计算电磁场的

矩量法

〔美〕 R.F.哈林登 著

王尔杰 肖良勇
林炽森 官德明 译

国防工业出版社

内容简介

本书是〔美〕R. F. 哈林登著《Field Computation by Moment Methods》(1968)的中译本。作者总结了1968年以前用此方法计算电磁场问题的研究结果，并从基本概念上系统地作了论述。全书分四个部分。第一部分（第一章）通过对最简单的一元二阶微分方程的求解来说明矩量法的基本概念、基本方法及各种变化形式。第二部分（第二章）讲述解算静电场问题的算例。第三部分（第三章至第六章）叙述将其用于天线及散射体的基本计算方法和有关的基本概念。第四部分（第七章至第十章）属于本征值的矩量法求解，其中包括波导、空腔及天线参数的最优化问题。本书是从事电子学，特别是从事电磁工程方面的科学技术人员的基本参考书，也可供天线、微波、电波传播专业高年级大学生、研究生及教师参考。

Field Computation by Moment Methods
Roger F. Harrington
The Macmillan Company First Printing 1968

*

计算电磁场的
矩　量　法
〔美〕R. F. 哈林登　著
王尔杰　肖良勇
林炽森　宫德明　译

*

国防工业出版社 出版
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/32　印张 8 3/8　174千字
1981年6月第一版　1981年6月第一次印刷　印数：0,001— 5,000册
统一书号：15034·2134　定价：0.88元

原 序

在高速数字计算机出现之前，人们总是竭力用解析方法处理问题的解，以便使所得的结果在以后的计算中所花费的工作量最小。现在，却常常采用在解析方面比较简单，但需要大量计算的方法。许多有实际意义的问题也只能用这种方法求解。由于现代数字计算机有很高的速度和很大的容量，几乎任何线性分析中的问题都可以求解到一定的精确度；对各种问题，例如任意激励和加载的任意形状导线（第四章），都可以排出计算机程序。

本书试图提出一种用数字计算机求解场问题的统一方法，这种方法可以普遍地应用于任何类型的场，但这里只讨论电磁理论方面的例子。所用的题材主要是为了说明理论的应用，读者不应期望从中得到严格的原理和证明，如果需要，可参考所提供的其它文献，这样做可以使读者用最短的时间学到不同的方法。并且，由于求解的细节随问题的不同而变化很大，所以只能凭借一些例子来获得解决新问题所必须的知识。选择良好的解法是一种艺术，要从经验中学习。

本书的统一概念是矩量法。这是一个非常普遍的概念，几乎所有解析的和数值的解，都可以用它解释。例如，经典的本征函数法相当于矩量法中对展开函数和检验函数的一种特殊的选择。雷利-里兹（Rayleigh-Ritz）变分法和伽略金（Галеркин）法都与其密切相关。作者坚信，从函数空间

和线性算子的观点来处理矩量法是表述其普遍理论的最好方式，然后在这个普遍格式中说明特定的问题。

本书分为两个主要部分。一部分是关于确定论问题，另一部分是关于本征值问题。第一章讨论矩量法和几种可用的近似法。第二章将其中某些方法应用于静电问题。第三章用于某些二维问题。第四章用于线天线及散射体的三维问题。第五章用广义网络参数讨论建立电磁问题的普遍计算式。第六章讨论多端口问题，它是一种有几个激励、测量和加载端口的结构。第七章以非均匀传输线为例，用矩量法讨论本征值问题。第八章将这些方法应用于任意截面的波导。第九章用于含有任意介质的谐振腔。最后一章讨论最优化问题，以证明它可以转化为本征值问题。

矩量法理论最好采用线性函数空间的语言来表述，但我们设法使它用得最少。所需的概念在引用时再定义和说明。附录A给出了线性空间普遍结构的梗概，附录B给出了逆矩阵的算法，附录C给出了矩阵本征值和本征矢量的算法。为了更好地理解这些增加的内容，请读者参看其它参考文献。

R.F.哈林登

目　　录

第一章　确定论问题

§1-1　引　言

采用高速数字计算机不仅可以进行比以往任何时候更大量的计算，而且实际上也可解决手算中大量的重复计算问题。过去要花费很大力量用解析方法把所得解表示为计算量的最小的形式，如今却可以用计算机的运算时间来节省花费在解析方面的精力。作为最终手段的逼近法能够在计算机上达到所要求的精度，对大多数情况来说，可以做到与准确答案一样精确。它们还可以解决用精确方法不能解决的问题。

