α).

如果在 (1.1) 中 $\alpha=1$，就说 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的.

考虑微分方程

$$(1.2)\qquad L_u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

其中系数 a_{ij}, b_i 和 c 均定义在柱体

$$\Omega\equiv\bar{D}\times[T_0,T]\equiv\{(x,t);\ x\in\bar{D},\ T_0\leqslant t\leqslant T_1\}$$

中，而 $\bar{D}$ 是有界区域 $D\subset R^n$ 的闭包. 我们总认为 $(a_{ij}(x,t))$ 是对称矩阵，即 $a_{ij}=a_{ji}$. 如果矩阵 $(a_{ij}(x,t))$ 为正定，即对每一实向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\neq 0$，有 $\sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j>0$，就说算子 L 在点 (x,t) 是抛物型的(或者说 L 是抛物的). 如果 L 在 Ω 的一切点都是抛物的，就说 L 在 Ω 中是抛物的. 如果存在正的常数 $\bar{\lambda}_0$ 和 $\bar{\lambda}_1$，使对任意实向量 ξ 及一切 $(x,t)\in\Omega$ 都有

$$(1.3)\qquad \bar{\lambda}_0|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant\bar{\lambda}_1|\xi|^2,$$

就说 L 在 Ω 中是一致抛物的.

本章将处处假定:

(A_1) L 在 Ω 中是抛物的;

(A_2) L 的系数都是 Ω 中的连续函数，且对所有的 $(x,t)\in\Omega$ 及 $(x^\circ,t^\circ)\in\Omega$ 都有

$$(1.4)\qquad |a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x^\circ,t^\circ)|\leqslant A(|x-x^\circ|^\alpha + |t-t^\circ|^{\alpha/2}),$$

$$(1.5)\qquad |b_i(x,t)-b_i(x^\circ,t)|\leqslant A|x-x^\circ|^\alpha,$$

$$(1.6)\qquad |c(x,t)-c(x^\circ,t)|\leqslant A|x-x^\circ|^\alpha.$$

因为 $a_{ij}(x,t)$ 是有界集合 Ω 中的连续函数，(A_1) 就意味着 L 在 Ω 中也是一致抛物的，即 (1.3) 对不依赖于 $(x,t)\in\Omega$ 的正常数 $\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}_1$ 成立.

定义 我们说 $u(x,t)$是 $Lu=0$ 在某个区域 Δ 中的解，如果所有在 L_u 中出现的 u 的导数(即 $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2u/\partial x_i\partial x_j$, $\partial u/\partial t$)

都是Δ中的连续函数，且在Δ的每点(x, t)有 $Lu(x, t)=0$. 类似的定义对任意微分算子L也适用.

定义 $Lu=0$（在Ω中）的基本解是一个对一切$(x, t)\in\Omega$, $(\xi, \tau)\in\Omega$, $t>\tau$都有定义的函数$\Gamma(x, t; \xi, \tau)$，它满足如下条件：

(i) 对固定的 $(\xi, \tau)\in\Omega$, 作为 (x, t) $(x\in D, \tau<t\leqslant T_1)$的函数它满足方程 $Lu=0$;

(ii) 对于在$\bar{D}$中的每一连续函数$f(x)$，当$x\in D$时有

$$\lim_{t\searrow\tau}\int_D \Gamma(x, t; \xi, \tau)f(\xi)d\xi=f(x), \tag{1.7}$$

其中 $d\xi=d\xi_1\cdots d\xi_n$. 我们总假定区域D是 Lebesgue 可测的，因为这是一个很自然的假定，往后我们就不提它了.

第 2—4 节用于构造基本解. 在第 5 节将研究它的某些性质. 第 6 节把第 2—5 节的结果推广到区域D为无界的情形.

