

湍流

是勋刚 主编



天津大学出版社

52.74

42

31

DG 69 / 3210

湍 流

是勋刚 主编

天津大学出版社

4015957

(津)新登字 012 号

内 容 提 要

本书是由在本领域内国内著名的八位专家集体编写而成的一本湍流专著。内容包括经典的流动稳定性理论、湍流统计理论与湍流实验技术,主要为工程应用服务的湍流模式理论与湍流边界层计算,首重反映近代进展的湍流拟序结构、湍流的大涡模拟与直接数值模拟以及混沌理论等。

本书特点是以基本理论为主,兼顾工程应用;以系统讲授湍流的经典理论为主,适当反映湍流研究的最新进展;全书有很强的系统性、逻辑性,同时各篇之间又有一定的相对独立性,很适合于读者自学。

本书适合于在力学、国防、机械、化工、水利、环境……等与湍流有关的专业领域,具备一定的数学与流体力学基础知识的高年级大学生、研究生、教师与科技工作者为教材或参考书之用。

湍 流

是勋刚 主编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省永清县第一胶印厂

新华书店天津发行所发行

*

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:16.5 字数:454 千字

1994 年 3 月第一版 1994 年 3 月第一次印刷

印数: 1—3000

ISBN 7-5618-0566-7

O·56

定价:18.00 元

前 言

毋庸讳言,湍流是流体力学中有名的难题。像湍流这样,虽经包括许多伟大学者在内的长达 100 多年的顽强努力,而其基本机理至今仍未弄清,这在整个科学史上也是不多见的。尽管如此,世界各科学大国的政府仍坚持将湍流的研究列为需要最优先发展的若干重大基础研究课题之一。这首先是因为决策者们都认识到湍流广泛出现在自然界与工程技术各领域。未来在湍流基础研究上取得的进展,有可能为国防与国民经济的广泛领域带来难以估量的巨大收益。例如,提高各种运输工具的速度又大量节约能源消耗,提高各种流体机械的效率;改善大气与水体的环境质量,降低流体动力学噪声,防止因与流体相互作用而引发的结构振动乃至破坏,加快热交换、物质掺混与化学反应的速度……等。不仅如此,由于湍流的基本特征是随机性,或者更一般地说是非线性,而随机性或非线性又广泛出现在社会科学与自然科学的各个领域,但人们对随机的或非线性现象的了解还远不如人们对确定性现象或线性系统的研究那样深入,所以对湍流研究的突破也能从认识论上帮助人们了解其它非线性现象,从而带动其它各相关学科的发展。

正是由于湍流在应用前景上与学术上有其深远意义,它才不断吸引着大批有志气有抱负的科学工作者挺身而出,不为它的困难所吓倒,而投身到湍流研究中来。其中一部分人有志于从事湍流基本机理的研究,而更多的人将以湍流的应用研究为主,他们都迫切希望学习湍流的知识。但是由于经前人 100 多年的努力,已建立的许多为湍流所特有的概念和方法,对初学者来说较难于接受和理解,且累积的有关湍流的文献数量十分庞大,而又缺少一本系统的教材或专著以适合于初学者自学和入门。针对这种情况,国家教委工程力学专业教材委员会于 1988 年在哈尔滨组织了一次湍流与流动稳定性的暑期讲习班。聘请了 6 位国内著名专家到班上讲课。为配合讲课需要,当时编写了名为“湍流与流动稳定性讲义”的书面材料。“讲义”一出世,就受到讲习班学员们与各方面的热烈欢迎与高度评价,前来求购或拷贝者络绎不绝。为满足广大读者的要求,决定在原“讲义”的基础上,请原编著者适当增补修订,以“湍流”为书名正式出版。

本书以已掌握流体力学与高等数学基本知识的广大科技工作者、教师与研究生为主要对象。本书在内容选取上以基本理论为主,适当兼顾湍流的工程应用,书中大部分篇幅都是属于基本理论的。无论对于从事湍流基本理论研究还是应用研究的读者,掌握一定的基本理论知识都是很必要的。书中也包括了湍流模式理论与湍流边界层计算二篇,占据了不小的篇幅,就是考虑到读者中有相当大一部分人将从事湍流的工程应用研究,尤其以边界层型的湍流计算居多。本书首先是为满足初学者的入门需要而写的,因此全书用较大的篇幅来讲授基本概念与经典理论,同时又希望能适当地反映湍流与流动稳定性理论的近代进展,甚至包括部分编著者本人的最新研究成果。尽管主

观愿望如此,可是由于科学的发展很快,而出书又有一定的过程,到本书与读者见面时,不可避免地又有许多新的进展出现而不能包括在本书中。本书在内容组织上的指导思想是全书应有较强的系统性和完整性,各篇的编排首先根据内容本身内在的逻辑性,其次又考虑到具备了一定的基础知识的初学者自学的方便。本书很适于用作研究生课程的教材或参考书。全书在总体上是循序渐进的,但各篇之间又有一定的相对独立性。没有时间通读全书的读者也可根据需要单独挑出某篇来阅读。

