比贝尔巴赫猜想

龚 昇 著

科 学 出 版 社
1 9 8 9

内 容 简 介

比贝尔巴赫猜想是古典函数论的中心问题之一. 从1916年这一猜想的提出,到1984年彻底解决,其间倾注了数学家们大量的精力. 本书总结了这一猜想各个发展阶段的主要方法、结果及影响,其中包括作者本身研究这个问题所做的工作.

本书读者对象为大专院校数学专业的学生、教师及有关的科学工作者.

比贝尔巴赫猜想
龚 昇 著
责任编辑 梅 霖 夏墨英
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1989年2月第 一 版 开本:850×1168 1/32
1989年2月第一次印刷 印张:5
印数:0001—2,060 字数:129,000
ISBN 7-03-000770-0/O·201
定 价: 5.20 元

序 言

著名的 Bieberbach 猜想终于为人所揭晓。自 1916 年 L. Bieberbach 提出这个猜想，至 1984 年 L. de Branges 彻底解决这个问题（见 de Branges[1]—[3]），历时六十八年，其间不知经过多少数学家的辛勤劳动与艰苦努力，但最终的证明却是如此简明，完全出乎人们的意料。

这六十八年来，有关单叶函数的文献浩如烟海，而这些文献又以研究 Bieberbach 猜想为中心课题之一。S. D. Bernadi 曾经把有关单叶函数的文献目录列出三大卷（见 S. D. Bernadi[1]）。到 1981 年为止，发表的文献达 4282 篇，可谓洋洋大观矣。尤其要提到的是，在这六十八年中，在这一领域里，不断有写得很出色的书籍出版，如 Г. М. Голузин[1]，A. C. Schaeffer 与 D. C. Spencer[1]，J. A. Jenkins[1]，W. K. Hayman[1]，И. М.Милин[1]，Н. А. Лебедев[1]，A. W. Goodman[1] 以及 G. Schober[1] 等（见参考文献）。而近年来影响最大、叙述得全面的书，当推 P. L. Duren 及 Ch. Pommerenke 的著作.除了这些公开出版的书籍外，还有不少写得很好而未正式出版的讲义，作者有 D. Aharonov, J. A. Hummel, M. M. Schiffer 等人。

现在 Bieberbach 猜想解决了，似乎应该写一本书来介绍 Bieberbach 猜想的证明过程.本书算是一个尝试.为了使大学数学系毕业的学生都能看懂，本书尽可能地做到自成系统。此外，考虑到本书的篇幅不宜过大，故只能从大量文献中选择一些与证明 Bieberbach 猜想有关的内容，而大量精辟和重要的结果只好有待于读者去参考有关的文献，尤其是 Duren[1] 和 Pommerenke[1]。

本书共分四章。第一章是一些古典的结果及 Bieberbach 猜想研究的历史综述；第二章及第三章分别介绍 de Branges 用来

解决 Bieberbach 猜想的两个基本方法，即 Löwner 方法及 Милин 方法；最后一章叙述了 de Branges 对 Bieberbach 猜想的证明. 在各个章节中，我们对历史上一些有关的结果也作了一些介绍.

我国最早研究单叶函数的数学工作者是陈建功教授. 1933 年他在日本发表的论文（陈建功[1]）是我国进行这方面研究的开端. 此后，陈教授以及在他指导下的学生做了大量工作. 他的学生，如夏道行、胡克、任福尧、何成奇、吴卓人、刘醴泉等人都作出了重要贡献. 不幸的是，陈教授于 1971 年被"四人帮"迫害致死. 作为他的一名学生，我愿以此书作为对这位我所尊敬的老师的一个纪念. 另外，在我国还有不少数学家，其中包括刘书琴教授指导下西北大学数学系中的一些教师，在此领域中作出了很多贡献.

本书是著者在美国 Notre Dame 大学及加州大学圣迭戈分校任访问教授期间抽空陆续写成的. 两校数学系为我的工作与写作提供了一切方便，我愿借此机会向他们，特别是 T. O'Meara 教授、W. Stoll 教授、丘成桐教授以及 C. FitzGerald 教授表示衷心的感谢.