2. 拟基本解方法

设$(a^{ij}(x, t))$为$(a_{ij}(x, t))$的逆矩阵. 令

$$\vartheta^{y,\sigma}(x, \xi)=\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(y,\sigma)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j), \tag{2.1}$$

其中$y=(y_1, \cdots, y_n)$. 由(1.3), (1.4)推出

$$\lambda_0|x-\xi|^2\leqslant\vartheta^{y,\sigma}(x,\xi)\leqslant\lambda_1|x-\xi|^2, \tag{2.2}$$

$$|a^{ij}(x,t)-a^{ij}(x^\circ,t^\circ)|\leqslant A'(|x-x^\circ|^\alpha+|t-t^\circ|^{\alpha/2}), \tag{2.3}$$

其中λ_0, λ_1及A'都是仅依赖于$\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}_1$及A的正的常数.

对于$t>\tau$，我们引进函数

$$w^{y,\sigma}(x, t; \xi, \tau)=(t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\sigma}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right], \tag{2.4}$$

$$Z(x, t; \xi, \tau)=C(\xi, \tau)w^{\xi,\tau}(x, t; \xi, \tau), \tag{2.5}$$

其中

$$C(x, t)=(2\sqrt{\pi})^{-n}[\det(a^{ij}(x, t))]^{1/2}. \tag{2.6}$$

对每一固定的(ξ, τ)，函数 $Z(x, t; \xi, \tau)$ 满足常系数方程

$$L_0u(x, t)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\xi, \tau)\frac{\partial^2u(x, t)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0. \tag{2.7}$$

由下面的定理 1 还可推出，对于 $\Gamma = Z$，(1.7) 也得到满足．于是 $Z(x, t; \xi, \tau)$ 是 $L_0u = 0$ 的基本解．为了构造 $Lu = 0$ 的基本解，我们把 L_0 看作是 L 的“首次近似”，而视 Z 为 $Lu = 0$ 的基本解 Γ 的“主要部分”．然后，我们试图找如下形式的 Γ：

$$(2.8)\qquad \Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_D Z(x, t; \eta, \sigma) \times \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma,$$

其中 Φ 由 Γ 满足方程 $Lu = 0$ 这一条件来确定．

这一过程称为 (E. E. Levi 的) 拟基本解方法．Z 称为拟基本解．在第九章我们还将把这一方法用于构造任意阶抛物型方程组的基本解．

定理 1. 设 $f(x, t)$ 为 Ω 中的连续函数，则

$$(2.9)\qquad J(x, t, \tau) \equiv \int_D Z(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi$$

为 (x, t, τ) $(x \in \bar{D},\ T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1)$ 的连续函数，且对 (x, t) $(x \in S,\ T_0 < t \leqslant T_1)$ 一致地有

$$(2.10)\qquad \lim_{\tau \to t} J(x, t, \tau) = f(x, t),$$

其中 S 为 D 的任意闭子集．

证明　首先考虑 f 和 a_{ij} 都是常数的情形．假定 $P^*P = (a^{ij})$，其中 P^* 为矩阵 P 的转置．线性代换 $\zeta = P(x - \xi)$ 把 $\sum a^{ij} \cdot (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)$ 化为 $\Sigma \zeta_i^2$．以 D^* 记上述代换下 D 的象，注意到

$$\frac{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)}{\partial(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)} = \frac{1}{\det P} [\det(a^{ij})]^{-1/2},$$

我们就得到

$$(2.11)\qquad J(x, t, \tau) = \int_{D^*} \frac{f}{(2\sqrt{\pi})^n} (t - \tau)^{-n/2} \times \exp\left[-\frac{|\zeta|^2}{4(t - \tau)}\right] d\zeta \equiv J_R + J_R^0,$$

其中 J_R 为在球 $|\zeta| \leqslant R$ 上所取的积分部分，这个球的半径 R 充分

小(使得球含于 D^* 中),而 J_R^0 为其余部分.