本书的编著者分别是:第一篇:周恒,王振东;第二、三、七篇:是勋刚;第四篇:章光华;第五篇:魏中磊;第六篇:张兆顺,王希麟;第八篇:黄永念。

限于我们的学识与水平,书中定会有不少疏误与不当之处,恳请读者多提宝贵意见。

是勋刚

1992年7月15日

目 录

第一篇 流动稳定性理论

一、 引言	(1)
二、 平行流稳定性线性理论	(1)
(一)问题和方程	(1)
(二)O-S 方程的渐近解法	(4)
(三)O-S 方程的数值解法	(9)
(四)平板边界层稳定性问题中的边界条件	(13)
(五)时间模式和空间模式问题	(14)
(六)理论计算与实验结果的比较	(18)
三、 平行流稳定性的非线性理论	(19)
(一)Landau 理论	(19)
(二)能量法	(20)
(三)形状假设理论(Shape assumption)	(22)
(四)弱非线性理论	(24)
(五)分叉理论(Bifurcation)	(29)
(六)平板边界层问题	(31)
(七)关于弱非线性理论的一点注记	(33)
四、 平行流稳定性三维非线性理论	(34)
(一)三维扰动问题	(34)
(二)二次失稳理论	(35)
(三)共振三波理论	(37)
(四)一般共振理论	(38)
(五)直接共振理论	(40)
参考文献	(42)

第二篇 湍流统计理论

一、 引言	(44)
二、 关联函数	(45)
三、 湍谱分析	(53)
(一)一维湍谱分析	(54)
(二)三维湍谱分析	(56)
四、 卡门-豪沃思方程与能谱方程	(64)
五、 均匀各向同性湍流的后期衰变运动	(69)
六、 局部各向同性与局部相似性理论(普适平衡理论)	(71)
七、 含能范围的准平衡假设	(78)
八、 速度概率分布的准高斯型假设	(81)

九、 小结	(82)
参考文献	(83)

第三篇 湍流模式理论

一、 引言	(84)
二、 模拟的原则	(85)
三、 雷诺应力模型(微分模型, RSM)	(85)
(一) 雷诺应力方程与 k 方程的模型	(85)
(二) ϵ 方程的模型	(91)
(三) $\overline{u_i \theta}$ 方程的模型	(93)
四、 代数应力模型($k-\epsilon-A$ 模型, ASM)	(94)
五、 二方程模型(涡粘性模型, $k-\epsilon-E$ 模型)	(95)
六、 一方程模型(k 方程模型)	(97)
七、 双尺度二阶湍流模型	(98)
八、 小结	(99)
参考文献	(101)

第四篇 湍流边界层计算

一、 引言	(102)
二、 平面及轴对称湍流边界层	(103)
(一) 可压缩湍流流动的质量加权平均量方程	(103)
(二) 边界层近似的湍流平均值方程	(107)
(三) 湍流边界层的分层结构和平均速度剖面	(111)
(四) 平面及轴对称湍流边界层计算的积分方法	(118)
(五) 平面及轴对称边界层的湍流模式	(122)
(六) 平面及轴对称边界层的差分方法	(129)
三、 三维湍流边界层	(136)
(一) 三维定常湍流边界层的连续、动量和能量方程	(136)
(二) 三维边界层方程的性质和初始条件的提法	(139)
(三) 三维边界层的湍流特性	(142)
(四) 三维边界层的湍流模式	(144)
(五) 三维边界层的差分方法	(148)
参考文献	(153)

第五篇 湍流实验

一、 引言	(156)
二、 湍流参量的物理意义及其实验结果	(157)
(一) 湍能平衡方程	(158)
(二) 湍流各参量的物理意义	(159)

(三)湍能平衡方程的实验结果.....	(161)
(四)相关函数和谱函数的物理意义及其实验结果.....	(161)
三、湍流实验技术	(165)
(一)热线风速仪.....	(165)
(二)热线数据的数字化分析.....	(171)
(三)湍流测量的进一步举例.....	(174)
(四)条件采样和图象识别技术.....	(180)
(五)流动显示技术.....	(182)
(六)激光测速仪.....	(185)
(七)脉冲式热线风速计.....	(186)
参考文献.....	(189)

第六篇 切变湍流的拟序结构

一、引言	(190)
二、拟序结构的形态	(190)
(一)自由切变湍流中拟序结构的形态.....	(190)
(二)湍流边界层中的拟序结构.....	(194)
三、拟序结构的检测及其特性	(196)
(一)脉动的时空相关和拟序结构的运动学特性.....	(196)
(二)湍流脉动的条件采样.....	(198)
四、拟序运动的理论分析	(202)
(一)拟序相平均和拟序分解.....	(202)
(二)拟序方程.....	(202)
(三)拟序运动的能量转移.....	(203)
(四)平面湍流混合层中拟序运动的能量转移.....	(204)
(五)壁湍流中拟序运动生成的直接共振机制.....	(206)
(六)拟序运动的涡动力学分析.....	(208)
参考文献.....	(211)
附录.....	(212)

第七篇 湍流高级数值模拟

一、引言	(213)
二、大涡模拟	(215)
(一)历史简述.....	(215)
(二)基本思想.....	(215)
(三)滤波.....	(215)
(四)大涡模拟方程与亚格子雷诺应力.....	(217)
(五)亚格子雷诺应力的方程.....	(219)
(六)亚格子尺度模型.....	(220)

