

概率断裂力学 和 可靠性

[加] J. W. PROVAN 主编



航空工业出版社

4215
P83

概率断裂力学和可靠性

吉罗文

[加] J.W. PROVAN 主编

航空航天工业部《AFFD》系统工程办公室 译

概率断裂力学和可靠性

（加）J.W. PROVAN 主编

吉罗文 译

（北京）

1989年10月

（北京）

航空工业出版社

（北京）

（北京）

（北京）

（北京）

（北京）

（北京）

内 容 简 介

本书简明扼要地介绍了概率断裂力学和可靠性的基本概念、理论和方法,特别着重于实际工程应用。书中列举了大量实例说明这一技术为工程结构带来的高可靠性及高经济效益。书末还按年代列出了大量的参考文献可供读者进一步查阅参考。

本书是从事结构可靠性和概率断裂力学实际工程应用技术研究的技术人员的重要参考文献,也是高等院校有关专业教师及研究生的很好的参考读物。

概 率 断 裂 力 学 和 可 靠 性

〔加〕J.W.PROVAN 主编

航空航天工业部《AFPD》系统工程办公室 译

航空工业出版社出版发行

(北京市和平里小关东里14号)

全国各地新华书店经售

北京市海淀吴海印刷厂印刷

1989年8月第1版

1989年8月第1次印刷

787×1092毫米1/16

印张: 21.875

印数: 1—2000

字数: 555千字

ISBN 7-80046-155-6/Z·043

定价: 9.30 元

出版说明

采用耐久性与损伤容限设计技术研制的飞机结构,不但能获得高经济效益,同时又具有高可靠性和维修性,这是当代飞机结构强度设计的最新技术。我国即将颁发的国军标《军用飞机结构完整性大纲——飞机要求》,对新型机种研制中采用耐久性与损伤容限设计技术作了明确规定。为了实现这一要求,航空航天工业部《AFFD》系统工程办公室已组织力量开展有关“飞机结构耐久性设计技术”、“飞机结构裂纹扩展止裂技术”以及“飞机结构可靠性设计技术”研究。为了配合研究工作的开展,我们翻译出版 J.W. PROVAN 等著名学者编著的《概率断裂力学和可靠性》一书。本书介绍了有关概率断裂力学和可靠性的基本概念、理论和方法,着重于实际工程应用,并列举了大量实例说明这一技术的应用给工程结构带来的高可靠性及高经济效益。书末还按年代列出了大量参考文献供读者进一步查阅参考。

全书共分九章,第一章 断裂敏感结构的有关材料可靠性概率研究;第二章 飞机结构的概率损伤容限分析(顾伟豪译);第三章 飞机结构可靠性和危险性分析(刘中秋译);第四章 用于飞机结构的随机裂纹扩展模型(沈真译);第五章 飞机结构的耐久性(郑旻仲译);第六章 加压水反应堆容器的可靠性(山永寿译);第七章 概率断裂力学应用于核工业中的反应堆压力容器、主冷却液管道和钢外壳(刘中秋译);第八章 概率断裂力学的数值方法(沈真译);第九章 概率断裂力学(郑旻仲译)。全书由林富甲副教授校对,最后由王俊扬教授审定,仇仲翼高级工程师整理。文中不当之处恳请读者批评指正。