引进极坐标,我们得到

$$(2.12)\qquad J_R=\frac{f}{(2\sqrt{\pi})^n}\omega_n(t-\tau)^{-n/2}\times\int_0^R\exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right]r^{n-1}dr=\frac{f}{(2\sqrt{\pi})^n}2^{n-1}\omega_n\int_0^{R^2/4(t-\tau)}\sigma^{(n/2)-1}e^{-\sigma}d\sigma,$$

其中

$$\omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

是单位超球面的面积. 由此推出

$$(2.13)\qquad \lim_{\tau\to t}J_R=f.$$

因为 R 是固定的,所以 J_R^0 的被积函数当 $\tau\to t$ 时趋于零. 因此当 $\tau\to t$ 时 $J_R^0\to 0$. 把这与 (2.13) 结合起来,再据 (2.11) 就推知,当 $\tau\to t$ 时, $J(x,t,\tau)\to f$.

现在考虑 f 与 a_{ij} 都不是常数的一般情形. 写为

$$\begin{aligned}J(x,t,\tau)&=f(x,\tau)\int_D C(x,t)w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)d\xi\\(2.14)\qquad &+f(x,\tau)\int_D[C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)-C(x,t)\\&\times w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)]d\xi+\int_D C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)\\&\times[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi=J_1+J_2+J_3,\end{aligned}$$

可以象前面处理常系数情形的 J 那样来处理 J_1 的积分,于是

$$(2.15)\qquad \lim_{\tau\to t}J_1=f(x,t).$$

至于 J_2, 我们有

$$|w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)-w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)|\leqslant n^2|x-\xi|^2\times(t-\tau)^{-(n+2)/2}\max_{i,j}|a^{ij}(\xi,\tau)-a^{ij}(x,t)|$$

$$\times \exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].$$

把 J_2 的被积函数写成如下形式

$$I = [C(\xi,\tau) - C(x,t)]w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) \\ + C(x,t)[w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)]$$

再利用前面的不等式即可得知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在充分小的 R 和 δ，且使得当 $|\xi - x| \leqslant R$，$t - \tau < \delta$ 时，表达式 I 以

$$\varepsilon(t-\tau)^{-n/2}[1 + |x-\xi|^2(t-\tau)^{-1}] \\ \times \exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \tag{2.16}$$

为界．现将积分 J_2 分成两部分，设为 $I_1 + I_2$，其中积分 I_1 是在 $|\xi - x| \leqslant R$ 上取的．用 I_1 的被积函数的界(2.16)来估计 I_1，然后象在(2.12)那样使用极坐标，并作代换 $\sigma = r^2/(t-\tau)$，就发现，如果 $t-\tau<\delta$ 就有 $|I_1| \leqslant C\varepsilon$，其中 C 为与 ε 无关的常数．现在如固定 R 而让 $\tau \to t$，则 $I_2 \to 0$，因为 I_2 的被积函数趋于零．由此推出，当 τ 充分接近于 t 时，则 $|J_2| < C'\varepsilon$，其中 C' 为与 ε 和 τ 无关的常数．因此

$$\lim_{\tau \to t} J_2 = 0. \tag{2.17}$$

可用类似方法处理 J_3．我们把它拆成和 $J_{31} + J_{32}$．其中积分 J_{31} 是在球 $|\xi - x| \leqslant R$ 上取的．因为 $f(x,t)$ 是连续函数，所以当 R 和 $t-\tau$ 都充分小时，对任意的 $\varepsilon > 0$，J_{31} 的被积函数以

$$\varepsilon(t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]$$

为界．象在(2.12)那样引进极坐标并作代换 $\sigma = r^2/(t-\tau)$，就得到 $|J_{31}| \leqslant C\varepsilon$，$C$ 为与 ε 无关的常数．因为 R 是固定的，所以当 $\tau \to t$ 时 $J_{32} \to 0$．于是得到：当 $\tau \to t$ 时 $J_3 \to 0$．把这与(2.17)，(2.15)结合起来，且考虑到(2.14)，就得到(2.10)．

由前面的证明可推出有关一致收敛的断言．

3. 体位势

在 Ω 中给定了一个函数 $f(x,t)$，考虑函数

$$(3.1)\qquad V(x,t)=\int_{T_0}^{t}\int_D Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

并把它称为(对于拟基本解 Z 的) f 的体位势. 本节将研究 V 的某些可微性质. 这些性质将在下节基本解的构造中要用到.