关于场问题的求解计算，本书提出统一的矩阵处理方法。其基本思想是将一个泛函方程化为矩阵方程，然后用人们熟知的方法求解该矩阵方程。这些概念最好用线性空间和算子来表示，但是读者不需要预先具备这方面的理论知识，因为我们在引用它们时，还要定义和解释这些概念。附录A给出了线性空间和算子的简单概述，详细的解释在许多教科书中可以找到[1~3]。

在本章中我们讨论非齐次方程

$$L(f)=g \tag{1-1}$$

式中L是算子，g是源或激励（已知函数），f是场或响应（待定的未知函数）。确定论这一术语意味着式（1-1）的解是唯一的，即只有一个f对应一个已知的g。分析问题就是

当L和g已知时确定f，综合问题就是当确定了f和g时确定L。本书只讨论分析问题。

本章将叙述泛函方程化为矩阵方程的基本数学方法。这种方法的基本原理在一般的矩量法中均可找到。用它能够解释大多数特定问题的解。一经化为适当的矩阵方程，我们认为一个确定论问题已经解决，因为随后便可以由求逆算出。大多数计算机均有用于矩阵求逆的子程序，它是一个相当简单的运算。附录B给出了广泛应用的高斯-约当（Gauss-Jordan）法供参考。

本章所选的例子是简单的，它只是用来说明理论的，为了避免产生模糊不清的概念，本章不涉及物理概念和复杂的数学运算。但是当用这些方法解决实际问题时，就不那么简单了，其细节往往因问题的类型不同而不同，只能通过对各种问题的讨论来阐明。因此，在以后各章中将讨论许多特定的问题。所举的这些例子，不仅可以使读者学会求解相类似的问题，而且还要有所发展和改进，以便处理其它类型的问题。虽然绝大多数例子取自电磁理论，但其方法是普遍的，也适用于任何其它类型的场问题。

§1-2　问题计算式的建立

因为要用线性空间和算子符号讨论普遍解法，所以应该将特定的问题纳入此符号中。当给出了一个形式为$L(f)=g$的确定论问题时，我们必须弄清算子L的定义域（运算作用于其上的函数f）和它的值域（由运算而得的函数g）；通常还需要一个内积$\langle f,\ g\rangle$，它是一个满足以下定义的标

量●：

$$\langle f,\ g\rangle=\langle g,\ f\rangle \tag{1-2}$$

$$\langle \alpha f+\beta g,\ h\rangle=\alpha\langle f,\ h\rangle+\beta\langle g,\ h\rangle \tag{1-3}$$

$$\langle f^*,\ f\rangle\begin{cases} >0 & \text{若 } f\neq 0 \\ =0 & \text{若 } f=0 \end{cases} \tag{1-4}$$

式中 α 和 β 为标量；$*$ 号表示复数共轭。有时需要伴随算子 L^a 及其定义域，它的定义是：对所有在 L 定义域中的 f，有

$$\langle Lf,\ g\rangle=\langle f,\ L^a g\rangle \tag{1-5}$$

如果 $L^a=L$，则算子是自伴的，因而 L^a 的定义域就是 L 的定义域。

解的特性依赖于算子的特性，如果 f 是实数，Lf 也是实数，则算子为实算子。假如在其定义域中对所有的 $f\neq 0$，若

$$\langle f^*,\ Lf\rangle>0 \tag{1-6}$$

则算子为正定的。如果式（1-6）中的 $>$ 换为 $\geqslant$，则算子为半正定的。如果式（1-6）中的 $>$ 换为 $<$，则算子为负定的。在必要时还将指出算子的其它特性。

如果 $L(f)=g$ 的解存在，且对所有的 g，解是唯一的，则必有逆算子 L^{-1} 存在，使

$$f=L^{-1}(g) \tag{1-7}$$

如果 g 已知，则式（1-7）代表原来问题的解。但是，如果 f 已知，则式（1-7）本身就是 g 的一个非齐次方程，它的解

● 通常在希尔伯特（Hilbert）空间中，内积的定义用我们的符号对应于 $\langle f,\ g^*\rangle$。对本书来说，在遇到时用显式表示出共轭运算是方便的，而不以共轭来定义伴随算子。

即为$L(f)=g$，因此，L和L^{-1}成为一对互逆算子。

用线性空间概念建立问题计算式的简便性只能通过实践来认识，这将由以下各章的例子来提供练习。下面让我们来研究一个简单的抽象例子，它可以说明数学概念，但不涉及物理概念。