著者有幸参加了 1985 年 3 月 11 日至 15 日在美国 Purdue 大学召开的庆祝 Bieberbach 猜想解决的学术讨论会. 在会上能与各国同行进行充分的学术交流与讨论，得益匪浅，对本书的写作帮助很大. 为此，我还要向 D. Drasin 教授、Purdue 大学数学系以及与我讨论的同行致谢.

复旦大学任福尧、何成奇教授仔细审阅了本书，改正了不少错误，并提出了宝贵意见. 在此谨致衷心的谢忱！

龚 昇

丁卯年春节

于美国加州大学圣迭戈分校

目　　录

第一章 引　　言

§ 1.1. 一些古典的结果

假设 R 为复平面 $\mathbf{C}$ 中的一个区域，$f(z)$ 为 R 上的正则单值函数，若对 R 中任意二个不同的点 z_1，z_2，$f(z)$ 均取不同的值，即 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 $f(z)$ 在 R 上是**单叶的**.

在本书中，主要讨论在单位圆 $D = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ 中单叶的正则函数. 若 $f(z)$ 在 D 中单叶正则，则 $f'(z) \neq 0$ 在 D 中成立. 因此我们不妨加上规范条件 $f(0) = 0$ 及 $f'(0) = 1$. 这时 $f(z)$ 的 Taylor 展开式成为

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots, \quad |z| < 1. \tag{1.1.1}$$

这种函数的全体成一正规族，记作 S. Riemann 映照定理告诉我们：任意边界多于一点的单连通区域一定可以共形映照到单位圆. 所以在 S 上的任意结果都可以推广到任意边界多于一点的单连通区域上去.

在 S 中扮演重要角色的是 **Koebe 函数**

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots, \tag{1.1.2}$$

它将单位圆映到全平面除去在负实数轴上从 $-\frac{1}{4}$ 到无穷远点的一条射线. 若 θ 为任意实数，则 $e^{-i\theta}K(e^{i\theta}z) \in S$，且将单位圆映到全平面除去由 $-\frac{1}{4}e^{-i\theta}$ 到无穷远点的一条射线. 当 θ 固定时，这样的函数称为 Koebe 函数的一个**旋转**.

与函数族 S 相紧密关联的是函数族 Σ，它是由在单位圆外 $\Delta = \{z \in \mathbf{C}: |z| > 1\}$ 的亚纯单叶函数

$$g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots \qquad (1.1.3)$$

的全体所组成，也就是由在单位圆外单叶，除去无穷远点是有残数为 1 的极点外是正则的，这样的函数 (1.1.3) 的全体所组成．显然，Σ 也是正规族。

如果当 $z\in\Delta$ 时，$g(z)\neq 0$，$g(z)\in\Sigma$，这样的 $g(z)$ 的全体组成函数族 Σ'．显然，Σ 中的任何函数只要作适当的变换，均可成为 Σ' 中的函数。

若 $f\in S$，则

$$g(z)=\left\{f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}^{-1}=z-a_2+(a_2^2-a_3)z^{-1}+\cdots \qquad (1.1.4)$$

是属于 Σ'．反之，Σ' 中的一个函数 g，也可用上述变换得到 $f\in S$，所以上述变换是将 S 中的函数与 Σ' 中的函数建立起一一对应的变换。

若 $g\in\Sigma$，且 g 将 $|z|>1$ 映为全平面除去一个二维 Lebesgue 测度为零的集合．这样函数的全体记作 $\tilde{\Sigma}$。

以下这些定理是古典的，但十分重要．

定理 1.1.1 (Gronwall 面积原理)．若由 (1.1.3) 所定义的 $g(z)\in\Sigma$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\leqslant 1, \qquad (1.1.5)$$

等号成立当且仅当 $g\in\tilde{\Sigma}$。

证：若 E 为 g 的像不取的点的集合．C_r 为由 $g(z)$ 映照 $|z|=r$ $(r>1)$ 的像．由于 g 为单叶，故 C_r 为一简单封闭曲线，它包有区域 E_r，显然 $E_r\supset E$．由 Green 定理，E_r 的面积为

$$A_r=\frac{1}{2i}\int_{C_r}\bar{w}dw=\frac{1}{2i}\int_{|z|=r}\overline{g(z)}g'(z)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{re^{-i\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_nr^{-n}e^{in\theta}\right\}$$

$$\cdot\left\{1-\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu b_\nu r^{-\nu-1}e^{-i(\nu+1)\theta}\right\}re^{i\theta}d\theta$$

$$= \pi\left\{r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}\right\}, \quad r > 1.$$

令 $r \to 1$，则 A_r 趋于 E 的外测度

$$m(E) = \pi\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right\}.$$

由于 $m(E) \geqslant 0$，故得定理.

