JIEGOU SHUXUE CONGSHU

结构数学丛书

统计数学

李桂青　陶牟华
徐家云　敖德学　编著

中国建筑工业出版社

结构数学丛书

统计数学

李桂青　陶年华
徐家云　敖德学　编著

中国建筑工业出版社

(京)新登字035号

图书在版编目(CIP)数据

统计数学/李桂青等编著.-北京：中国建筑工业出版社，1998
(结构数学丛书)
ISBN 7-112-01582-0

Ⅰ.统… Ⅱ.李… Ⅲ.①概率论-基本知识 ②数理统计-基本知识 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第08419号

结构数学丛书
统计数学
李桂青 陶牟华
徐家云 敖德学 编著

中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)
新华书店经销
北京市黄坎印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米 1/32 印张：10 字数：225千字
1998年12月第一版 1998年12月第一次印刷
印数：1—2,000册 定价：13.00元
ISBN 7-112-01582-0
TU·1189(8802)

本书结合土建结构工程介绍概率论、数理统计的基本知识及其应用问题。

第一章至第三章是有关随机变量的基本知识，第四章简明扼要地介绍了数理统计的几个基本问题，第五章为随机过程，第六、七章属应用部分，主要介绍了风荷载的数理统计方法及结构动力可靠性理论。

本书适用于土建工程技术人员自学，也可作为大专院校土建专业的学生、研究生的参考书。

出 版 说 明

工程理论的发展与数学理论有着密切的关系，为使结构工程技术人员掌握有关的数学理论，便于采用新的结构设计计算方法和进行结构理论研究，我社组织出版这套结构数学丛书。丛书的对象是已学过大学工程专业中数学、结构力学以及工程结构设计等课程的高年级大学生和在职工程技术人员。

本丛书介绍一系列有关土建结构设计计算新方法的数学理论和方法。每一种书中集中介绍一门数学的学科或一个专题；着重于使读者能充分掌握和学会运用各种数学的基本方法，而不过分强调数学理论推导的阐述。书中以数学基本理论和概念为主线，以结构设计的应用为横线，尽量多举土建结构计算中有代表性的实例进行阐述。内容除包括基本方法的介绍外，也旁及国内外该门数学在工程结构中的应用情况，使读者对其有一概括的了解。叙述力求简明扼要，重点突出，有介绍，有分析，有评价，易为读者接受。

本丛书已拟订的选题计有：变分学、模糊数学、数学规划方法，可靠性数学、数值计算方法、福氏变换与谱分析、统计数学、笛卡尔张量等。今后有条件时将陆续拟订新选题组织出版。

本丛书在组织过程中得到胡海昌教授、钟万勰教授、李继华教授、王光远教授的大力支持，王光远教授还直接参加拟订选题和组稿工作，我们在此表示感谢。

前　言

本书是在我们编著的讲义《概率论及其应用》的基础上写成的，该讲义曾对我校工业与民用建筑专业的大学生、研究生讲授过多次，其部分内容还在湖北、沈阳、哈尔滨、苏州、石家庄、云南等省市的建筑、水利学会举办的培训班、专题讲座上讲过多次，这次出版时又进行了一次较大的修改。

《统计数学》涉及面越来越广泛，所要求的数学基础也越来越多，即其广度、深度、难度与日俱增。但我们撰写本书的目的，只是想给土建结构工程师提供一些必要的、最基本的概率论与数理统计知识，故取材力求少而精，所涉及的数学基础仅限于一般微积分教程和初步的矩阵知识，例题均与结构工程有关，定义、定理均未追求数学上的严谨，但几乎所有推导都是完整的，以利工程技术人员自学。

本书共分七章，大体分为三个部分，即概率论的基本知识，数理统计和应用问题。第一章至第三章是有关随机变量的基本知识，第四章简明扼要地介绍了数理统计的几个基本问题，第五章为随机函数，第六、七章属应用部分，主要介绍了风荷载的数理统计方法及结构动力可靠性理论。

参加本书工作的有欧四媛工程师和张武英同志。

本书适用于土建工程技术人员自学，也可作为大专院校土建专业的学生、研究生的参考书。

著者

目　　录

第一章　概率论的基本概念与定理

§1.1　事件的概率

在自然界中发生的某些现象，人们是可以预先作出判断的，例如：质量为 m 的质点，受力 F 作用时，其加速度 a 必为 F/m，且沿 F 的方向；又如水在标准大气压下，加热到 100℃时必然沸腾。这种在一定条件下必然出现的现象叫做必然事件。反之，如果在一定条件下必然不出现的现象则称为不可能事件。

但是在自然界中也存在大量的另一类现象。它们在一定条件下可能出现也可能不出现，这种现象称为随机事件或偶然事件。通常简称为事件。例如：

(A) 掷硬币一次出现正面；

(B) 连掷硬币三次出现三次正面；

(C) 明年广州最大风速是 35m/s；

(D) 明年广州最大风速不超过 35m/s。

从上面所举的事件可以看出，每一事件都有某种程度的可能性。但是有的事件的可能性大一些，有的则小一些。例如 (A) 比 (B) 的可能性要大，(D) 比 (C) 的可能性要大。为了从数量上比较事件可能性的程度，必须对每一事件给予一个数字，这个数字就是事件的概率。也就是说，一个事件的概率是该事件客观可能性程度的数值测度。