航空航天工业部《AFFD》系统工程办公室

1988年10月

目 录

第一章 断裂敏感结构的有关材料可靠性概率研究	1
1.1 概 论	1
1.1.1 引言	1
1.1.2 一般的可靠性概念	2
1.1.3 疲劳可靠性模式的回顾	3
1.1.4 危险率概率	11
1.2 P-S-N 分析	12
1.2.1 引 论	12
1.2.2 P-S-N 曲线	12
1.2.3 失效循环数取决于构件初始强度时的可靠性	12
1.2.4 时变应力强度	14
1.2.5 进一步的讨论	14
1.3 随机裂纹扩展	16
1.3.1 引言	16
1.3.2 随机裂纹扩展	16
1.3.3 显著较弱点随机裂纹扩展	19
1.4 研究疲劳失效的微机制方法	20
1.4.1 引言	20
1.4.2 微机制学的基本概念	20
1.4.3 疲劳裂纹起始	22
1.4.4 疲劳裂纹扩展	23
1.4.5 疲劳裂纹实验研究	25
1.4.6 理论与实验结果的比较	26
1.5 基于概率微机制的疲劳可靠性规律	27
1.5.1 引言	27
1.5.2 微机制疲劳可靠性关系式	27
1.5.3 疲劳可靠性规律的实验研究	28
1.6 结 论	33
第二章 飞机结构的概率损伤容限分析	34
2.1 引 言	34
2.2 基本假设	34
2.3 载荷谱	35
2.3.1 载荷与环境的规范	35

2.3.2	使用中载荷谱的采集	36
2.3.3	载荷顺序、截取	38
2.3.4	分散性考虑	38
2.4	应力和应力强度分析	39
2.4.1	结构模型	39
2.4.2	可用的手册和文献结果	42
2.4.3	剩余强度、接触应力、摩擦力的影响	43
2.5	缺陷	45
2.5.1	缺陷分布	45
2.5.2	质量控制	45
2.5.3	当量初始裂纹尺寸	45
2.5.4	美军损伤容限要求	48
2.6	裂纹扩展	49
2.6.1	等幅裂纹扩展速率	49
2.6.2	变幅裂纹扩展速率	51
2.6.3	裂纹扩展速率的变异性	52
2.6.4	预计疲劳裂纹扩展	53
2.6.5	裂纹增长的随机模型	56
2.7	断裂力学与剩余强度	64
2.7.1	材料特性	64
2.7.2	线弹性断裂力学	66
2.7.3	非线性断裂力学	68
2.7.4	断裂韧性的分散性	70
2.7.5	破坏概率	72
2.8	使用寿命期内的检查	74
2.8.1	损伤源及检查方法	74
2.8.2	无损检测方法的裂纹检出概率	75
2.8.3	间隔长度	77
2.8.4	美国军用损伤容限要求	78
2.8.5	多次检查后裂纹尺寸分布	79
2.9	结构安全性	82
2.9.1	关于美国空军损伤容限要求的讨论	82
2.9.2	结构的剩余强度	84
2.9.3	安全性分析	85
2.9.4	数值例子	86
2.10	结论	92

第三章 飞机结构可靠性和危险性分析.....94

3.1	引言	95
-----	----------	----

3.1.1 可靠性概念	95
3.2 可靠性和危险性基础数学	97
3.2.1 具有不同危险率的混合总体	98
3.3 结构破坏的物理情况	100
3.3.1 载荷作用	100
3.3.2 结构特性	101
3.4 模拟真实结构情况的统计数学模型	103
3.5 无检查可靠性-安全寿命情况	106
3.5.1 静极限载荷破坏的危险率	106
3.5.2 考虑强度降低的破坏危险率	107
3.5.3 危险分类	108
3.5.4 平均瞬时危险率	110
3.5.5 强度-时间曲线的截除	110
3.5.6 含初始裂纹的结构	112
3.5.7 含有多破坏模式和部位的结构	113
3.6 可检结构的破坏危险率	113
3.7 举例	115
3.7.1 安全寿命情况-超高强度材料	115
3.7.2 用检查保证安全性的情况: 典型的铝合金材料	116
3.8 可接受的危险率	119
3.9 可靠性估算的可靠性	120
3.9.1 与 H 抽样有关的置信区间	120
3.9.2 与抽样 $\sigma_{1.0\%H}$ 有关的置信域	121
3.9.3 与 U_0 抽样有关的置信区间	121
3.9.4 与载荷谱外推有关的置信度	122
3.9.5 与用检查保证安全的结构有关的置信度	122
3.10 一般讨论	122
第四章 用于飞机结构的随机裂纹扩展模型	124
4.1 引言	124
4.2 疲劳裂纹扩展的随机模型	125
4.2.1 随机裂纹扩展模型	125
4.2.2 含紧固件孔试件的疲劳裂纹扩展数据	126
4.2.3 对数正态裂纹扩展速率模型和分析方法	127
4.2.4 对数正态随机过程模型	131
4.2.5 对数正态白噪声模型	132
4.2.6 对数正态随机变量模型	132
4.2.7 与实验室试验结果的关系	134
4.3 二次矩近似法	138

