

● 非线性科学丛书 ●

从抛物线谈起

——混沌动力学引论

郝柏林 著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

从抛物线谈起

——混沌动力学引论

郝柏林 著

陈式刚 郑伟谋 审阅

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”的第一册。本书借助于抛物线映射这一很初等的工具,介绍混沌动力学的一些最基本的概念和方法。全书计分七章,即:最简单的非线性模型,抛物线映射,倍周期分岔序列,切分岔,混沌映射,吸引子的刻划,过渡过程。本书深入浅出,图文并茂,文献丰富。可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由陈式刚、郑伟谋审阅。

非线性科学丛书

从抛物线谈起

——混沌动力学引论

郝柏林 著

陈式刚 郑伟谋 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1163 1/32 印张 6 字数 146,000

1993年9月第1版 1995年8月第2次印刷

印数 1,701—4,700本

ISBN 7-5428-0713-7/O·84 定价:(精装本)12.90元

Advanced Series in Nonlinear Science

Starting With Parabolas —

An Introduction to Chaotic Dynamics

Hao Bai-lin

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica

P. O. Box 2735, Beijing 100080, China

Shanghai Scientific and Technological Education

Publishing House, SHANGHAI, 1993

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的高新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中，非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧。诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

对混沌现象的认识, 是非线性科学最重要的成就之一. 1975年, “混沌”作为一个新的科学名词出现在文献中. 混沌动力学迅速发展成为有丰富内容的研究领域. 1991年出版的《混沌文献总目》(见本书第167页上所列出的参考文献[1]), 列举了269本有关书名和7157篇文章题目. 混沌动力学的许多概念和方法, 诸如奇怪吸引子、相空间重构和符号动力学, 正在被应用到自然科学和工程技术的许多门类中. 同时, “混沌”一词, 也引发了不少望文生义、牵强附会的伪科学议论. 有必要提倡用严肃实验、积累数据、严格推导、认真分析的科学方法, 来探讨混沌行为.

所幸的是, 混沌动力学的许多内容, 只要运用初等的数学工具和简单而具有实际意义的模型, 即可进行深入的分析研究. 特别是对于包含耗散的非线性系统, 一维线段的迭代(也叫作“映射”)起着重要的启发作用. 为了从更普遍的背景来说明这种重要作用, 我们先回顾一下数理科学对自然界的描述体系.

自然界只有一个, 自然现象遵循着不依赖于人类意志的客观规律. 然而, 数理科学中却有着两套反映这些规律的体系: 确定论描述和概率论描述. 这两套描述体系的发展过程中, 各有一个典型的问题, 对于新的概念和方法, 起着试金石的作用.

确定论的试金石是天体力学. 特别是可以严格求解的二体问题, 从刻卜勒的行星运动三定律, 到牛顿力学的三定律, 到狭义和广义相对论关于水星近日点进动和光线在太阳附近偏转的解释, 到氢原子光谱乃至两条谱线间距因辐射修正而导致的细微移动, 贯穿了经典力学、相对论、量子力学和量子场论的发展史. 这一发展过程的各个阶段, 构成现代数理科学的坚实知识基础.

概率论的试金石是布朗运动。1827年植物学家布朗在显微镜下观察到悬浮在液体中的花粉颗粒的无规运动，曾经以为是看到了生命运动的基本形态。1905年爱因斯坦引用随机过程概念，成功地预言了布朗运动的基本特性，随后被皮兰的实验观测证实。这就引出了朗之万方程、福克-普朗克方程、维纳的连续积分表示、昂萨格泛函、乃至涨落场论等一系列发展。它们同样是深入研究大自然、特别是研究复杂系统行为的必要知识基础。

这两套描述体系的发展，有着诸多并行之处；同时，在认识论基础上有着深刻的对立。世界究竟是偶然的，还是必然的？围绕这一哲学命题的争论，同样牵动着自然科学家的思绪。自牛顿以来的科学传统，比较推崇确定论描述，而把概率论描述作为“不得已而为之”的补充。然而，把概率论还原为确定论，从力学推导统计的尝试始终未能成功。同时，愈是深入到物质运动的高级和复杂的形态，就愈益离不开概率论描述，就必须不断求助基于知识“不完备性”的统计方法。至少，从审美观点看，这也是现代自然科学体系的一种缺陷。

混沌动力学的发展，正在缩小这两个对立描述体系之间的鸿沟。某些完全确定论的系统，不外加任何随机因素就可能出现与布朗运动不能区分的行为；“失之毫厘，差之千里”的对初值细微变化的敏感依赖性，使得确定论系统的长时间行为必须借助概率论方法描述。这就是混沌。耗散系统的混沌理论，也有自己的试金石，这就是一维线段的映射。最简单的非线性关系，即抛物线函数，导致内容极其丰富的典型一维映射。

数理科学中的许多一维模型，往往因为过于特殊而用途甚窄。抛物线映射则是幸运的例外。它足够简单，使得数值计算很省时间，又可能作深入的解析研究，所得结论常常具有普遍意义，可以用到高维的耗散系统。钻研抛物线映射，有助于培养扎扎实实的学习和研究作风，即进行数值实验，从细致观察中提出问题，同时进行认真的分析，得出结论，再推广到更普遍的情形。本书将以抛

物线映射为实例,多次通过这种分析,向读者介绍混沌动力学的许多基本概念和方法. 阅读本书要求具备理工科大学本科的数学知识,并且最好培养出自己动手推导和上计算机试算的习惯.