(七)初始条件与边界条件.....	(221)
(八)小结.....	(222)
三、 直接数值模拟	(223)
参考文献.....	(230)

第八篇 混沌理论入门

一、 引言	(232)
二、 分叉与产生混沌的途径	(233)
三、 保守系统	(238)
四、 耗散系统	(247)
(一)奇怪吸引子与分形.....	(247)
(二)一维 Logistic 映射	(249)
(三)Lorenz 吸引子	(251)
五、 结束语与展望	(254)
参考文献.....	(255)

第一篇 流动稳定性理论

一、引言

流动稳定性理论作为一个系统的理论,最初是为了解释流动从层流转捩为湍流的机理而形成的。自从雷诺(O. Reynolds)在 1883 年做了著名的圆管转捩实验后,就有人试图用层流失稳来解释转捩的机理。所谓层流失稳的原始概念是:在某一雷诺数下,存在着 Navier-Stokes 方程的一个定常或周期性的层流解,这个层流解一般是足够光滑的。如果由于某种原因,在初始时刻,实际流动偏离了这个层流解,流动稳定性理论就要研究这个初始偏离量随后的演化情况。如果各种不同的偏离量最终都衰减了,则流动最终恢复到原来的层流,我们就说该层流运动是稳定的;反之,若流动不恢复原来的层流,它或转换成另一种层流,或转捩为湍流,我们就说该层流是不稳定的。

流动稳定性理论的发展经历了一个很长的过程,一直到现在,也还不能完全解释从层流到湍流的转捩机理。但是在其发展过程中,提出了不少研究的方法及理论,其作用实际并不限于转捩问题。实际上,自然界和工程技术中的很多问题,或者本身就牵涉到流动稳定性问题(在更广泛的意义上),或者可以利用流动稳定性理论中的一些概念和方法。甚至在完全发展了的湍流研究中,有些重要的现象也可以用流动稳定性理论来解释。因此,流动稳定性的研究,早已不是一个仅有理论价值的纯学术问题。它的研究,对了解自然现象,解决工程技术问题,都可以起到重要的作用。

二、平行流稳定性线性理论

(一)问题和方程

平行流是指流动时流线相互平行的流动,如平面 Poiseuille 流,平面 Couette 流,圆管中的 Hagen-Poiseuille 流等。有些流动虽不是严格的平行流,如平板边界层内的流动、射流、自由剪切流等,但它们的流线是接近于平行的,在一级近似时,往往可以看成是平行的,因此也可以归到这一类流动中。

Reynolds 早在 1883 年就进行了有名的圆管流动状态实验。他发现当 Reynolds 数 Re 小时,流动可以保持层流,而当 Re 大时(例如大于 2000),流动就将转变为湍流,而区分这两种流动的 Re 数就称为临界 Reynolds 数,写为 Re_{cr} 。后来人们进行的大量实验表明临界雷诺数并不是一个固定的常数。它依赖进行实验时的扰动大小。如果所受扰动小, Re_{cr} 数就大,已有人做实验,其 Re_{cr} 可达 10^5 。反之,若所受扰动大,则 Re_{cr} 较小,但 Re_{cr} 有一下界,约为 2000。当 $Re < 2000$ 时,不管外部扰动有多大,管内流动总保持稳定的层流状态。对于平面 Poiseuille 流做的实验,也发现有临界 Reynolds 数,其值也与扰动大小有关。

转捩的定义是在空间、时间以及某雷诺数范围内,层流变为湍流。由上所述,转捩与扰动大小有关,因此自然地想到,转捩是扰动放大导致流动失稳的结果。这就产生了作为稳定性理论的基础想法:从一种流动形态转变为另一种形态,是原来的流动里所出现的扰动自然演化的结果,当然,进一

步地考虑可以预料,这种转变的发生将依赖于所出现扰动的强度和结构。

线性稳定性理论选取了一个较小的目标:确定一个流动在什么条件下对无穷小的扰动而言是稳定或者是不稳定的。线性稳定性理论又称为小扰动线性化理论,其基本处理方法是:假定 u_0 是其基本流动的解,对此加上一个小扰动量 u' ,将 $u_0 + u'$ 代入流动满足的方程组,去掉 u_0 满足方程组的那些项,只剩下 u' 满足的扰动方程,再略去 u' 及其导数二阶以上的小量,就得到 u' 的线性偏微分方程。然后再讨论在什么条件下 u' 随时间和空间增大(u_0 不稳定),还是随之衰减(u_0 稳定)。下面就以平面 Poiseuille 流为例,来说明这一理论。

我们考虑两块无限大平行平板间的二维层流情况,设平板相距为 $2b$,中心最大速为 U_c ,以 b , U_c , b/U_c 作为参考长度、参考速度和参考时间进行无量纲化,则未受扰动的层流基本解为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= 1 - y^2, \bar{v} = 0, \bar{w} = 0 \\ \bar{p} &= -\frac{2x}{Re} + c \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

这里 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 分别是 x, y, z 方向的速度分量, $\bar{p}$ 是压力, $Re = U_c b / \nu$ 是雷诺数, x, y 分别是流动方向及垂直于平板方向的无量纲坐标, z 为横向坐标。