这个定理是 1914 年 T. H. Gronwall 证明的. 证明虽然简单，却是一系列古典而重要的结果的开端. 更重要的是：证明的方法是从几何上考虑面积大于或等于零来导出函数本身的性质，这种方法称为面积原理. 这是几何函数论的主要方法之一. 后来有很大的发展，得到了很多重要的结果. 在第三章中还要进一步讨论. Н. А. Лебедев（参看 Н. А. Лебедев [1]）的书，就是专门讲这个方法的.

由这个定理可推出一系列重要的结果.

系 1.1.1. 若 $g \in \Sigma$，则 $|b_1| \leqslant 1$. 等号成立当且仅当

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}, \quad |b_1| = 1.$$

这函数将 Δ 映成补是长度为 4 的线段的像.

证明是显然的.

定理 1.1.2 (Bieberbach 定理). 若由(1.1.1)所定义的 $f \in S$，则 $|a_2| \leqslant 2$. 等号成立当且仅当 f 为由(1.1.2)所定义的 Koebe 函数及其旋转.

证： 由于 $f \in S$，故

$$g(z) = \left\{f\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} = z - \frac{a_2}{2}z^{-1} + \cdots \in \Sigma,$$

由系 1.1.1，得到 $|a_2| \leqslant 2$，等号成立当且仅当 $g(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z}$，由此可得 $f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2} = e^{-i\theta}K(e^{i\theta}z)$，即为 Koebe 函数的旋转.

定理 1.1.2 是 L. Bieberbach 于 1916 年证明的，也是他提出 Bieberbach 猜想的出发点。

利用 Bieberbach 定理，可推出

定理 1.1.3 (Koebe $\frac{1}{4}$ 定理). 每个属于函数族 S 的函数 f 的像，一定包有圆 $\left\{\omega\in\mathbb{C}:|\omega|<\frac{1}{4}\right\}$.

证：若 $f\in S$，不取值 $\omega\in\mathbb{C}$，则

$$g(z)=\frac{\omega f(z)}{\omega-f(z)}=z+\left(a_2+\frac{1}{\omega}\right)z^2+\cdots\in S.$$

由定理 1.1.2，得到$\left|a_2+\frac{1}{\omega}\right|\leqslant 2$，但 $|a_2|\leqslant 2$，故 $\left|\frac{1}{\omega}\right|\leqslant 4$，即 $|\omega|\geqslant\frac{1}{4}$，故 f 取不到的值必须在 $|\omega|<\frac{1}{4}$ 之外。

Koebe 函数及其旋转取不到一点，其模等于 $\frac{1}{4}$，而在 S 中只有这个函数具有此性质，也就是 S 中的其他函数的像都包有以原点为中心、半径稍大于 $\frac{1}{4}$ 的圆。

作为 Bieberbach 定理的另一个推论为

定理 1.1.4. 若 $f\in S$，则

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leqslant\frac{4r}{1-r^2},\quad |z|=r<1 \tag{1.1.6}$$

成立。

证：已知 $f\in S$，固定 $\zeta\in D$，应用 Möbius 变换，则

$$F(z)=\frac{f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right)-f(z)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)}=z+A_2(\zeta)z^2+\cdots\in S. \tag{1.1.7}$$

直接计算可得

$$A_2(\zeta)=\frac{1}{2}\left\{(1-|\zeta|^2)\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-2\bar{\zeta}\right\},$$

由 Bieberbach 定理，$|A_2(\zeta)| \leqslant 2$。经过简单的计算，以 z 替代 ζ，即得 (1.1.6)。

也容易看到 Koebe 函数及其旋转使(1.1.6)等号成立。

从定理 1.1.4，可得如下的

定理 1.1.5 (偏差定理). 若 $f \in S$，则

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1 \qquad (1.1.8)$$

成立。当 $z \neq 0$，$z \in D$ 时，上式等号成立，当且仅当 f 为 Koebe 函数及其旋转。

证：由(1.1.6)，立得

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leqslant \operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \leqslant \frac{2r^2+4r}{1-r^2}. \qquad (1.1.6')$$