4.3.1	$w(t)$ 的均值和标准差	139
4.3.2	威布尔近似法	140
4.3.3	伽码和其它近似法	141
4.3.4	二次矩近似法和实验室试验结果间的关系	142
4.4	中心裂纹试件的疲劳裂纹扩展	143
4.4.1	最佳双曲正弦裂纹扩展速率函数	143
4.4.2	随机模型和二次矩近似法	144
4.4.3	与实验室试验结果的关系	145
4.5	影响疲劳裂纹扩展概率预计值的因素	148
4.5.1	疲劳裂纹扩展分析方法	148
4.5.2	对每个试件取等量数据点	148
4.5.3	数据处理方法	149
4.6	结论和讨论	149
第五章	飞机结构的耐久性	152
5.1	引言	152
5.2	耐久性设计要求	153
5.2.1	分析要求	153
5.2.2	试验要求	153
5.3	耐久性分析准则	154
5.3.1	耐久性关键构件准则	154
5.3.2	经济寿命准则/指导方法	154
5.4	耐久性分析方法	156
5.4.1	一般描述	156
5.4.2	假设和限制	159
5.4.3	原始疲劳质量模型 (IFQ 模型)	159
5.4.4	耐久性分析步骤	162
5.5	耐久性分析实施细节	163
5.5.1	EIFS 分布	163
5.5.2	试验及断口观察指南	165
5.5.3	断口观察数据组合的概念	166
5.5.4	EIFS 分布参数的确定	168
5.5.5	参数 β 的统计标定	176
5.5.6	裂纹超越概率	177
5.5.7	表示耐久性分析结果的格式	179
5.6	耐久性分析验证	179
5.6.1	战斗机机翼下蒙皮	179
5.6.2	轰炸机载荷谱作用下的复杂拼接试样	185
5.7	耐久性分析的“确定性方法”与“概率方法”的比较	190

5.7.1	确定性的裂纹扩展方法	190
5.7.2	概率方法	190
5.7.3	概念上的比较	191
5.7.4	结论	192
5.8	归纳及结论性评述	193
第六章	加压水反应堆容器的可靠性	194
6.1	引言	194
6.2	压力容器破坏统计	196
6.2.1	核主管路	197
6.2.2	非核容器	197
6.3	一般物理模型	198
6.3.1	裂纹——起始、发现及修理	202
6.3.2	材料韧性和破坏机理	203
6.3.3	疲劳裂纹扩展	206
6.3.4	瞬时加载	208
6.4	数学公式	208
6.4.1	破坏积分的一般表示法	210
6.4.2	确定的裂纹扩展	212
6.4.3	预载的影响：“冷水试验”	214
6.5	物理量的分布函数	215
6.5.1	初始裂纹尺寸分布函数	215
6.5.2	断裂韧性和流动应力	218
6.5.3	疲劳裂纹扩展和传递函数	219
6.6	应用	220
6.6.1	美国和欧洲轻水反应堆压力容器计算	220
6.6.2	结果和结论的评述	221
6.7	结论	228
第七章	概率断裂力学应用于核工业中的反应堆压力容器、主冷却液管道和钢外壳	233
7.1	引言	233
7.2	反应堆压力容器	233
7.2.1	反应堆压力容器脆性断裂	234
7.2.2	缺陷分布	235
7.2.3	检查和试验的影响	236
7.2.4	结果	237
7.3	主冷却液管道	237
7.3.1	主冷却液管道的渗漏	237
7.3.2	缺陷在焊缝中的分布模型	238