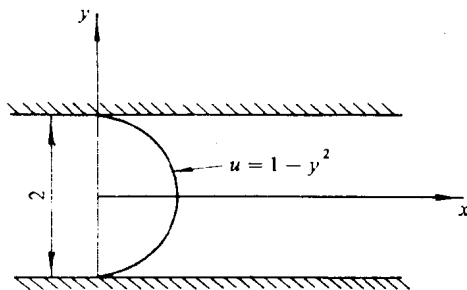


图 1.2.1 平面 Poiseuille 流的速度分布

无量纲化的 N-S 方程及连续方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

其中 ∇ 是梯度算子, ∇^2 是 Laplace 算子, $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$ 是速度矢量。边界条件是 $y = \pm 1$ 时 $\mathbf{u} = 0$ 。

式(1.2.1)显然是式(1.2.2)的一个解。现设在层流式(1.2.1)上加小扰动 u', v', w', p' , 即设

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad p = \bar{p} + p' \quad (1.2.3)$$

则代入式(1.2.2)后,略去二阶以上的小量,就得到扰动量 $\mathbf{u}' = \{u', v', w'\}^T$ 及 p' 满足的方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + v' \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dy} + \nabla p' &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}' \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

式中 $\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}^T$, 边界条件为

$$y = \pm 1 \text{ 时, } \mathbf{u}' = 0 \quad (1.2.5)$$

研究稳定性问题就是要看满足方程(1.2.4)及边界条件的解随时间变化的情况。如果当 $t \rightarrow \infty$ 时,所有可能的解都趋近于零,则原来的层流就是稳定的,而只要有一个解不满足这一条件,则原来的层流就是不稳定的。

由于方程(1.2.4)的系数仅与 y 有关,所以可以设

$$\begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}(y) \\ \hat{p}(y) \end{Bmatrix} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (1.2.6)$$

边界条件为

$$y = \pm 1 \text{ 时, } \hat{u} = 0 \quad (1.2.7)$$

其中 α, β 是波数, ω 是频率。通常 β 取为实数, 表示流动在 z 向是周期性的, 而 α 和 ω 则视问题的性质而定。如 α 取实数, 称时间模式问题, 着眼点是看扰动随时间的演化; 如 ω 取实数, 称空间模式, 着眼点是看扰动随空间的演化。有时二者都可能是复数。在具体的问题中, 解自然应该是实函数, 因而实际上应取式 (1.2.6) 的实数部分或虚数部分。又式 (1.2.6) 代表的是一类行进波, 波速为 ω_r/α_r , 这里 ω_r 及 α_r 分别是 ω 及 α 的实数部分, 这类行进波常称为 Tollmien-Schlichting 波, 简称为 T-S 波。以下暂以时间模式问题为例讨论。

将式 (1.2.6) 代入式 (1.2.4), 可得下列常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} L\hat{u} &= Re(D\bar{u})\hat{v} + i\alpha Re\hat{p} \\ L\hat{v} &= ReD\hat{p} \\ L\hat{w} &= i\beta Re\hat{p} \\ i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}) + D\hat{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

式中 $L \equiv \{D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - i\alpha R(\bar{u} - c)\}$, $D \equiv \frac{d}{dy}$, $c = \omega/\alpha$, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ 是 $\hat{u}$ 的 3 个分量。

若 $\beta = 0, \hat{w} = 0$, 则可得关于二维扰动的方程组

$$\left. \begin{aligned} L_0\hat{u} &= Re(D\bar{u})\hat{v} + i\alpha Re\hat{p} \\ L_0\hat{v} &= ReD\hat{p} \\ i\alpha\hat{u} + D\hat{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

式中 $L_0 \equiv \{D^2 - \alpha^2 - i\alpha R(\bar{u} - \omega/\alpha)\}$ 。

Squire 在 1933 年找到了一种变换, 可以将三维问题的方程 (1.2.8) 化为一个等价的二维形式的方程, 这种变换称 Squire 变换, 具体形式如下

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 &= \alpha\hat{u} + \beta\hat{w}, & v_1 &= \hat{v}, & p_1 Re_1 &= \hat{p} Re \\ \alpha_1 Re_1 &= \alpha Re, & \omega_1/\alpha_1 &= \omega/\alpha, & \alpha_1^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

由此自 (1.2.8) 式可得

$$\left. \begin{aligned} L_{01}u_1 &= Re_1(D\bar{u})v_1 + i\alpha_1 Re_1 p_1 \\ L_{01}v_1 &= Re_1(Dp_1) \\ i\alpha_1 u_1 + Dv_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

其中 $L_{01} \equiv \{D^2 - \alpha_1^2 - i\alpha_1 Re_1(\bar{u} - \omega_1/\alpha_1)\}$ 。

显然式 (1.2.11) 与式 (1.2.9) 形式上是相同的, 但参数值不同。由于 $\alpha_1 \geq \alpha$, 故 $Re_1 \leq Re$ 。失稳总是在雷诺数大时才发生, 因此二维扰动的雷诺数将先达到失稳的临界值。即从找最小的临界雷诺数来看, 研究二维情况就可以了, 但在真正求三维问题的解时, 则在求解式 (1.2.11) 后, 还应再解一方程

$$L(\beta\hat{u} - \alpha\hat{w}) = \beta Re(D\bar{u})v_1 \equiv \beta Re(D\bar{u})\hat{v}$$