由于 $f'(z) \neq 0$，$f'(0) = 1$，故可选 $\log f'(z)$ 的一个单值的分支，使得 $\log f'(z)|_{z=0} = 0$。但是

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = r\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\{\log f'(z)\}, \quad z = re^{i\theta},$$

故得

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial r} \log|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{2r+4}{1-r^2}.$$

固定 θ，上式对 r 从 0 到 R 积分。于是就有

$$\log\frac{1-R}{(1+R)^3} \leqslant \log|f'(Re^{i\theta})| \leqslant \log\frac{1+R}{(1-R)^3},$$

由此得(1.1.8)。

若 $f(z)$ 为由(1.1.2)所定义的 Koebe 函数及其旋转，则一定有一点使(1.1.8)中等号成立。反之，若 (1.1.8) 中等号成立，则由(1.1.6')中，消去 r，然后再取 $r = 0$，就有

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\frac{f''(0)}{f'(0)}\right) = \pm 4.$$

由此导出 $|a_2| = 2$。由定理 1.1.2，f 必须是 Koebe 函数及其旋转。

定理 1.1.6 (增长定理). 若 $f \in S$，则

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1. \tag{1.1.9}$$

成立. 当 $z \neq 0$, $z \in D$ 时, 上式等号成立当且仅当 $f(z)$ 为 Koebe 函数及其旋转.

证: 若 $f \in S$, $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, 由于 $f(0) = 0$, 所以 $f(z) = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho$, 于是由偏差定理,

$$|f(z)| \leqslant \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \leqslant \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

这就给出了(1.1.9)的右边不等式. 再来证 (1.1.9) 的左边不等式. 若 $|f(z)| \geqslant \frac{1}{4}$, 则由于当 $0 < r < 1$ 时, $\frac{r}{(1+r)^2} < \frac{1}{4}$ 成立, 故不等式显然成立. 若 $|f(z)| < \frac{1}{4}$, 则由定理 1.1.3, 由 0 到 $f(z)$ 的线段整个在 f 的像中. 若 C 为 D 中这个线段的逆像, 则 C 为由 0 到 z 的一条简单曲线, 于是 $f(z) = \int_C f'(\zeta) d\zeta$ 而 $f'(\zeta) d\zeta$ 在 C 上保持一个方向, 故由偏差定理

$$|f(z)| = \int_C |f'(\zeta)||d\zeta| \geqslant \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1+r)^2},$$

等号成立, 当且仅当 (1.1.8) 等号成立, 故 f 为 Koebe 函数及其旋转.

关于 $|f'(z)|$ 及 $|f(z)|$ 的估计, 还有很多进一步深刻的结果, 例如 Г. М. Голузин (G. M. Goluzin) 证明:

$$|f(z)| + |f(-z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{r}{(1+r)^2},$$

及

$$|f'(z)| + |f'(-z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} + \frac{1-r}{(1+r)^3}$$

等, 见 Г. М. Голузин[1].

在证明定理 1.1.5 时, 用到了定理 1.1.4 的实部, 如果用虚部, 是不是能得到 $|\arg f'(z)|$ 的估计? 当然可以得到一个估计, 但

不精确．精确的估计是由 Г. М. Голузин 于 1936 年应用 Löwner 方法得到的，见 Г. М. Голузин[2]．

定理 1.1.7 (Gronwall 不等式)．若 $f\in S$，则

$$\frac{1-r}{1+r}\leqslant\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+r}{1-r},\quad |z|=r<1 \qquad (1.1.10)$$

成立．对每个 $z\neq 0$，$z\in D$，上式等号成立当且仅当 $f(z)$ 为 Koebe 函数及其旋转．

证：在(1.1.7)中取 $z=-\zeta$，应用定理 1.1.6，得

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2}\leqslant|F(-\zeta)|=\left|\frac{-f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(-\zeta)}\right|$$

$$\leqslant\frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2},$$

以 ζ 替代 $-\zeta$，即得

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}\leqslant\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right|\leqslant\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|},$$

