21 数学天元基金

当代数学园地 ⑦

正规形理论及其应用

李伟固 著

科学出版社
Science Press

当代数学园地 7

正规形理论及其应用

李伟固 著

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书是关于正规形理论及其应用方面的一本专门著作.

本书系统地介绍正规形理论及其在分岔理论、Hilbert 第 16 问题、微分同胚嵌入流和动力系统分类问题等方面的应用. 书中不仅对一些经典结果给出了严格的证明,而且包含了 80 年代以来这一领域中的许多新结果.

本书可供大学数学、物理、力学等系的大学生、研究生、教师及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

正规形理论及其应用/李伟固著.

-北京:科学出版社,2000.1

(当代数学园地 7/姜伯驹主编)

ISBN 7-03-007751-2

Ⅰ.正… Ⅱ.李… Ⅲ.常微-流形 Ⅳ.0189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 29796 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000 年 1 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2000 年 1 月第一次印刷 印张:10 1/2

印数:1—2 000 字数:270 000

定价:22.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《当代数学园地丛书》前言

《当代数学园地》是国家自然科学基金会数学天元基金支持出版的，该项基金是为“我国数学在21世纪率先赶上世界先进水平”这一目标而设的。这也是本丛书的出版目的。中国数学要跃入世界前列，光靠从国外引入尖子是不行的。在大学以上层次，增强对现代数学思想的训练及对现代数学发展的了解，很有必要。事实上，只有这样，才会使一批尖子人才，在中国成长壮大。

本丛书包含数学专著、译著、讲义和通俗读物，其宗旨是以不拘一格的形式向数学研究者、教育工作者，以及数学专业的研究生和大学生传播当今数学的最新发展，包括新理论、新概念、新方法、新思想和新动态。因此，它的组织原则有二条：一、取材新，二、可读性强。

所谓取材新，意味着书的内容须为中文图书中不多见者，尤其欢迎来自崭新的数学分支或者当今十分活跃的数学方向的题材。这是本丛书有别于其它丛书的基本特点。

所谓可读性强，意味着书须写得通俗易懂，起点要低，终点要高，最好图文并茂，这条原则对列入丛书的专著和讲义也不例外。换句话说，即便是专著和讲义，也要尽力在文笔上、组织上下功夫，达到生动活泼，深入浅出，照顾到所提及的读者面。

本丛书欢迎符合上述两原则的各类书稿，不拘篇幅大小。特别欢迎优秀留学人员来稿。对怀有报国之心、但由于种种原因暂时不能回归祖国的留学人员来说，利用书的形式使自己的知识能为祖国的科学技术发展做份贡献，这是切实可行，也是深受欢迎的好事。让我们大家携起手来，不分国内国外，不分资历深浅，

共同为我国数学的发展，及在 21 世纪率先赶上世界先进水平而努力！

《当代数学园地》编委会

序

正规形理论是简化常微分方程或微分同胚的重要工具，从 H. Poincaré 开始，一百多年来得到很大发展，特别是近年来，由于这一理论在 Hilbert 第 16 问题、分岔理论等领域的广泛应用，它已越来越受到人们的关注.

本书系统地讲述了各种等价意义下的正规形理论及其在相关领域中的应用. 书中不仅给出了一些经典结果的简洁证明，令人耳目一新，而且包含了这个领域的许多最新结果，其中相当一部分内容正是作者自己的近期研究成果，如关于微分同胚嵌入流的结果、周期常微系统的自治化的结果、任意阶 Melnikov 函数在双曲鞍点同宿环附近的展式等. 作者运用正规形理论对这样一些基本问题作了本质性推进. 书中大部分内容作者都曾在北京大学数学学院我所领导的讨论班上报告过，受到好评.

这是一本专著，国内外有关正规形理论与之内容相近的书尚不多见，值得一读.

张芷芬

前　言

对于一给定的向量场或映射，在给定的等价类中找到其较简单的形式以便于研究，这就是正规形理论的基本内容，这一思想来源于 Poincaré.