7.3.3 振动的影响	239
7.4 钢外壳	240
7.4.1 双判据方法	241
7.4.2 材料特性的分布	241
7.4.3 缺陷尺寸的分布	243
7.4.4 结果	245
7.5 结论	248
第八章 概率断裂力学的数值方法	249
8.1 引言	249
8.2 输入数据的处理	249
8.2.1 曲线拟合	249
8.2.2 由不完全数据的外推	252
8.2.3 模型计算	255
8.3 计算破坏概率的数值方法	257
8.3.1 蒙特卡罗法	257
8.3.2 方差的减少	258
8.3.3 对 PFM 的应用	263
8.4 近似法	266
8.4.1 基本思路	266
8.4.2 非线性函数 g 和非正态分布	270
8.4.3 对 PFM 的应用	271
第九章 概率断裂力学	275
9.1 引言	275
9.2 一般讨论	277
9.2.1 背景	277
9.2.2 确定性的基础	277
9.3 PFM 的统计基础	278
9.4 工程模型及 PFM	279
9.5 数值方法	280
9.5.1 讨论	280
9.5.2 MC 方法论	281
9.6 PFM 应用例子	286
9.6.1 带有纯 PFM 型的 SF 的优化	286
9.6.2 纯 PFM 的破坏率预测	288
9.6.3 采用 CPFEM 的可检构件的 RFC	297
9.6.4 难以检查的涡轮轴内腔的 CPFEM	303
9.6.5 通用 CPFEM 的先进计算机应用	305

9.7 结论意见	310
9.7.1 摘要	310
9.7.2 将来的考虑	311
9.7.3 结论	313
附录 A 本书使用的度量单位	313
附录 B 度量衡换算关系	314
参考文献	315

第一章 断裂敏感结构的有关材料 可靠性概率研究

J. W. PROVAN

1.1 概 论

1.1.1 引言

承受各种动载荷构件的疲劳特性至今仍是工程中最复杂的问题之一,原因是这种特性对材料性质,构件的几何形状,加载历程及环境条件极为敏感。在当今这个技术进步的世界中,保证各种构件和系统在规定的功能限度和给定的时间内无故障工作的日益增高的要求,使得有必要引入可靠性这个概念。可靠性是与概率密切相关的,实际上,讲一个构件的失效概率比讲一件构件预期不失效更为恰当。这种无故障概率或可靠度的计算在失效控制中就成为关键的(如果不是最关键的话)设计步骤。

此外,现已认识到大多数机械故障是由断裂、疲劳、腐蚀及材料的退化过程综合产生的。现代对大型结构和构件的要求正有着越来越多的使用条件,为了在其中维持一个可接受的结构完整性水平,设计与系统工程师们已表现出对这些有害的过程及其描述方法与抗御方法越来越大的关注。但是,当进行实际寿命试验以确定设计方案及设计参数时,复杂性和容量成为主要的障碍。这些试验因费用昂贵或者过于简化而不可行,从而迫使工程师从相对简单的元件、试件或系统实物模型的试验中获得数据。其次,进一步地认识到,从这些试验中获得的数据显示出比较大的分散性,最初将它归因于试验条件的变化。然而,现在虽然试验变量可被严格控制,但在结果中仍存在一个明显的残余分散,这就必定与材料微结构本身有关,即与晶格缺陷、不纯原子、滑移晶系晶体尺寸、晶界参数以及诸如松孔、裂纹和铸造缺陷等宏观缺陷的随机分布有关。所有这些表明了材料损伤过程的随机本质,并使我们考虑到用概率的而非确定性的方法处理现代工程设计中使用现代材料的有关问题。

有许多处理疲劳可靠性的方法,其一是包括二种情况的最薄弱点概念。第一种情况的最弱点并非显著地弱于周围材料。在这一情况中,实际薄弱程度可能对破坏循环数影响很小,破坏循环数将与试件平均强度有关。第二种情况即最薄弱点显著弱于周围材料的情况,如裂纹。在这一情况中破坏循环数将是最弱点薄弱程度与周围材料平均强度的函数。