有些事件的概率是可以直接计算的，典型的例子是古典

型试验，即具有下列两个性质的试验：

1. 试验的可能结果只有有限多个

在概率论中，所谓试验是指一定条件下的实现。例如，掷一硬币也是一种试验，它只有两个可能结果，出现正面与出现反面。

试验中的每一个可能的结果，称为该试验的一个基本事件。若试验结果只能是在某些基本事件中出现一件，则称这些事件为完备的事件群。古典型试验由有限多个基本事件组成完备的事件群。在具体问题中，关键在于找出完备的事件群是由那些基本事件组成的。

2. 所有基本事件都是等可能的

例如，若硬币的正面与反面的光滑度是完全相同的，则掷硬币出现正面与出现反面可以看成是等可能事件。

对于古典试验，若试验结果由 n 个基本事件组成，而事件 A 由其中的 m 个基本事件组成，则定义 A 的概率 $P(A)$为：

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

不难看出，$P(A)$ 介与0于1之间，即

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1-2}$$

若 $P(A)=1$，则 A 为必然事件；若 $P(A)=0$。则 A 为不可能事件。

【例 1-1】 设有3个7天龄期的混凝土试块与外形相同的6个28天龄期的试块混在一起了，从中取出三个试块，求3个都是28天龄期试块的概率。

【解】 这一试验中的可能结果的总数 n 是9个试块取3个的组合数 C_9^3：

$$n = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

以 A 表示所取 3 个都是 28 天龄期试块的事件，它由 m 个基本事件组成；m 为 6 个 28 天龄期的试块取 3 个组合数 C_6^3：

$$m = C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

将 n、m 代入式（1-1），即得事件 A 的概率：

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

一般地，若有甲类 M 个试件与外形相同的乙类 L 个试件混在一起。从中抽取 k 个试件，则 k 个（$k<L$）全为乙类试件的概率 $P(A)$ 为

$$P(A) = C_L^k / C_{M+L}^k$$

式中 C_L^k 表示在 L 个试件中取 k 个试件的组合数，可按下列二式之一计算：

$$C_L^k = \frac{L(L-1)\cdots(L-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

或

$$C_L^k = \frac{L!}{k!(L-k)!}$$

式中类同于 $k!$ 的符号，读作 k 的阶乘，是前 k 个自然数的连乘积：

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

【例 1-2】 设 100 根钢筋中有 3 根是废品，从中取出 2 根钢筋，求其中有 1 根钢筋是废品的概率。

【解】 基本事件总数 n 为：

$$n = C_{100}^2 = 4950$$

而取出 2 根钢筋中有 1 根是废品的事件 A，为从三根废品中取一根与从 97 根正品中取一根的事件。它由 m 个基本事件组成：

$$m = C_3^1 C_{97}^1 = 291$$

则所求的概率 $P(A)$为

$$P(A) = \frac{291}{4950} = 0.059 = 5.9\%$$

这说明在本例指定的条件下，只取二根钢筋就有一根是废品的可能性是很小的。

一般地，若一批 N 件产品里有 M 件是废品，从中取出 k 件，则其中有 l（$l<k$ 及 $l<L$）件废品的概率 P（A）为：

$$P(A) = \frac{C_M^l C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}$$

§1.2　事件的频率

上节中讨论了古典型试验，它对于理解概率的意义是有帮助的。但式（1－1）的应用范围很狭窄，很多问题不能用它来计算。例如上节所列的事件 C 及 D：“明年广州最大风速是 35m/s”及“明年广州最大风速不超过 35m/s”；又如：“在一批 16Mn 钢筋中，任取一根，其强度不低于 380MPa”，这些事件的概率都不可能通过式（1－1）计算。

再拿一个简单的例子来说，掷一硬币得正面的概率，当其二面完全相同时显然为 1/2；若二面不完全相同，如二面的花纹，凸凹都有差异时，则出现正面的概率就不会是 1/2。但仍然是有某种概率的，而这种概率只能通过试验来

确定。

设在 n 次试验中，某事件 A 出现 m 次。则称

$$P^*(A) = \frac{m}{n} \tag{1-3}$$

为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率；m 为 A 在这 n 次试验中出现的频率数。

例如，掷 1000 次硬币中出现 508 次正面，则“出现正面”这一事件在这 1000 次试验中的频率为 0.508，频率数为 508。

从上述关于频率的定义不难看出，若 A 出现的可能性愈大，频率$P^*(A)$也愈大；反过来说，若$P^*(A)$愈大，则可以设想 A 出现的可能性也愈大。因此，频率与概率之间有着紧密的关系。实践证明，当增加试验次数后，频率将通过随机波动而趋近于概率。