注意，体位势是一个被积函数在 $\xi=x$, $\tau=t$ 处有奇性的广义积分，不过这种奇异性是可积的. 事实上，把 $w^{y,\tau}$ 写成如下形式

$$(3.2)\qquad w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)=(t-\tau)^{-\mu}(\theta^{y,\tau})^{\mu-\frac{n}{2}}\times\left[\frac{\vartheta^{y,\tau}}{t-\tau}\right]^{(n/2)-\mu}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right]$$

其中 $\vartheta^{y,\tau}=\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)$, 我们得到

$$(3.3)\qquad |w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{n-2\mu}}\quad(0<\mu<1),$$

而右边是可积的.

在实际研究 V 之前,先给出一条有用的初等引理.

引理 1 设当 x, y 在 R^n 的某个紧区域 S 中变动且 $x\neq y$ 时, $f(x,y)$ 为 (x,y) 的连续函数,又设当 $\varepsilon\to 0$ 时,对 S 中的 x 一致地有

$$\int_{S(x,\varepsilon)}|f(x,y)|dy\to 0,$$

其中 $S(x,\varepsilon)$ 是 S 与中心在 x 半径为 ε 的球的交,则对 S 中的任意有界可测函数 $g(y)$, (广义)积分

$$\varphi(x)=\int_S f(x,y)g(y)dy$$

为 S 中的连续函数.

证明 对于给定的 $\varepsilon>0$, 选取 δ_1 使对所有的 $x\in S$, $\delta\leqslant\delta_1$ 有

$$\int_{S(x,\delta)}|f(x,y)g(y)|dy<\varepsilon.$$

因为当 $x\in S$, $y\in S$, $|x-y|\geqslant\delta_1/2$ 时, $f(x,y)$ 是 (x,y) 的一致

连续函数(因而是有界的)，于是存在 $\delta_2<\delta_1/4$，使对一切 $x\in S$，$z\in S$ 有

$$(3.4)\qquad \int_{S(z,\delta_2)}|f(x,y)g(y)|dy<\varepsilon.$$

以 $S_2(z)$ 记 $S(z,\delta_2)$ 对于 S 的补，由(3.4)，我们得到

$$(3.5)\qquad \left|\int_{S_2(z)}f(x,y)g(y)dy-\int_{S_2(z^0)}f(x,y)g(y)dy\right|<2\varepsilon.$$

利用 $f(x,y)$ 对于 $x\in S$，$y\in S$，$|x-y|\geqslant\delta_2/2$ 的一致连续性，当对某个充分小的 $\delta(\delta<\delta_2/2)$，有 $|x'-x''|<\delta$ 时，我们有

$$\left|\int_{S_2(x')}f(x',y)g(y)dy-\int_{S_2(x')}f(x'',y)g(y)dy\right|<\varepsilon.$$

因此连同(关于 $z=x'$，$z^\circ=x''$，$x=x''$ 的)(3.5)，我们得到

$$\left|\int_{S_2(x')}f(x',y)g(y)dy-\int_{S_2(x'')}f(x'',y)g(y)dy\right|<3\varepsilon.$$

把它与(关于 $z=x=x'$，且 $z=x=x''$ 的)(3.4)一起考虑，就导出不等式 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<5\varepsilon$. 证明完毕.

若对于 $t<\tau$ 我们定义 $Z(x,t;\xi,\tau)=0$，则可把引理1应用于体位势，于是得结论为:

定理 2　如果 $f(x,t)$ 为 Ω 中的有界可测函数，则体位势 $V(x,t)$ 为 Ω 中的连续函数.