威布尔的工作(1949)将机械破坏数据分散性的研究置于一个合理的基础上,他提出了从材料断裂强度的最弱点概率特性导出的一个统计函数。从那以后,威布尔函数已经常常在经验的基础上被假定为破坏时间模型,并已经由 Leiblein 和 Zelen (1956)、Kao (1956) 和 Perry (1962) 分别在球轴承,电子管和晶体管研究中得到满意的表达。随着断裂与疲劳破坏在设计中变成更为关键的问题,另外几个研究工程师跟随威布尔的脚步,提出了在规模和复杂性方面不断增加的多种统计模型。其中,比较熟悉的有指数、正态、对数正态、伽码和双极值(Gumbel)分布,由 Epstein 1958年和 Davis 1952年最先讨论了在寿命研究中指

数假设的合理性。后来,正如 Barlow 和 Proschan 1965年提出的报告那样通过数学上的研究而将指数法则作为复杂设备的失效法则,因为对给定物体或试件的失效数据组,人们普遍愿意采用更为灵活的描述方式,这种方式中带有某种形式的形状参数,所以有关正态分布作为可靠性模式的应用还很少有报告出现。在 Goldthwaite 1961年的报告中对数正态分布最初被限制在小粒子物理学,经济学及生物学领域。这种情况被 Howard 与 Dodson 1962年和 Peck 1962年的著作所改变,他们用它来描述断裂问题,而 Gupfa 于 1962年又将此描述应用于寿命试验抽样计划的制订。广泛地应用那是 Gumbel 于 1954年将其用于流体、航空、地质和海洋工程的研究中,同时进行这些研究的还有 Hahn 和 Shapiro 及 Mann 等人, Gumbel 分布也可被用于寿命试验和可靠性场合,这里构件的失效是与极值现象有关的。

过去几年中,对以疲劳过程的概率描述为基础的可靠性模型的推导作了许多研究工作。Birnbaum 和 Saunders 于 1969年提出一个描述由于疲劳裂纹扩展引起破坏的寿命分布。Birubbaum 和 Saunders 于 1968年还提供一种对 Palmgren-Miner 规则的的概率描述,并且在 1961年 Freudenthal 和 Shinozuka 的著作中为他们的法则找到了试验的支持, Freudenthal 和 Shinozuka 也提出了一个被几组疲劳数据证实的相似法则。随后, Payne 于 1972年介绍了一种用以评定飞机结构疲劳强度的统计可靠性模式,其方法是在结构使用的任意阶级,评估裂纹扩展速率和开裂结构剩余强度的随机变异性。

直到最近, Provan (1981~1982年)和 Provan 及 Theriault (1982年)根据运用于多晶金属疲劳破坏的概率微观机制概念推导并用试验研究了一种新的可靠性分布。文中讨论的随机的疲劳裂纹扩展过程是基于裂纹将按线性产生的马尔科夫过程进行增长的这一假设,持此观点的还有 Bogdanoff 和 Kozin (1985)与 Lir 和 Yang (1983)。

在 1.1.2 节中,基于其概率特性对可靠性给予定义。1.1.3 节将简要描述大多数常用的统计分布。1.2 节讨论最薄弱点并不显著弱于周围材料的情况。这节中还将提出获得所需可靠性的 P-S-N 曲线的方法。1.3 节将讨论最薄弱点显著弱于周围材料的情况,并主要涉及裂纹扩展速率公式中参数的随机特性。接下去讨论整个疲劳破坏过程的微观机制解释,在 1.5 节中进一步推导基于随机微观机制的疲劳法则。最后 1.6 节给出了一些结论。

1.1.2 一般的可靠性概念

可靠性一词早以存在,但最近几年又有了新的含意。除了纯粹的定性以外,它也可定量。可以提出构件“可靠性怎样?”的问题对这个问题的回答导致了用数值来表达其可靠性。

构件的一定等级的可靠性可用它们的无故障工作概率,平均满意工作时间,失效(破坏)密度,失效(破坏)率等加以表达。在这些量与其它特征量之间存在着确定的解析关系。知道这些关系,就可由一个或几个特征量计算其它的特征量。以数字表示可靠性的趋势以及存上面提到的解析表达式,使得可靠性的很多定义在性质上是定量的。由于无故障工作概率在与平均故障时间是最形象的特征量,故它们经常被用作可靠性的定义。