例 给定$g(x)$，求在区间$0\leqslant x\leqslant 1$中满足

$$-\frac{d^2f}{dx^2}=g(x) \tag{1-8}$$

$$f(0)=f(1)=0 \tag{1-9}$$

的$f(x)$。这是一个边值问题，对它

$$L=-\frac{d^2}{dx^2} \tag{1-10}$$

在我们要考虑的区间$0\leqslant x\leqslant 1$内，所有函数g的空间是L的值域。L的定义域是在区间$0\leqslant x\leqslant 1$内的函数f的空间，这些函数满足边界条件（1-9），并且在L的值域内具有二阶导数存在。如果无适当的边界条件，式（1-8）的解不是唯一的，换句话说，要由微分算子及其定义域两者来确定算子。

适用于此问题的一个内积是

$$\langle f, g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx \tag{1-11}$$

显然，式（1-11）满足式（1-2）～式（1-4）中的一系列假设。要注意，式（1-11）的规定不是唯一的，比如

$$\int_0^1 w(x)f(x)g(x)dx \tag{1-12}$$

也是一种可采用的内积。式中$w(x)>0$是一个任意的权函数。但是伴随算子依赖于内积，因此，通常可以选定内积，而使它成为自伴算子。

为了求出微分算子的伴随算子，我们先构成式（1-5)的左边，然后用分部积分来得到右边。对于该问题是：

$$\langle Lf,\quad g\rangle=\int_0^1\left(-\frac{d^2f}{dx^2}\right)g\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}\,dx-\left[\frac{df}{dx}g\right]_0^1$$
$$=\int_0^1 f\left(-\frac{d^2g}{dx^2}\right)dx+\left[f\frac{dg}{dx}-g\frac{df}{dx}\right]_0^1 \tag{1-13}$$

最后两项是边界项，可以选择 L^a 的定义域使它们为零。由式（1-9）可知，第一个边界项为零，假定

$$g(0)=g(1)=0 \tag{1-14}$$

则第二个边界项也为零。显然，对于由式（1-11）确定的内积，从伴随算子的定义式(1-5)可知，式(1-10)的伴随算子为

$$L^a=L=-\frac{d^2}{dx^2} \tag{1-15}$$

因为 $L^a=L$，且 L^a 的定义域与 L 的定义域相同，所以算子是自伴的。

因为当 f 是实数，Lf 也是实数时，L 是实算子，所以由式（1-6）可知，L 也是正定算子，现证明如下：

$$\langle f^*,\,Lf\rangle=\int_0^1 f^*\left(-\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx$$
$$=\int_0^1\frac{df^*}{dx}\frac{df}{dx}\,dx-\left[f^*\frac{df}{dx}\right]_0^1$$
$$=\int_0^1\left|\frac{df}{dx}\right|^2dx \tag{1-16}$$

注意，即使 f 是复数，L 也是正定算子。

L 的逆算子可以由标准的格林函数法[2]得到，它是

$$L^{-1}(g)=\int_0^1 G(x,x')g(x')dx' \qquad (1\text{-}17)$$

式中G是格林函数，即

$$G(x,x')=\begin{cases} x(1-x') & x<x' \\ (1-x)x' & x>x' \end{cases} \qquad (1\text{-}18)$$

构成$f=L^{-1}(g)$后，微分两次便可以得到式（1-8），这样就证明了式（1-17）是逆算子。注意，在L^{-1}的定义域中不需要边界条件，这是大多数积分算子的共同特点。从L是自伴的证明同样可以得出L^{-1}也是自伴的，因为

$$\langle Lf_1, f_2\rangle=\langle g_1, L^{-1}g_2\rangle \qquad (1\text{-}19)$$

当然，也可以像式（1-15）那样直接证明L^{-1}的自伴性。同样，用类似的方法也可以得出：只要L是正定的，L^{-1}也是正定的。反之亦然。

§1-3 矩 量 法

现在讨论一种求解线性方程的普遍方法，该方法称为矩量法[4,5]。如果非齐次方程为

$$L(f)=g \qquad (1\text{-}20)$$

式中L是线性算子，g为已知函数，f为未知函数。令f在L的定义域中被展开为f_1，f_2，f_3…的组合，如

$$f=\sum_n \alpha_n f_n \qquad (1\text{-}21)$$

式中α_n是系数。f_n被称为展开函数或基函数。对于精确解，式（1-21）通常是无穷项之和，而f_n形成一个基函数的完备集。对于近似解，式(1-21)通常是有限项之和。将式(1-21)代入式（1-20），再应用算子L的线性便可以得到：

$$\sum_{n}\alpha_n L(f_n)=g \tag{1-22}$$

对此问题若已经规定了一个适当的内积$\langle f, g\rangle$，那么，在L的值域内定义一个权函数或检验函数$w_1, w_2, w_3\cdots$的集合[2]，并对每个w_m取式（1-22）的内积，则