下面我们证明:

定理 3　如果 $f(x,t)$ 为 Ω 中的连续函数，则 $V(x,t)$ 当 $x\in D$，$T_0<t\leqslant T_1$ 时有对 x 的一阶连续偏导数，且

$$(3.6)\qquad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i}=\int_{T_0}^{t}\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

证明　把 $\partial w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)/\partial x_i$ 写成类似于(3.2)的形式，我们得到

$$(3.7)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_i}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{n+1-2\mu}}$$
$$\left(\frac{1}{2}<\mu<1\right).$$

于是，(3.6)中被积函数的奇异性是可积的. 如果对于 $t<\tau$，定

义 $\delta Z(x,t;\xi,\tau)/\partial x_i=0$，则可应用引理1，从而断定 (3.6) 的积分是连续函数. 剩下要验证 (3.6). 令

$$J(x,t,\tau)=\int_D Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi, \tag{3.8}$$

则

$$V(x,t)=\int_{T_0}^{t} J(x,t,\tau)d\tau. \tag{3.9}$$

由第 2 节定理 1，当 $x\in D$，$T_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T_1$ 时，只要我们定义

$$J(x,t,t)=\lim_{\tau\to t}J(x,t,\tau), \tag{3.10}$$

则 $J(x,t,\tau)$ 是 (x,t,τ) 的连续函数. 显然，当 $t>\tau$ 时，

$$\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}=\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi. \tag{3.11}$$

利用 (3.7) 可推出

$$\left|\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}}\quad\left(\frac{1}{2}<\mu<1\right). \tag{3.12}$$

因此，广义积分

$$\widetilde{V}_i(x,t)=\int_{T_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)d\tau \tag{3.13}$$

是绝对且一致收敛的.

设 $x^h=(x_1,\cdots x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\cdots,x_n)$ 并考虑

$$\begin{aligned}I&\equiv\frac{V(x^h,t)-V(x,t)}{h}-\widetilde{V}_i(x,t)\\&=\int_{T_0}^{t}\left[\frac{J(x^h,t,\tau)-J(x,t,\tau)}{h}\right.\\&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right]d\tau\\&=\int_{T_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}J(x^*,t,\tau)-\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right]d\tau,\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中 x^* 为把 x^h 和 x 连接起来的区间中的某个点. 利用 (3.12) 推出，对任意 $\varepsilon>0$ 以及一切 $x\in D$，当 $t-t_\varepsilon$ 充分小(与 x 无关)

时，有

$$(3.15)\qquad \int_{t_\varepsilon}^{t}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right|d\tau<\varepsilon.$$

一旦固定了 $t_\varepsilon(t_\varepsilon<t)$，就能找到 $\delta=\delta(t_\varepsilon,\varepsilon)$，使当 $\tau<t_\varepsilon$，$x\in D$，$|h|<\delta$ 时有

$$(3.16)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_i}J(x^*,t,\tau)-\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right|<\frac{\varepsilon}{T_1-T_0}.$$

把 I 写成如下形式

$$\begin{aligned}I=&\int_{T_0}^{t_\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}J(x^*,t,\tau)-\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right]d\tau\\&+\int_{t_\varepsilon}^{t}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x^*,t,\tau)d\tau\\&-\int_{t_\varepsilon}^{t}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)d\tau\end{aligned}$$

并利用(3.15)，(3.16)就得出，当 $|h|<\delta$ 时 $|I|<3\varepsilon$. 于是 $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ 存在且等于 $\widetilde{V}_i$，即 (3.6) 成立.

定理 4 设 $f(x,t)$ 为 Ω 中的连续函数，且关于 $x\in D$ 为局部 Hölder 连续的(指数 β)，而对 t 是一致的，则 $V(x,t)$ 对 $x\in D$，$T_0<t\leqslant T_1$ 有对 x 的二阶连续偏导数，并且

$$(3.17)\qquad \frac{\partial^2V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=\int_{T_0}^{t}d\tau\int_D\frac{\partial^2Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}f(\xi,\tau)d\xi.$$

注意到在 (3.6) 中积分的次序是无关紧要的，因为 (据 (3.7)) 被积函数的奇异性分别对各个变量是绝对可积的，(3.17) 中的积分为累次积分，于是仅需视对 τ 的积分为广义积分. 和(3.7)大不相同，我们现在有不等式(其证明类似于 (3.7))

$$(3.18)\qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{n+2-2\mu}},$$

因而我们不能断定 (3.17) 的被积函数的奇性在 Ω 中是绝对可积的.

证明 由定理 3，