本书中还反映了一批我们自己的研究结果. 这些工作曾得到中国科学院数理学部(1983~1985), 中国自然科学基金(1986~1991), 和中国科学院开放实验室计划(1986~1991)的支持. 美国 Sun Microsystems 公司赠送了 Sun 3/260C 工作站, WRI 公司赠送了 Mathematica 软件,书中许多图形和实例就是用它们作出的. 作者对上述单位表示感谢. 作者的研究工作受益于同众多同行的交流与切磋,这里无法一一列举,只能特别感谢郑伟谋和张淑誉的多年合作、讨论与支持. 郑伟谋和陈式刚仔细阅读了书稿,提出了许多宝贵意见,作者在此特别致谢.

Abstract

Using the quadratic mapping as a simple yet highly nontrivial example of nonlinear dynamical system, basic notions of bifurcation and chaos theory are introduced. Renormalization group approach, symbolic dynamics, fractal geometry, as well as characterization of chaos and transient phenomena are also briefly touched. Readership includes graduate students, postdoctoral fellows, and practitioners in physical and engineering sciences.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前 言

第 1 章 最简单的非线性模型	1
§ 1 什么是非线性	1
§ 2 非线性演化方程	5
§ 3 虫口变化的抛物线模型	10
§ 4 其他简单映射举例	12
第 2 章 抛物线映射	16
§ 5 线段映射的一般讨论	16
§ 6 稳定和超稳定周期轨道	20
§ 7 分岔图里的标度性和自相似性	24
§ 8 分岔图中暗线的解释	32
§ 9 周期窗口何处有——字提升法	36
§ 10 实用符号动力学概要	41
第 3 章 倍周期分岔序列	51
§ 11 隐函数定理和倍周期分岔	51
§ 12 重正化群方程和标度因子 α	55
§ 13 线性化重正化群方程和收敛速率 δ	60
§ 14 外噪声和它的标度因子 κ	62
第 4 章 切分岔	67
§ 15 周期 3 的诞生	67
§ 16 阵发混沌的几何图象	70
§ 17 阵发混沌的标度理论	72
§ 18 阵发混沌的重正化理论	76

§ 19	l 倍周期序列的标度性质	81
§ 20	周期窗口知多少	84
§ 21	沙尔可夫斯基序列和李-约克定理	93
第 5 章	混沌映射	97
§ 22	满映射	97
§ 23	轨道点的密度分布	100
§ 24	同宿轨道	104
§ 25	混沌吸引子的激变	107
§ 26	粗粒混沌	110
第 6 章	吸引子的刻划	119
§ 27	功率谱分析	119
§ 28	李雅普诺夫指数	122
§ 29	维数的各种定义	125
§ 30	一维映射中的分形	131
§ 31	满映射维数谱的“相变”	134
§ 32	测度熵和拓扑熵	139
第 7 章	过渡过程	143
§ 33	倍周期分岔点附近的临界慢化指数	144
§ 34	过渡过程的功率谱	146
§ 35	奇怪排斥子和逃逸速率	147
§ 36	过渡混沌	150
附录 A	倍周期分岔定理的证明	152
附录 B	施瓦茨导数和辛格尔定理	157
索引		162
科学家中外译名对照表		166
参考文献		167

Contents

Preface

Chapter 1 The Simplest Nonlinear Model	1
§ 1 What is nonlinearity	1
§ 2 Nonlinear evolution equations	5
§ 3 Parabolic model for insect population	10
§ 4 Examples of other simple mappings	12
Chapter 2 The Parabolic Mapping	16
§ 5 A general discussion of mappings of an interval.....	16
§ 6 Stable and superstable periodic orbits	20
§ 7 Scaling property and self-similarity in the bifur- cation diagram.....	24
§ 8 Explanation of dark lines in bifurcation diagrams ..	32
§ 9 Where are the periodic windows located—the word-lifting technique.....	36
§ 10 A brief introduction of applied symbolic dynamics..	41
Chapter 3 The Period-Doubling Sequences	51
§ 11 The implicit function theorem and period- doubling bifurcation.....	51
§ 12 The renormalization group equation and the scaling factor	55
§ 13 The linearized renormalization group equation the convergence rate	60
§ 14 External noise and its scaling factor	62
Chapter 4 The Tangent Bifurcations	67
§ 15 The emergence of period 3	67
§ 16 Geometric picture of intermittent chaos	70
§ 17 Scaling theory of intermittent chaos	72
§ 18 Renormalization theory of intermittent chaos	76