此即(1.1.10)．

当 $f(z)$ 为 Koebe 函数及其旋转，由于 $\dfrac{zK'(z)}{K(z)}=\dfrac{1+z}{1-z}$，故(1.1.10)一定在某点使等号成立．反之，若(1.1.10)等号成立，不妨只讨论一边，如(1.1.10)的左边不等式等号成立，则显然

$$|F(-\zeta)|=\frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2},$$

于是 $F(z)=\dfrac{z}{(1+e^{i\varphi}z)^2}$，$e^{i\varphi}=\zeta/|\zeta|$．令 $\omega=\dfrac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}$，

$G(\omega)=F\left(\dfrac{\omega-\zeta}{1-\bar{\zeta}\omega}\right)$，则由直接计算可得 $f(\omega)$ 为常数乘上 $G(\omega)-G(0)=\dfrac{(1+|\zeta|)^2}{1-|\zeta|}\cdot\dfrac{\omega}{(1+e^{-i\varphi}\omega)^2}$，即 f 为 Koebe 函数的一个旋转．同样可证 (1.1.10) 的右边不等式等号成立的情形也是可以导出 f 为 Koebe 函数的一个旋转．关于 Gronwall 不等式进一步的讨论见龚昇[1]．

§1.2. Bieberbach 猜想

1916 年 Bieberbach 证明了 $|a_2| \leqslant 2$ 之后，就作了如下的猜想 (L. Bieberbach [1])：

Bieberbach 猜想 对每个形如(1.1.1)的函数 $f \in S$，$|a_n| \leqslant n$ 对 $n = 2, 3, \cdots$都成立。等号成立当且仅当 $f(z)$ 为 Koebe 函数及其旋转。

1923 年 K. Löwner 创造了参数表示法，证明了 $|a_3| \leqslant 3$ (Löwner [1])，这个方法是后来 L. de Branges 证明 Bieberbach 猜想的重要基础之一，也是几何函数论中的主要方法之一，应用这个方法，可以得到一系列重要的结果，这将于下一章中作详细介绍。

证明了 $|a_3| \leqslant 3$ 之后，很长时间没有进展，过了三十二年，到 1955 年，Garabedian 与 Schiffer 应用变分法证明了 $|a_4| \leqslant 4$ (P. R. Garabedian 与 M. Schiffer [1])。这个证明冗长而复杂。但到了 1960 年，Z. Charzynski 与 M. Schiffer[1] 用 Grunsky 不等式证明了 $|a_4| \leqslant 4$，方法出人意料的简单。于是 Grunsky 不等式就引起人们的重视。在第三章中仔细介绍它之前，先来叙述这个重要的不等式。

若 $g \in \Sigma$，则

$$\log \frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} z^{-k} \zeta^{-n}, |z| > 1, |\zeta| > 1 \tag{1.2.1}$$

在 $|z| > 1$，$|\zeta| > 1$ 中解析，且有

Grunsky 不等式 对每个正整数 N，任意 N 个复数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$，就有

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{nk} \lambda_n \lambda_k \right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |\lambda_n|^2. \tag{1.2.2}$$

这个不等式叫做弱 Grunsky 不等式。与之等价的有强 Grunsky 不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\sum_{n=1}^{N} \gamma_{nk}\lambda_n\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}|\lambda_n|^2. \tag{1.2.3}$$

与之等价的还有广义的弱 Grunsky 不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_{nk}\lambda_n\mu_k\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}|\lambda_n|^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}|\mu_k|^2 \tag{1.2.4}$$

这里 $\mu_1, \cdots, \mu_N$ 为任意N个复数.

公式(1.2.2),(1.2.3)及(1.2.4)的证明及相互等价将在 §3.1 中给出。

1968 年 Pederson (R. N. Pederson [1]) 与 Ozawa (M. Ozawa [1]) 继续沿用 Grunsky 不等式的方法，分别证明了 $|a_6| \leqslant 6$. 这将在第三章中给出它的证明，但是按照龚昇[2]简化了 Ozawa 的证明来叙述的。

Grunsky 不等式有众多的应用，例如，由(1.2.4)，立即可得

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{nk}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i z_i^{-k}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\zeta_j^{-n}\right|^2$$
$$\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{N}\lambda_i z_i^{-k}\right|^2\right\}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{N}\mu_j\zeta_j^{-n}\right|^2\right\}.$$