然后就可由解出的 v_1, u_1 及 $(\beta \hat{u} - \alpha \hat{w})$ 求得 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ 。

从式(1.2.9)的第1,2两式消去 $\hat{p}$, 并利用第3式消去 $\hat{u}$, 就得到关于 $\hat{v}$ 的一个四阶常微分方程

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \hat{v} = i\alpha Re \left\{ \left(\bar{u} - \frac{\omega}{\alpha} \right) (D^2 - \alpha^2) - D^2 \bar{u} \right\} \hat{v} \quad (1.2.12)$$

边界条件是

$$y = \pm 1 \text{ 时}, \quad \hat{v} = D\hat{v} = 0 \quad (1.2.13)$$

如果我们引入流函数 $\phi(x, y, t)$, 并令

$$\phi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (1.2.14)$$

则 φ 满足的方程和 $\hat{v}$ 一样。形式如(1.2.12)的方程称为 Orr-Sommerfeld 方程, 或简称 O-S 方程。

由于方程(1.2.12)及边界条件(1.2.13)都是齐次的, 要求非零解(零解相当于无扰动), 其参数 α, Re, ω 就必须满足一定的函数关系

$$F(\alpha, Re, \omega) = 0 \quad (1.2.15)$$

称为特征关系。给定了 α, Re , 就可求得复特征值 ω 。当 $\omega_i > 0$ 时, 扰动(1.2.6)的模将增长, 原来的层流就是不稳定的; 当 $\omega_i < 0$ 时, 扰动将衰减, 层流是稳定的; 若 $\omega_i = 0$, 扰动的模不变, 称中性情况。

解决上述特征值问题的实际计算, 经历了一个相当长的时间。O-S 方程的提出是 1908 年, 在计算机未被采用时计算此特征值问题遇到了很大的困难。经 Heisenberg、Tollmien、Schlichting 及林家翘等人的相继努力, 到 1945 年才算形成了严格的理论。以后还不断地有人从事改进和完善的工作, 而且在此基础上, 推动了应用数学一个分支的发展。现在有了计算机, 虽然在实际问题中人们已基本上不用他们发展的解析方法, 但这些方法仍有一定的重要性, 所以我们还是简要地叙述一下。

(二) O-S 方程的渐近解法

1. 无粘性理论

由于失稳通常都在雷诺数很大时发生, 所以先研究 $Re \rightarrow \infty$ 的极限情况。在式(1.2.12)中两端除以 αRe , 然后令 $Re \rightarrow \infty$, 就得下式(以 φ 为未知函数)

$$(\bar{u} - c)(D^2 - \alpha^2)\varphi - (D^2 \bar{u})\varphi = 0$$

或

$$\varphi'' - \alpha^2 \varphi - \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \varphi = 0 \quad (1.2.16)$$

称为 Reyleigh 方程, 式中 $c = \omega/\alpha$, 而边界条件为

$$y = \pm 1, \quad \varphi = 0 \quad (1.2.17)$$

若 c 是复数, 则 φ 也是复数。用 φ 的复共轭 $\bar{\varphi}$ 乘等式两端, 并对 y 自 -1 到 1 积分, 利用分部积分法, 可得

$$\int_{-1}^1 \{ |\varphi|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2 \} dy + \int_{-1}^1 \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} |\varphi|^2 dy = 0 \quad (1.2.18)$$

取其虚部, 得

$$\int_{-1}^1 \frac{c_i \bar{u}'' |\varphi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy = 0 \quad (1.2.19)$$

由此可见, 若 $c_i \neq 0$, 则 $\bar{u}''$ 在 $(-1, 1)$ 区间中必须变号, 即 $\bar{u}$ 在 $(-1, 1)$ 区间必须有拐点。以后将说明, (1.2.16)对应的 $c_i > 0$ 的解, 确实可看成是(1.2.12)的解在 $Re \rightarrow \infty$ 时的极限。而(1.2.16)的对应于

$c_1 < 0$ 的解, 则不能看成是(1. 2. 12)的解在 $Re \rightarrow \infty$ 时的极限。因此, 在(1. 2. 16)中, 只有 $c_1 > 0$ 的情况才有实际意义。而 $c_1 > 0$ 是不稳定性的情况, 因此我们得到, 在无粘性时, 失稳的必要条件是层流流速分布曲线存在拐点。

从另一角度说, 如果速度剖面没有拐点, 则 $\bar{u}''$ 全都同号, 由(1. 2. 19)知 c_1 必定为零。所以对无粘性流体来说, 速度剖面没有拐点是稳定性的充分条件。若粘性只起稳定作用, 则式(1. 2. 1)那样的层流一定是稳定的, 因为它没有拐点。但实际情况不是如此, 这里粘性起着双重作用, 它既能耗散能量, 从而有利于稳定, 同时还有能引起不稳定的作用。

注意方程(1. 2. 16)的阶数比(1. 2. 12)低了两阶, 所以它的解无法满足(1. 2. 13)所要求的 4 个边界条件, 因此仍要回到(1. 2. 12)这一包含粘性因素的方程。