1923 年，Dulac 通过研究平面解析向量场在奇点附近的正规形得到了多角环后继映射的著名展开式，这是 Hilbert 第 16 问题的第一个重大进展. 1935 年，Ляпунов 得到了一类正规化变换的收敛性，从而解决了平面解析向量场的中心焦点的判别问题. 40 年代初，Siegel 运用快速收敛的方法将 Poincaré 关于解析线性化的结果推广到非 Poincaré 域. 五六十年代，Sternberg，Chen，Hartman 等人给出了向量场（或微分同胚）在奇点（或不动点）附近光滑线性化的条件. 70 年代以来，Брюно，Бибиков，Богданов，Takens，Арнольд，Ильяшенко，Roussarie 等人的工作进一步发展了正规形理论，并且将其应用到动力系统的分类问题、Hilbert 第 16 问题以及分岔理论等许多领域. 可以说，正规形理论已经成为这些领域中不可缺少的重要工具.

本书旨在系统介绍正规形理论及其在分岔理论、Hilbert 第 16 问题、微分同胚嵌入流问题和动力系统的分类问题等方面的应用. 在讲述经典结果的同时，力求介绍最新进展. 书中不仅对许多经典结果给出了较简单的证明，而且各章均有一些结果属初次发表. 全书的大部分内容是自封闭的，各主要定理均给出了完整的证明. 学习过数学分析、线性代数、复变函数论和微分方程等大学本科课程后，本书的大部分内容是不难理解的.

下面就本书的内容安排作一简要说明.

全书共分四章. 第一章介绍解析系统的正规形理论，其中包含 Poincaré，Dulac，Siegel，Брюно，Бибиков 等人的许多经典结果. 我们还介绍了解析正规形理论应用于常微分方程定性理论的几个例

子，其中包括平面多项式系统中心焦点判定必在有限步内完成这一经典结果的一个新证明．我们还给出了复常微分方程的广义稳定流形定理，它将实解析系统相应的结果作为其特例．第二章介绍光滑正规形理论．我们利用同伦法对许多经典结果作了统一处理，给出了一系列系统的光滑正规形．本章的新结果之一是解决了一维向量场的局部光滑分类问题．第三章介绍周期系统的正规形和微分同胚嵌入向量场及其在分岔理论中的应用．我们将 Floquet 理论推广到非线性周期系统，得到了光滑自治化的条件，并把它应用于高维嵌入问题．我们还证明了微分同胚鞍结不动点的横截同宿点意味着马蹄，从而推广了 Birkhoff-Smale 定理．在第四章中，我们综合运用前面各章介绍的理论和方法，研究平面向量场的同宿分岔、Melnikov 函数和 Hilbert 第 16 问题．我们不仅证明了解析系统的 Melnikov 函数在非退化中心处的解析性，还将 Roussarie 关于双曲鞍点同宿环附近的一阶 Melnikov 函数的渐近展式推广到任意高阶，并证明了它们的收敛性．对包含任意多个鞍点的异宿环附近的一阶展式也同样地证明了收敛性．

本书中“定理 1.2”表示同章中的定理 1.2．我们用 $\boldsymbol{N},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}_+$，$\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^+$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别表示自然数，整数，非负整数，实数，正实数和复数集合，i 表示 $\sqrt{-1}$.

本书的主要内容作者近年来在北京大学数学系张芷芬教授主持的讨论班上报告过．参加讨论班的许多同志都提出过宝贵的意见，特别是张芷芬教授、李承治教授、王铎教授和赵丽琴博士阅读了本书的初稿，提出了不少好的建议．另外，本书的出版得到文兰教授和王诗宬教授的支持和帮助，在此一并表示感谢．

最后感谢科学出版社吕虹编辑，没有她的辛勤工作，本书的出版是不可能的．

限于作者的水平，书中不当之处在所难免，恳请读者指正．

本书的写作得到了国家自然科学基金的支持，谨此致谢．

李伟固

目　　录

第一章　解析正规形

本章介绍解析向量场和微分同胚在不动点附近的解析等价正规形理论. 在本章的最后一节,我们还将举出一些例子说明正规形理论在常微分方程定性理论中的应用.

§1　多变量解析函数基础知识

本节我们介绍全书所需要的有关多变量解析函数理论的基础知识,其中的一些结果将不给出证明,有兴趣的读者可参见[1].