在本文中引入下述这个便于应用统计方法并能广泛使用的可靠性的一般定义:“可靠性就是一个构件(或一个系统)在时间 t 内不失效的概率 $P(t)$ ”。无故障工作概率的含义是在规定的工作条件及工作持续时间内将不发生故障的概率。设 t 为需要确定无故障工作概率的时间,且 T 为构件从开始工作到首次故障的时间,那末按无故障工作的定义,有下式:

$$P(t) = P(T > t) \quad (1.1)$$

即：无故障工作概率是构件从开始工作到失效的时间 T 大于或等于待确定无故障工作概率的时间 t 这一事件发生的概率。

由无故障工作概率的定义，很明显，此特征量是时间的函数，它具有以下明显性质：

(1) $P(t)$ 为时间的递减函数，

(2) $0 < P(t) < 1$ 及

(3) $P(0) = 1$ 和 $P(\infty) = 0$ 。

设 $Q(t)$ 为失效概率，则与 $P(t)$ 有以下的关系：

$$Q(t) = 1 - P(t) \text{ 或 } Q(t) = P(T < t) \quad (1.2)$$

由 1.2 式可见，失效概率是工作到失效时间 T 的分布的累积函数，即：

$$Q(t) = F(t) \quad (1.3)$$

分布累积函数的微分即分布的概率密度：

$$f(t) = dF(t)/dt \quad (1.4)$$

下节要阐述几种在构件或系统的疲劳可靠性分析中常要遇到的几种分布。

1.1.3 疲劳可靠性模式的回顾

经验地描述疲劳数据分散性的现有连续可靠性分布的数目是很多的。本书扼要介绍常用的几个，详细可见此题的几本极好的教材，如：O'conner (1981)，Haugen (1980)，Mann 等人 (1974) 和 Lipson 与 Sheth (1973) 的著作。此外，在介绍这些分布中，重点放在它们的一些重要特征及其应用范围。

1.1.3.1 指数分布

指数概率密度函数 (PDF) 及其相关的累积分布函数 (CDF)，如图 1.1 所示，肯定地描绘了最常用的失效时间 (TTF) 的一种分布。遗憾地是，许多情况下，选择指数分布作

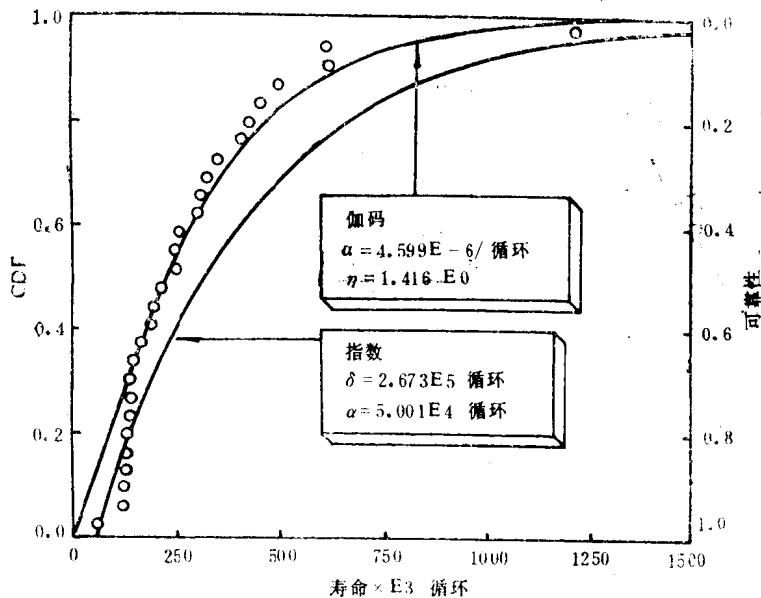


图 1.1 指数和伽码累积分布函数

为失效模式仅仅是基于它可方便的应用而并不是对发生在非均匀材料中的物理损伤的认识。然而已经发现指数分布更适合作为复杂系统或组合体的可靠性模型或在部（构）件的使用寿命期中即耗损出现之前进行更换的可靠性模型。