2. O—S 方程的解

本节讨论有粘性的情况。由于从实际考虑, 失稳都是在雷诺数 Re 很大时, 因此, 这里仅就 Re 很大的情况进行讨论。

方程(1. 2. 12)应有 4 个独立的解。我们现在就 Re 很大的情况来寻找这 4 个基本解 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 。

Re 很大时, $1/Re$ 是小参数, 因此可将解展成 $1/Re$ 的级数

$$\varphi(y) = \varphi^{(0)}(y) + \frac{1}{\alpha Re} \varphi^{(1)}(y) + \dots \quad (1. 2. 20)$$

代入(1. 2. 12)得 $\varphi^{(0)}(y)$ 满足的方程

$$(\bar{u} - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - \bar{u}'' \varphi = 0 \quad (1. 2. 21)$$

它正是无粘性时的 Rayleigh 方程(1. 2. 16)。Heisenberg 将 φ 展成一个 α^2 的级数

$$\varphi(y) = (\bar{u} - c)[q_0(y) + \alpha^2 q_1^2(y) + \dots] \quad (1. 2. 22)$$

代入(1. 2. 21), 比较 α 同次项可得

$$q_0 = 1 \quad \text{或} \quad \int (\bar{u} - c)^{-2} dy, \text{ 而} \\ q_{n+1} = \int (\bar{u} - c)^{-2} dy \int (\bar{u} - c)^2 q_n(y) dy \quad (1. 2. 23)$$

用 $\varphi_1(y, \alpha, c)$ 表示 $q_0 = 1$ 的解, $\varphi_2(y, \alpha, c)$ 表示 $q_0 = \int (\bar{u} - c)^{-2} dy$ 的解。积分的上下限为 -1 和 y 。如果 c 是实数, 则可以证明必有 $\bar{u} - c = 0$ 的点, 从而积分(1. 2. 23)将不确定。这时可将 y 理解为一复数, 而将积分路线在 $\bar{u} = c$ 附近改变, 使之绕过该点。林家翘讨论了这一情况, 指明积分路线应从该点下方绕过。

由于方程(1. 2. 21)只是二阶的, 还缺两个解, 另两个解可以由 WKB 法求得, 如下

$$\varphi_3, \varphi_4 = \exp\{\mp \sqrt{\alpha Re Q} [f_0(y) + (\alpha Re)^{1/2} f_1(y) + \dots]\} \quad (1. 2. 24)$$

φ_3 表示 $\sqrt{\alpha Re Q}$ 前取负号之解, φ_4 表示取正号时的解。将(1. 2. 24)代入(1. 2. 12), 比较各项系数可得

$$Q(y) = \int_{y_c}^y \sqrt{i(\bar{u} - c)} dy \\ f_0(y) = (\bar{u} - c)^{-5/4}, \dots \quad (1. 2. 25)$$

y_c 是使 $\bar{u} - c = 0$ 处的坐标。

在 c 取实数时, $\sqrt{i(\bar{u} - c)}$ 在 $\bar{u} - c = 0$ 处有支点, 不是单值的, 这时又有如何选取积分路线的问

题。W. Wasow 证明了积分路径应使在 y 从 -1 到 $+1$ 积分时, Q 的实数部分单调增加, 这再次决定了应从 y_c 的下面绕过。

由于解(1.2.22)实际是无粘性解, 所以它只适用于粘性确实作用很小的区域。但实际上有两处, 粘性是起着显著作用的。一是 $y = \pm 1$ 的附近, 即相当于边界层的地方, 其厚度可以估计如下。作变换

$$y - y_w = \delta \zeta \quad (1.2.26)$$

其中 ζ 是新的坐标, δ 是待定常数, 相当于层厚度。 y_w 是平板所在处, 即 $y_w = \pm 1$ 。这时式(1.2.12)中的未知函数 $\varphi(y)$ 将变为 $V(\zeta)$ 。在 $y = y_w$ 处, 将 $\bar{u} - c, \bar{u}''$ 之值代入式(1.2.12), 它们都是有限值。注意 $D = \frac{1}{\delta} \frac{d}{d\zeta}$, 比较两端最大的项并令其相等, 得

$$\frac{1}{\delta^4} \frac{d^4}{d\zeta^4} V = i\alpha Re \left(\bar{u} - \frac{\omega}{a} \right)_w \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2}{d\zeta^2} V \quad (1.2.27)$$

这里假设 $\alpha Re \rightarrow \infty$ 时, $\delta \rightarrow 0$ 。由式(1.2.27)可得到

$$\text{当 } \alpha Re \rightarrow \infty \text{ 时, } \quad \delta \propto (\alpha Re)^{-1/2} \quad (1.2.28)$$

在这一层中, 方程(1.2.12)就简化为

$$(\alpha Re)^{-1} V'' = - \frac{\omega}{a} V'' \quad (1.2.29)$$

如果我们求中性解, 即 $\omega_i = 0$ 的解, 则前面已提到, 在求解范围内, 总有 $\bar{u} - c = 0$ 之处。在这一点处, 方程(1.2.16)也有奇性, 无粘解无效, 因而在这点附近, 必须考虑粘性, 即用完全的式(1.2.12), 但这一层在 $\alpha Re \rightarrow \infty$ 时也很薄。因此, 若令 y_c 为 $\bar{u} - c = 0$ 的点, 则再作变换

$$y - y_c = \epsilon \eta \quad (1.2.30)$$

$$\varphi(y) \rightarrow \chi(\eta) \quad \frac{d}{dy} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{d\eta}$$