1.1　解析函数

令 $n>1$ 是一个自然数, $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}, i_n \in \mathbf{Z}$, 是一个复数集. 考虑 n 重指标级数

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{\infty} A_{i_1\cdots i_n}. \tag{1.1}$$

如果部分和

$$S_{k_1\cdots k_n} = \sum_{i_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{k_n} A_{i_1\cdots i_n}$$

当 $k_1,\cdots,k_n\to\infty$ 时趋于一个有限和,则称级数(1.1)收敛,否则称为发散的. 如果 $A_{i_1\cdots i_n}$ 的模所对应的级数收敛, 则称级数(1.1)绝对收敛. 令 $b\in \boldsymbol{C}^n$, 我们称

$$V=\{x\in \boldsymbol{C}^n \mid |x_1-b_1|\leqslant r_1,\cdots,|x_n-b_n|\leqslant r_n, r_i>0\}$$

为点 b 的一个多重圆盘邻域, b 称为 V 的中心.

定义 1.1　令 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ 是一个开区域. 称函数 $f:U\to \boldsymbol{C}$ 在点 $b\in U$ 处解析,如果存在 b 的一个多重圆盘邻域 $V\subset U$ 和幂级数

$$\sum_{k_1,\cdots,k_n\geqslant 0} a_{k_1\cdots k_n}(x_1-b_1)^{k_1}\cdots(x_n-b_n)^{k_n}, \tag{1.2}$$

使得(1.2)在任一点 $x \in V$ 都收敛到 $f(x)$. 如果 f 在 U 中每一点处都解析,则称 f 在 U 上解析.

下面我们罗列解析函数的几个重要性质.

定理 1.2 令 $U \subset \mathbf{C}^n, V \subset \mathbf{C}^m$ 是两个开区域,如果 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 U 上的解析函数,满足 $(f_1(x), \cdots, f_m(x)) \in V, x \in U$, 则对于任意 V 上的解析函数 g, 都有 $F(x) = g(f_1(x), \cdots, f_m(x))$ 是 U 上的解析函数.

推论 1.3 如果 f, g 是 U 上的解析函数,则 $f \pm g, fg, f/g$ (若 $g \neq 0$)都是 U 上的解析函数.

定理 1.4 若 f 是区域 $U \subset \mathbf{C}^n$ 上的解析函数,则对任意整数 $k_1, \cdots, k_n \geqslant 0$, 偏导数

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}$$

存在,并且在 U 上解析,它的值可以通过对级数(1.2)逐项求偏导得到.

推论 1.5 在(1.2)中

$$a_{k_1 \cdots k_n} = \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}\bigg|_{x=b}. \tag{1.3}$$

(1.3)称作函数 f 在 b 点的 Taylor 系数,而(1.2)称作 f 在点 b 处的 Taylor 级数. 与单变量解析函数一样,多变量解析函数也有 Cauchy 积分公式.

定理 1.6 假设 f 是开区域 $U \subset \mathbf{C}^n$ 上的解析函数,如果

$$P = \{x \in \mathbf{C}^n \mid |x_1 - b_1| \leqslant r_1, \cdots, |x_n - b_n| \leqslant r_n\} \subset U,$$

则对 P 内部任意一点 x, 有

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{|y_n - b_n| = r_n} \mathrm{d}y_n \cdots \int_{|y_1 - b_1| = r_1} \frac{f(y_1, \cdots, y_n)}{(y_1 - x_1) \cdots (y_n - x_n)} \mathrm{d}y_1. \tag{1.4}$$

推论 1.7 在级数(1.2)中

$$|a_{k_1 \cdots k_n}| \leqslant \frac{1}{r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}} \sup_{y \in \partial P} |f(y)|, \tag{1.5}$$

这里 $\partial P: |y_i - b_i| = r_i, i = 1,2,\cdots,n$，表示区域 P 的边界.

(1.5)称作 Cauchy 不等式.

推论 1.8 若 $f(t,x)$ 是 $(a,b)\times P\subset \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{C}^n$ 上的连续函数，并且对任意给定 $t\in(a,b)$ 是 P 上的解析函数，则

$$g(x)=\int_{t_0}^{t} f(s,x)\mathrm{d}s,\ t_0,t\in(a,b)$$

是 P 上的解析函数.