$$\sum_{n}\alpha_n\langle w_m, Lf_n\rangle=\langle w_m, g\rangle \tag{1-23}$$

式中$m=1, 2, 3\cdots$。此方程组可以写成如下的矩阵形式

$$[l_{mn}][\alpha_n]=[g_m] \tag{1-24}$$

式中

$$[l_{mn}]=\begin{bmatrix}\langle w_1, Lf_1\rangle & \langle w_1, Lf_2\rangle & \cdots\\ \langle w_2, Lf_1\rangle & \langle w_2, Lf_2\rangle & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix} \tag{1-25}$$

$$[\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\end{bmatrix}\qquad [g_m]=\begin{bmatrix}\langle w_1, g\rangle\\ \langle w_2, g\rangle\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{1-26}$$

如果矩阵$[l]$是非奇异性的，其逆矩阵$[l^{-1}]$存在，则α_n便由下式给出

$$[\alpha_n]=[l_{mn}^{-1}][g_m]\text{●} \tag{1-27}$$

f的解由式（1-21）得出，为了简明地表示此结果，规定函数的矩阵为

$$[\tilde{f}_n]=[f_1, f_2, f_3\cdots] \tag{1-28}$$

于是，可将f写成

$$f=[\tilde{f}_n][\alpha_n]=[\tilde{f}_n][l_{mn}^{-1}][g_m] \tag{1-29}$$

● $[l_{mn}^{-1}]$即$[l_{mn}]^{-1}$，它表示逆矩阵，以下同此。——译注

此解是精确的还是近似的，要取决于f_n和w_n的选择。当选择$w_n=f_n$这种特殊情况时，通常称为伽略金法[6,7]。

如果矩阵〔l〕是无限阶的，那么它只在特殊情况下，譬如是对角线矩阵时才能求逆。由经典的本征函数法得到的对角线矩阵可以认为是矩量法的特殊情况。假如f_n和w_n的集合是有限的，那么这个矩阵就是有限阶的，因而可以用人们熟悉的方法求逆（附录B)。

在任何一个特定的问题中，主要任务是选择f_n和w_n。f_n必须是线性无关的，并且使得它们的某种叠加式（1-21）能够很好地逼近f。w_n也应该是线性无关的，并且也应该使得内积$\langle w_n, g \rangle$取决于g的相对独立性。影响选择f_n和w_n的一些其它因素是：（1)所要求的精度；（2)计算矩阵元的难易；（3）能够求逆的矩阵大小；（4）良态矩阵〔l〕的可实现性。

例 现在讨论§1-2中的例子，但具有特定的源$g=1+4x^2$，则方程变为

$$-\frac{d^2f}{dx^2}=1+4x^2 \tag{1-30}$$

$$f(0)=f(1)=0 \tag{1-31}$$

显然，这是一个简单的边值问题，其精确解为

$$f(x)=\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^4 \tag{1-32}$$

为了说明计算步骤，将用矩量法重新讨论这个问题。

为了求得幂级数解，我们选择

$$f_n=x-x^{n+1} \tag{1-33}$$

式中$n=1, 2, 3, \cdots, N$。则级数式（1-21）为

$$f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x - x^{n+1}) \tag{1-34}$$

注意，在式（1-33）中必须存在单独的 x 项，否则 f_n 将不在 L 的定义域中，即不满足边界条件。对于检验函数，选择

$$w_n = f_n = x - x^{n+1} \tag{1-35}$$

在这种情况下，就是伽略金法。在§1-8中将要证明 w_n 应该在伴随算子的定义域内。对于我们这里所讨论的例子，由于 L 是自伴的，所以 w_n 应该在 L 的定义域内，如式（1-35）那样。

用内积式（1-11）和 $L=-d^2/dx^2$ 很容易计算式(1-25)和式（1-26）的矩阵，其结果为

$$l_{mn} = \langle w_m, Lf_n \rangle = \frac{mn}{m+n+1} \tag{1-36}$$

$$g_m = \langle w_m, g \rangle = \frac{m(3m+8)}{2(m+2)(m+4)} \tag{1-37}$$

对于任何固定值 N（展开函数的数目），α_n 由式（1-27）给出，并且由式（1-34）逼近 f。

为了说明收敛性，我们来研究当 N 增加时的逐渐近似程度。当 $N=1$ 时，$l_{11}=1/3$，$g_1=11/30$，由式（1-24），得 $\alpha_1=11/10$；当 $N=2$ 时，矩阵方程式（1-24）变成

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} \tag{1-38}$$

由上式求得各 α 如下：