指数分布随机变量的 PDF 与 CDF 给定如下：

$$f(t; \delta) = \frac{1}{\delta} e^{-t/\delta}; \quad t \geq 0; \quad \delta \geq 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-t/\delta}, \quad (1.5)$$

式中 $1/\delta$ 称为危险率，将在下节予以讨论。这一参数系常量，指数模式的特点（在有限的一定程度上），在于所谓的完全“无记忆”性。换句话说，对指数分布 TTF，在指定时间间隔内，给定物件的失效概率仅与此时间间隔的长短有关而与此构件以前已安全使用了多长时间（如 100 或 1,000 小时）无关。

最后，值得注意的是，指数分布对于威布尔分布和伽码分布都是一种特殊的情况。

1.1.3.2 正态或高斯（Gaussian）分布

正态分布的 CDF 如图 1.2 所示，在统计模式中它是最为熟悉且经常使用的。这是因为它的普遍运用性，即它与很多参量的观察分布近似地保持一致。它于 1733 年首先由 De Moivre 的著作所介绍，以后不晚于 1774 年由 Laplace 所认识并高斯 1809 年首次出版了有关它的参考文献。若其 PDF 和 CDF 有以下形式则随机变量被称为是正态分布。

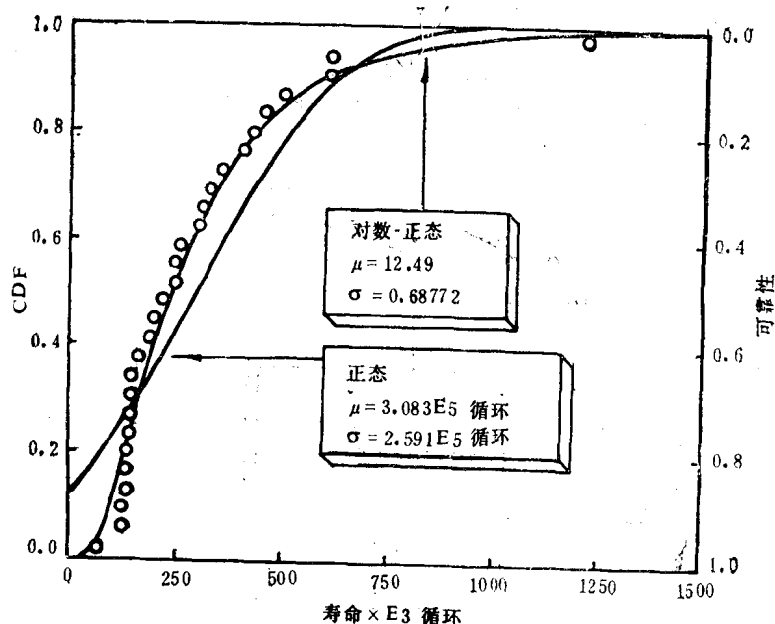


图 1.2 正态和对数正态的累积分布函数

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 \right];$$

$$-\infty < t < \infty; \quad -\infty < \mu < \infty; \quad \sigma > 0. \quad (1.6a)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] d\xi \quad (1.6b)$$

此分布关于其均值 μ 系对称且有一由其标准差 σ 表示的离散度。对变量进行简单的变换, 则 (1.66) 式的 CDF 变为:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left(-\frac{s^2}{2} \right) ds, \text{ 这里 } s = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \quad (1.7)$$

这里 z 是标准正态变量, 它是 $\mu=0$ 和 $\sigma=1$ 的正态分布。

由于正态变量 t 包含有负值, 故使正态分布作为 TTF 模式的正确性存在疑问。然而, 如果 $\mu > 3\sigma$, 任何寿命模式的基本要求, 即它的 PDF 从 0 到 ∞ 的积分等于 1, 在误差小于 0.14% 条件下得到满足。在其它情况下采用正态分布的截尾形式。