定理 1.9 令 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ 是一开区域，$f_k, k\in \boldsymbol{N}$，是 U 上的解析函数列，并且在 U 的任一紧子集上一致收敛，则

(1)极限函数 f 在 U 上解析；

(2) f_k 的 $j=(j_1,\cdots,j_n)$ 阶偏导数 $\dfrac{\partial^j f_k}{\partial x^j}$ 收敛到 $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$.

下面我们考虑向量函数.

定义 1.10 假设 $U\subset \boldsymbol{C}^n$ 是一个开区域，称映射 $f:U\to \boldsymbol{C}^m$ 解析，如果 f 的每个分量 $f_1,\cdots,f_m$ 是 U 上的解析函数.

定理 1.11(隐函数定理) 假设 $F(x,y):U\subset \boldsymbol{C}^n\times \boldsymbol{C}^m\to \boldsymbol{C}^m$ 解析，并且对某一点 $(x_0,y_0)\in U$，满足

$$F(x_0,y_0)=0,\ \det\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0,$$

则在 x_0 的一个邻域 V 上，存在唯一解析映射 $y=f(x):V\to \boldsymbol{C}^m$，满足

$$F(x,f(x))\equiv 0,\ x\in V.$$

定义 1.1 中关于函数的解析性也可对实函数定义.

定义 1.12 实函数 f 称作开区域 $U\subset \boldsymbol{R}^n$ 上的解析函数，如果对 $b\in U$，存在 b 的邻域 $V\subset U$，使得 f 在 V 上可以展成实系数的收敛幂级数(1.2).

1.2 Weierstrass 预备定理

作为隐函数定理的推广，下面将要介绍的预备定理和除式定理是研究解析函数局部性质的重要工具.

定理 1.13(Weierstrass 预备定理)　假设函数 $f: \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}$ 在原点 (0,0) 处解析,并且满足

$$f(w,0) = w^k g(w),\ g(0) \neq 0,\ k \in \boldsymbol{N},$$

则存在原点 $(0,0) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n$ 的一个邻域 V 上的解析函数 $q(w,z)$, $q(0,0) \neq 0$, 以及 $0 \in \boldsymbol{C}^n$ 邻域上的解析函数 $a_0(z), \cdots, a_{k-1}(z)$, $a_0(0) = \cdots = a_{k-1}(0) = 0$, 满足

$$q(w,z)f(w,z) = w^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z) w^i,\ (w,z) \in V.$$

特别地,如果 f 是实解析函数,则 q 和 a_i 也是实解析函数.

不难看出,当 $k = 1$ 时,由预备定理可得到隐函数定理.

定理 1.14(除式定理)　令解析函数 f, g 和自然数 k 满足上面定理 1.13 的条件,则对 $(0,0) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n$ 的任意多重圆盘邻域 U, 存在常数 K 和 (0,0) 的邻域 $V \subset U$, 使得对 U 上的任意解析函数 G, 都存在 V 上的唯一解析函数 q, r, $r = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(z) w^i$, 满足

(1) $G = qf + r$, $(w,z) \in V$;

(2)

$$\sup_V \{|q| + |r_i|\} < K \sup_U |G|; \tag{1.6}$$

特别地,当 G 和 f 为实解析函数时,q 和 r 也为实解析函数.

首先指出,由除式定理可推出预备定理. 事实上,取 $G(w,z) = w^k$, $a_i(z) = -r_i(z)$, 则有

$$\begin{aligned} w^k &= q(w,0)f(w,0) + r(w,0) \\ &= q(w,0)w^k g(w) + \sum_{i=1}^{k-1} r_i(0) w^i. \end{aligned}$$

由此推出, $r_i(0) = 0$, $q(0,0)g(0) = 1$, 故 $q(0,0) \neq 0$.

下面的引理是证明定理 1.14 的关键.

引理 1.15(多项式除式定理)　令 $\lambda = (\lambda_0, \cdots, \lambda_{k-1}) \in \boldsymbol{C}^k$, $P(w,\lambda) = w^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i w^i$, 则对 $(0,0) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n$ 的任意多重圆盘邻域 U, 都存在 $(0,0) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n$ 的邻域 V_1, $0 \in \boldsymbol{C}^k$ 的邻域 V_2 以及常