这里 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N, \mu_1, \cdots, \mu_N$ 为 $2N$ 个任意复数，$z_1, \cdots, z_N, \zeta_1, \cdots, \zeta_N$ 为 $2N$ 个单位圆外的点. 但这个式子就是

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\mu_j\log\frac{g(z_i)-g(\zeta_j)}{z_i-\zeta_j}\right|^2$$
$$\leqslant\left\{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\bar{\lambda}_j\log\left(1-\frac{1}{z_i\bar{z}_j}\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu_i\bar{\mu}_j\log\left(1-\frac{1}{\zeta_i\bar{\zeta}_j}\right)\right\} \tag{1.2.5}$$

至于 $|a_5| \leqslant 5$ 的证明更为困难，要用到 Grunsky 不等式的推广形式 Garabedian-Schiffer 不等式来证明之. 在本书中就不作介绍了. 可参见 Pederson-Schiffer [1]. 直到 de Branges 证明 Bieberbach 猜想之前，人们只能证明 $|a_n| \leqslant n$ 当 $n \leqslant 6$ 时成立。

在 de Branges 证明 Bieberbach 猜想之前，人们早已知道对于 S 中的一些特殊函数类，猜想是成立的．这里有如下的这些函数类

1）若 $f\in S$，且其展开式 (1.1.1) 中的各个系数 a_n 全是实的，那末 Bieberbach 猜想是成立的．这是 1931 年由 Rogosinski[1]，Dieudonné[1] 及 Szasz[1] 独立证明

证：由于 $f\in S$，故当 $r<1$，$0<\theta<\pi$ 时，

$$f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n(e^{in\theta}-e^{-in\theta})$$

$$=2i\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\theta\neq 0$$

由于 $\sin\theta\neq 0$，当 $0<\theta<\pi$ 时；故当 $0<\theta<\pi$ 时，

$$p(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\theta\sin\theta\neq 0.$$

由于 a_n 全是实数，故 $p(\theta)$ 在 $0<\theta<\pi$ 是实的且是不等于零的连续函数．由于 $p(-\theta)=p(\theta)$，故对于所有的 θ 值，或是 $p(\theta)\geqslant 0$ 或是 $p(\theta)\leqslant 0$．而

$$p(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n[\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta]$$

$$=\frac{r}{2}\left[1+a_2r\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_{n+1}-\frac{a_{n-1}}{r^2}\right)r^n\cos n\theta\right]\cdot$$

于是 $\int_0^{2\pi}p(\theta)d\theta=\pi r>0$，故 $p(\theta)\geqslant 0$ 当 $0\leqslant\theta<2\pi$．但是 $1\pm\cos n\theta\geqslant 0$，于是有

$$\theta\leqslant\frac{2}{\pi r}\int_0^{2\pi}p(\theta)(1\pm\cos n\theta)d\theta=2\pm\left(a_{n+1}-\frac{a_{n-1}}{r^2}\right)r^n,\ n>2.$$

这就得到 $\left|a_{n+1}-\frac{a_{n-1}}{r^2}\right|r^n\leqslant 2$．让 r 趋于 1，这成为 $|a_{n+1}-a_{n-1}|\leqslant 2$．而我们已知 $a_1=1$，$|a_2|\leqslant 2$，所以立即推出 $|a_n|\leqslant n$，当 $n=2,3,\cdots$ 时都成立．

2）若 $f\in S$，且 f 将单位圆 $|z|<1$ 映为星像区域，那末

Bieberbach 猜想是成立的. 这是 1920 年由 Nevanlinna 所证明的 (R. Nevanlinna [1]).

所谓**星像区域**是这样的区域,由原点出发的任何射线,只交边界于一点。

证明分成四步.