仍以上面的古典型试验为例，掷一硬币 10 次，出现正面可能是 3 次，$P^*(A)=0.3$;另掷 10 次，出现正面可能是 7 次。$P^*(A)=0.7$,随机性很大。但是次数增多以后。频率的随机性就将大大减小。18 世纪一位法国科学家蒲丰氏掷硬币 4040 次，得正面 2048 次。$P^*(A)=0.5069$。英国统计学家皮尔逊掷 12000 次，得正面 6019 次，$P^*(A)=0.5016$;另一次他又掷 24000 次，得正面 12012 次。$P^*(A)=0.50050$。克内奇（Krrich，1946）掷 10000 次，得出现正面的频率变化曲线示于图 1－1。

我们知道掷硬币出现正面这个事件的概率为$\frac{1}{2}$。这说明上述试验一致得出：当试验次数增多后，频率稳定在概率附近，或者说以随机方式趋近于概率。这个极为重要的性质，不仅多次为实践所证实，而且后来还为贝努利从数学上严格

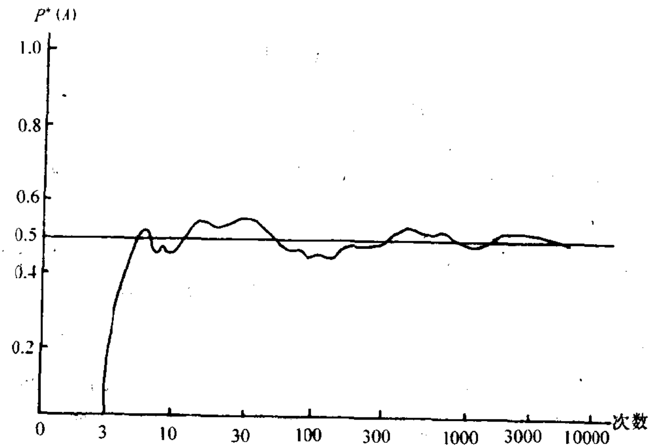

图 1－1　掷硬币出现正面的频率变化曲线

证明。

因此，只要试验次数 n 充分大，就可以取频率作为概率的近似值。在许多实际问题中，当概率不易求出或不能直接计算时，往往就采用这种办法。

§1.3　概率的加法定理

在概率论中，计算事件的概率或频率常常采用间接的方法，即根据事件之间的关系由其他事件的概率来确定该事件的概率。这种方法以有关概率的几个基本定理为依据。

概率的加法定理是：

两个互不相容的事件的和的概率等于各事件的概率的和。即

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1-4)$$

所谓两事件 A 与 B 互不相容，是指 A、B 不能同时实现。A 与 B 之和也是一事件，其意义是 A、B 中至少有一个实现。记作 $A+B$ 或 $A\cup B$；对于 A、B 为互不相容事件的情况，则 A 与 B 之和表示 A 实现或 B 实现。类似地，任意多个事件的和也是一事件，其意义是这些事件中至少有一个实现。

下面以古典型试验来证明概率的加法定理。设试验结果由 n 个基本事件组成，而事件 A 由其中 m 个基本事件组成，事件 B 由其中 k 个基本事件组成，则由式（1－1）得：

$$P(A)=\frac{m}{n};\qquad P(B)=\frac{k}{n}$$

因为 A、B 互不相容。故 $A+B$ 这个事件为 A 实现或 B 实现。它由 A 包括的基本事件与 B 包括的基本事件之和所组成，即共有 $m+k$ 个基本事件。按式（1－1），$A+B$ 的概率为：

$$\begin{aligned}P(A+B)&=\frac{m+k}{n}\\&=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}\\&=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

这个定理很容易推广到任意有限多个互不相容事件的情形，即

$$P\left(\sum_{i=1}^{l}A_i\right)=\sum_{i=1}^{l}P(A_i)\qquad(1-5)$$

我们用数学归纳法证明。前面已证明 $l=2$ 时，定理是正确的。现设 $l=k$ 时正确。即：

$$P\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)$$

令$\sum_{i=1}^{k}A_i = B$。则

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1}A_i\right)$$

$$= P\left[\sum_{i=1}^{k}(A_i) + A_{k+1}\right] = P(B + A_{k+1})$$

$$= P(B) + P(A_{k+1}) = P\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right) + P(A_{k+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k}P(A_i) + P(A_{k+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)$$

这就是说，当我们假定 $l = k$ 时加法定理是正确的话，则上面证明了 $l = k + 1$ 加法定理也正确。因而当 l 为任意有限多个时加法定理是正确的。这就是式（1－5）的证明。用文字叙述为：任意有限多个互不相容事件的和的概率，等于各事件的概率的和。

推论 1 若 A_1，A_2，…，A_l 构成互不相容事件的完备群，则这些事件的概率之和等于 1。即

$$\sum_{i=1}^{l}P(A_i) = 1 \tag{1-6}$$

证 因为 A_1，A_2，…，A_l 构成完备的事件群，故 $\sum_{i=1}^{l}A_i$ 为必然事件，即试验的结果至少是其中的一个事件实现，于是

$$P\left(\sum_{i=1}^{l}A_i\right) = 1$$