§ 19	The scaling property of period-1-tupling sequences...	81
§ 20	How many periodic windows are there?...	84
§ 21	The Sharkovskii sequences and the Li-Yorke theorem.....	93
Chapter 5	Chaotic Mappings	97
§ 22	The surjective mapping	97
§ 23	The distribution of orbital points	100
§ 24	Homoclinic orbits	104
§ 25	Crises of chaotic attractors	107
§ 26	Coarse-grained chaos	110
Chapter 6	Characterization of Attractors	119
§ 27	Power spectrum analysis	119
§ 28	Lyapunov exponents	122
§ 29	Various definitions of dimensions	125
§ 30	Fractals in one-dimensional mappings.....	131
§ 31	"Phase transition" in the dimension spectrum of the surjective mapping	124
§ 32	Entropy and topological entropy.....	139
Chapter 7	Transient Processes	143
§ 33	Critical slowing down exponent near period- doubling bifurcation point	144
§ 34	Power spectra of transient processes	146
§ 35	Strange repellers and escape rate.....	147
§ 36	Transient chaos	150
Appendix A	Proof of the period-doubling theorem	152
Appendix B	Schwartz derivative and Singer's theorem	157
Subject index		162
Traslation of names		166
References		167

第 1 章

最简单的非线性模型

在这一章里,我们要从抛物线出发,构造一个最简单的非线性动力学模型. 它的实际意义和丰富内容,将远远超过人们初次看到它时的想象. 事实上,本书主旨就是介绍研究这个简单模型所得到的结果和启示. 勤于思考的读者一定会发现不少尚未解决的问题,并且继续去探索和创造. 我们在“前言”里已经说过,研究这个简单模型所得的结论,有助于理解更复杂、更实际的高维模型. 善于抓住简单模型,提出深刻问题,进行彻底分析,得出寓于特殊事例中的普遍性规律,可以很好地锻炼从事科学创造的能力.

§ 1 什么是非线性

本书是“非线性科学丛书”的第一册,我们就从非线性讲起.

“线性”和“非线性”首先用于区分函数 $y=f(x)$ 对自变量 x 的依赖关系. 函数

$$y=ax+b \quad (1.1)$$

对自变量 x 的依赖关系是一次多项式,在 (x, y) 平面中的图象是一条直线(见图 1.1),我们就说“ y 是 x 的线性函数”. 其他一切高于一次的多项式函数关系,都是非线性的.

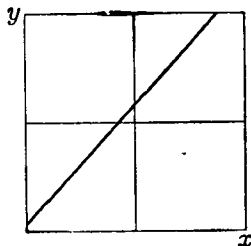


图 1.1 线性函数

最简单的非线性函数是抛物线

$$y=ax^2+bx+c. \quad (1.2)$$

函数关系(1.1)和(1.2)中, a 、 b 、 c 等是参量. 各个参量并不同样重要. 在线性关系(1.1)中, 参量 b 是次要的, 可以靠移动坐标原点而改变, 甚至取成零; 参量 a 是重要的, $a > 0$ 或 $a < 0$ 使直线上升或下降, 而 $a = 0$ 使 y 退化成常数. 其实, 对于抛物线(1.2), 也只有一个参量 a 有实质意义: $a > 0$ 时它是具有一个最小值而两端伸向正无穷的抛物线(图 1.2(i)); $a < 0$ 时它是具有一个最大值而两端落到负无穷的抛物线(图 1.2(ii)); $a = 0$ 则使它退化成为线性函数. 对于多项式类型的函数关系, 变量最高幂次项的系数一定是重要的. 对于更一般的、甚至含有微分、积分等运算的关系式, 用多少个参量才可以恰到好处地反映出一切性质不同的行为, 这并不是一个平庸的问题. 对于用一维映射描述的动力学过程, 我们将借助符号动力学的概念回答这个问题 (§ 10).

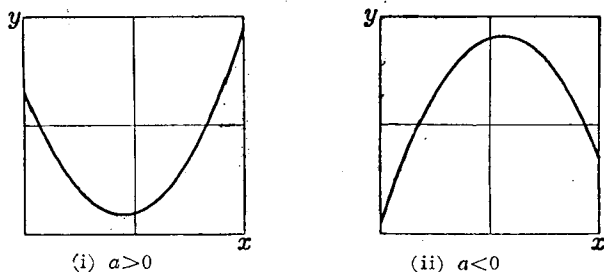


图 1.2 抛物线函数

为了简化书写, 我们通常用一个字母 μ 来代表所有参量的集合, 把一般的函数关系写成

$$y = f(\mu, x). \quad (1.3)$$

定性地讲, 线性关系只有一种, 而非线性关系千变万化, 无法穷举. 每个具体的非线性关系, 刻划一种独特的行为. 然而, 各种非线性关系还可能具有某些不同于线性关系的共性. 正是这些共性, 才导致了统一的非线性科学. 为了认识共性, 往往可以先透彻地研究一、两个最简单的特例. 这就是我们集中考虑抛物线(1.2)的原因.