第一步先证: 若 $f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$ 在单位圆 $|z| < 1$ 中具有正的实部且正则,那末

$$|c_n| \leqslant 2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

成立。等号成立限于函数 $f_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

证: 若 $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$, 当 $|z| < 1$, 则 $g(z) = \dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}$ 满足 $|g(z)| \leqslant 1$. 于是 $f(z) = \dfrac{1+g(z)}{1-g(z)}$, $|g(z)| \leqslant 1$. 因此 $f'(0) = 2g'(0)$, 由 Schwarz 引理 $|g'(0)| \leqslant 1$, 故 $|c_1| \leqslant 2$ 成立。先考虑 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant 1$ 中正则,由残数定理

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} f(z)\left[2 - z^n - \frac{1}{z^n}\right]\frac{dz}{z} = 2 - c_n.$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则 $I = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$. 于是

$$\operatorname{Re}\{2 - c_n\} = \operatorname{Re} I = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{f(e^{i\theta})\}\sin^2\frac{n\theta}{2}\,d\theta.$$

由于 $\operatorname{Re}\{f(e^{i\theta})\} \geqslant 0$, 故 $\operatorname{Re}\{2 - c_n\} \geqslant 0$, 即 $\operatorname{Re} c_n \leqslant 2$. 由于 $\operatorname{Re}\{f(e^{it}z)\} \geqslant 0$, 故 $\operatorname{Re}\{e^{int}c_n\} \leqslant 2$ 当 $0 \leqslant t < 2\pi$ 时也成立. 取 $nt + \arg c_n = 0$, 即得 $|c_n| \leqslant 2$ 成立.

由于 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中正则,故 $f_1(z) = f(\rho t)$, $0 < \rho < 1$ 在 $|z| \leqslant 1$ 中正则,于是 $\rho^n |c_n| \leqslant 2$. 让 $\rho \to 1$, 即得对 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中正则,具有正实部时, $|c_n| \leqslant 2$ 也成立.

第二步再证: 若 $f(z)$ 是星像函数, 即 $f(z)$ 将 $|z| < 1$ 映为星像区域,那末 $f(z)$ 将 $|z| < \rho\,(\rho < 1)$ 映为星像区域.

证: 若 $f(z)$ 映 $|z| < 1$ 为 R, 则对任意选定的 t, $0 < t < 1$,

$tf(z)$ 仍在 R 内。于是存在一个在 $|z|<1$ 中正则，且 $|w(z)|\geqslant 1$ 的函数 $w(z)$，使得 $tf(z)=f[w(z)]$。显然 $w(0)=0$，故由 Schwarz 引理 $|w(z)|\leqslant|z|$。取 ρ，$0<\rho<1$，考虑函数 $g(z)=f(\rho z)$。于是

$$tg(z)=tf(\rho z)=f[w(\rho z)]=f\left[\rho\frac{w(\rho z)}{\rho}\right]$$

显然 $w_1(z)=\dfrac{w(\rho z)}{\rho}$ 满足 $|w_1(z)|\leqslant|z|$。故有 $tg(z)=g[w_1(z)]$，而 $|w_1(z)|\leqslant|z|$，$0<t<1$。因此 $g(z)$ 也是星像函数，此即 $f(z)$ 将 $|z|<\rho$ 映为星像区域。

第三步再证：函数 $w=f(z)$ 映 $|z|<1$ 为星像区域的充要条件为：对任意 z，$|z|<1$，

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqslant 0 \tag{1.2.6}$$

成立。

证：由第二步所证，$f(z)$ 将 $|z|\leqslant\rho$，$\rho<1$ 映为星像区域。故映 $|z|=\rho$ 为星像曲线。于是，当 $z=\rho e^{i\theta}$ 沿着 $|z|=\rho$ 的正方向走动时，$f(z)=Re^{i\phi}$ 也必须沿着同一个方向变动。否则由原点出发的射线交这条曲线于二点或更多点。于是

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(z)\}=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\geqslant 0.$$

反之，如上述条件满足，则此曲线为星像曲线。但是 $\log f(z)=\log R+i\phi$，而上述条件就是 $\operatorname{Im}\left\{\dfrac{\partial\log f(z)}{\partial\theta}\right\}\geqslant 0$。固定 ρ，

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=i\rho e^{i\theta}\frac{d}{dz}=iz\frac{d}{dz},$$

因此，$\operatorname{Im}\left\{iz\dfrac{d}{dz}\log f(z)\right\}=\operatorname{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqslant 0$，这就证明了 (1.2.6)。

最后来证明：若 $f\in S$，且 f 映 $|z|<1$ 为星像区域，则 Bieberbach 猜想成立。