这时式(1.2.12)将变为

$$(\bar{u} - c)(\chi'' - \alpha^2 \epsilon^2 \chi) - \bar{u}'' \epsilon^2 \chi = - \frac{i}{\alpha Re \epsilon^2} (\chi'' - 2\alpha^2 \epsilon^2 \chi'' + \alpha^4 \epsilon^4 \chi) \quad (1.2.31)$$

将 $\bar{u} - c$ 及 $\bar{u}''$ 在点 y_c 处展为 η 的幂级数(对平面 Poiseuille 流, $\bar{u}''$ 是常数。这里假定讨论更一般的情况)

$$\bar{u} - c = \bar{u}'_c(\epsilon \eta) + \frac{1}{2} \bar{u}''_c(\epsilon \eta)^2 + \dots \quad (1.2.32)$$

$$\bar{u}'' = \bar{u}''_c + \bar{u}'''_c(\epsilon \eta) + \dots \quad (1.2.33)$$

代入(1.2.31)并比较两端最大的项, 可得

$$\alpha R \rightarrow \infty \text{ 时 } \epsilon \propto (\alpha R)^{-1/3} \quad (1.2.34)$$

这一粘性不能忽略的层, 称为临界层, 由(1.2.33)和(1.2.28)可见, 临界层比边界层厚。

在临界层附近, 若把解展为 ϵ 的级数, 即

$$\chi(\eta) = \chi^{(0)}(\eta) + \epsilon \chi^{(1)}(\eta) + \epsilon^2 \chi^{(2)}(\eta) + \dots \quad (1.2.35)$$

连同(1.2.32), (1.2.33)一齐代入(1.2.28), 并取 ϵ 的同阶项, 可得

$$\begin{aligned} i\chi^{(0)N} + \bar{u}'_c \eta \chi^{(0)'} &= 0 \\ i\chi^{(1)N} + \bar{u}'_c \eta \chi^{(1)'} &= \bar{u}''_c \left(\chi^{(0)} - \frac{1}{2} \eta^2 \chi^{(0)'} \right) = L_0(\chi) \\ i\chi^{(n)N} + \bar{u}'_c \eta \chi^{(n)'} &= L_{n-1}(\chi) \end{aligned} \quad (1.2.35)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

式中 $L_{n-1}(\chi)$ 是 $\chi^{(0)}, \chi^{(1)}, \dots, \chi^{(n-1)}$ 及其导数的线性组合。

(1.2.35)各式的左端相同,若解第一式,求出 $\chi^{(0)}$,则以后各式均可用求积方法解出。 $\chi^{(0)}$ 有4个特解,即

$$\left. \begin{aligned} \chi_1^{(0)} &= \eta; \quad \chi_2^{(0)} = 1 \\ \chi_3^{(0)} &= \int_{+\infty}^{\eta} d\eta \int_{+\infty}^{\eta} d\eta \eta^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (ia_0 \eta)^{3/2} \right] \\ \chi_4^{(0)} &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \eta^{1/2} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (ia_0 \eta)^{3/2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.2.37)$$

其中 $H_{1/3}^{(1)}, H_{1/3}^{(2)}$ 是 Hankel 函数, $a_0 = (\bar{u}_c)^{1/3}$, 不难写出更高阶的解。

这样,就有几个不同的区,分别有不同解的表达式。(1.2.22), (1.2.23)适用于临界层及边界层之处的区域。而(1.2.37)则适用于临界层内。如有必要,还应求边界层中的解,但由于临界层厚度大于边界层厚度,往往前者可将后者包含在内,条件是 y_c 也很小。

为了将(1.2.22), (1.2.23)与解(1.2.37)匹配起来,可以在(1.2.37)中令 $\eta \rightarrow \infty$,然后将 $\epsilon \eta$ 还原为 $y - y_c$,并与解(1.2.22)及(1.2.23)比较。为此,按照 Watson 所著“Theory of Bessel Function”得

$$\begin{aligned} H_{1/3}^{(1)}(\xi) &\sim \left(\frac{2}{\pi \xi} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \left(\xi - \frac{5\pi}{12} \right) \right\} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{3}, r \right)}{(2i\xi)^r} \right\} \\ &\quad -\pi < \arg \xi < 2\pi \\ H_{1/3}^{(2)}(\xi) &\sim \left(\frac{2}{\pi \xi} \right)^{1/2} \exp \left\{ -i \left(\xi - \frac{5\pi}{12} \right) \right\} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{3}, r \right)}{(2i\xi)^r} \right\} \\ &\quad -2\pi < \arg \xi < \pi \end{aligned}$$

$$\text{式中 } (\nu, m) = \frac{\Gamma\left(\nu + m + \frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\nu - m + \frac{1}{2}\right)}.$$

将此展开式代入(1.2.37)并逐项积分可得

$$\left. \begin{aligned} \chi_1^{(0)} + \epsilon \chi_1^{(1)} &\sim \eta + \frac{\epsilon \bar{u}_c}{2u_c} \eta^2 \\ \chi_2^{(0)} + \epsilon \chi_2^{(1)} &\sim 1 + \epsilon \frac{\bar{u}_c}{u_c} \eta \ln \eta \\ \chi_3^{(0)} &\sim \text{const} \cdot \eta^{-5/4} \exp \left\{ \frac{2}{3} (a_0 \eta)^{3/2} e^{i\pi/4} \right\} \\ \chi_4^{(0)} &\sim \text{const} \cdot \eta^{-5/4} \exp \left\{ \frac{2}{3} (a_0 \eta)^{3/2} e^{-i\pi/4} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.38)$$

以上展式在 $-\frac{7\pi}{6} < \arg(a_0 \eta) < \frac{\pi}{6}$ 范围内成立。

也可以将解(1.2.22)及(1.2.23)在 $y = y_c$ 处展为 $y - y_c$ 的级数,并令 $y - y_c = \epsilon \eta$ 而与解(1.2.36)比较。这时可以发现(1.2.22), (1.2.23)4个解正好分别与解(1.2.37)对应。由(1.2.38)的适用范围可知,前述(1.2.25)的积分途径应取在 y_c 下方。

如果 $c_1 > 0$,则实数轴已在 y_c 下方,于是解(1.2.22)及(1.2.23)在整个实数解域都有效。而若 $c_1 < 0$,则实数轴上有一段不在积分线上,即解(1.2.22)及(1.2.23)在实数范围内不一致有效。这就是为什么无粘解在 $c_1 > 0$ 时可以代表 $\alpha Re \rightarrow 0$ 的解。而在 $c_1 < 0$ 时,粘性解在 $\alpha Re \rightarrow \infty$ 时并不趋近于无

粘性解的原因。

3. 特征方程

对平面 Poiseuille 流来说,由于速度剖面是对称的,因此 O-S 方程的系数对 y 是对称的。这时解也可以分为对称与不对称的两组。计算表明,只有对称解才可能对应于不稳定或中性解,这时只需考虑 $(-1,0)$ 区间。在 $y=-1$ 处边界是条件不变,而在 $y=0$ 处,对称的边界条件可写为

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0$$

已知(1.2.12)有 4 个解 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, 因而其解可写为

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4$$

4 个边界条件要求

$$\left. \begin{aligned} c_1\varphi_{11} + c_2\varphi_{21} + c_3\varphi_{31} + c_4\varphi_{41} &= 0 \\ c_1\varphi_{11}'' + c_2\varphi_{21}'' + c_3\varphi_{31}'' + c_4\varphi_{41}'' &= 0 \\ c_1\varphi_{12}' + c_2\varphi_{22}' + c_3\varphi_{32}' + c_4\varphi_{42}' &= 0 \\ c_1\varphi_{12}''' + c_2\varphi_{22}''' + c_3\varphi_{32}''' + c_4\varphi_{42}''' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

其中第 2 个角标取 1 时表示在 $y=-1$ 处,取 2 时表示在 $y=0$ 处。为了有 φ 的非零解,作为 c_1, c_2, c_3, c_4 的方程组,其系数行列式必须等于零,即

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \varphi_{31} & \varphi_{41} \\ \varphi_{11}' & \varphi_{21}' & \varphi_{31}' & \varphi_{41}' \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{32} & \varphi_{42} \\ \varphi_{12}''' & \varphi_{22}''' & \varphi_{32}''' & \varphi_{42}''' \end{vmatrix} = 0 \quad (1.2.39)$$

由于 φ_1 等中包含有参数 α, Re, ω , 因此这就是特征方程式(1.2.15)。

在将解析解代入(1.2.39)时,发现将解(1.2.38)代入时能更好地求得中性曲线。这看起来很奇怪,因为(1.2.38)是临界层内的解。但实际上,式(1.2.38)是有粘性解,当然也适用于外区,条件是在 $\eta \rightarrow \infty$ 时,舍去的项仍比保留的项小。

利用解析解来求特征方程,在 40 年代起了主要的作用, Tollmien, Schlichting, 林家翘等人都做

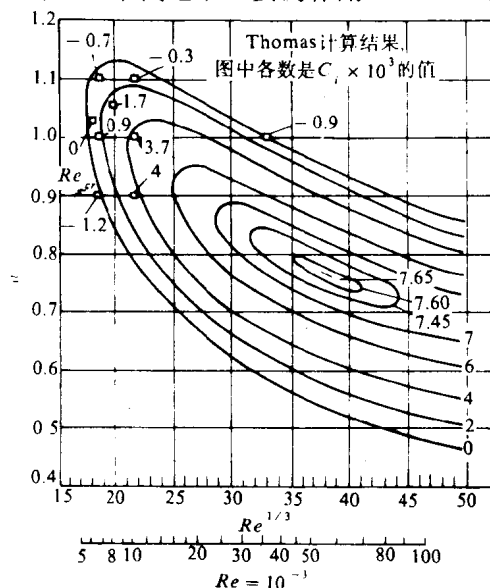


图 1.2.2 平面 Poiseuille 流的稳定性图