1.1.3.3 对数正态分布

如果对数 $s = \ln t$ 服从参数 μ' (称尺度参数) 与参数 σ' (称形状参数) 的正态分布。那么, 随机变量 t 被称为对数正态分布。PDF 与 CDF 分别由下式给出:

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma'\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu'}{\sigma'} \right)^2 \right]^*, \quad (1.8a)$$

$$0 < t < \infty; 0 < \mu' < \infty; \sigma' > 0,$$

$$F(t) = \frac{1}{t\sigma'\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \xi - \mu'}{\sigma'} \right)^2 \right]^* d\xi, \quad (1.8b)$$

而且还在图 1.2 中给出图示。在可靠性研究中极为感兴趣的是这样一个事实, 即通过考虑由于疲劳裂纹的扩展而引起破坏的物理过程, 则很自然地产生对数正态分布。由于这个原因, 将对数正态分布应用于疲劳失效问题似乎是有道理的。

设 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 为一随机应变变量序列, 它代表了疲劳裂纹在不同增长阶级的大小。按照 Kao (1965 年) 处理方法, 通过假设裂纹增长的比例效应, 得到裂纹在第 i 个阶段的生长量 $x_i - x_{i-1} = \pi_i x_{i-1}$ 与裂纹尺寸 x_{i-1} 成随机比例, 其中 π_i 是比例常数, 它随 i 作随机变化。初始裂纹尺寸为 x_0 , 可视为一小裂纹尺寸。到构件失效时其长度为 x_n 。最后, 假设 π_i 为独立分布的随机变量, 不要求它们对所有的 i 有相同分布。因此, 对于 n 增大时, $x_i - x_{i-1}$ 趋于零的极限情况, 得到

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}} = \int_{x_0}^{x_n} \frac{1}{X} dX = \log X_n - \log X_0, \quad (1.9)$$

或:

$$\log X_n = \sum_{i=1}^n \pi_i + \log X_0. \quad (1.10)$$

由于假设 π_i 是独立分布的变量, 当应用中心极限定理时它们将收敛于正态分布。结果 $\log X_n$ 渐近于正态分布, 它使 X_n 具有对数正态分布。

1.1.3.4 伽码分布

图 1.1 还示出伽码分布是指数分布的自然扩展, 若事件以等速率 α (即每一事件都是

* 原文分母中漏写 t ——译者注

指数分布)发生,则总共正好发生 η 个独立事件中所需的时间是伽码分布。用可靠性术语来讲,这意味着如果系统中局部破坏是以等速率独立地发生,并且一旦 η 个局部破坏发生,系统就破坏,则系统的 TTF 是伽码分布,伽码分布的 PDF 与 CDF 为:

$$f(t) = \alpha^\eta \frac{t^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} e^{-\alpha t}; \quad t > 0, \alpha, \eta > 0, \quad (1.11a)$$

$$F(x) = \frac{\alpha^\eta}{\Gamma(\eta)} \int_0^x t^{\eta-1} e^{-\alpha t} dt, \quad (1.11b)$$

这里的 $\Gamma(\eta)$ 为伽码函数,即:

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty x^{\eta-1} e^{-x} dx, \quad (1.12)$$

η 和 α 分别是形状和尺度参数。

伽码分布函数曲线的多样化可说明为什么这种模式在可靠性中能得到广泛的应用。实际上有许多现象在理论上还不能证实是伽码变量,但是在经验上已经发现它们可以用伽码分布很好地近似表示。最终,伽码 CDF 也称为不完全的伽码函数,此函数的取值可根据 Pearson 于 1957 年提供的表格计算。

1.1.3.5 威布尔分布

1949 年瑞典研究工程师威布尔 (Weibull) 提出了说明疲劳数据的一种 PDF。从此,这种失效分布已经推广应用到许多其它问题上。威布尔分布广泛适应性是由于它可能适应不论危险率是递增还是递减的多种情况。例如象 1974 年 Manne 等人的讨论,威布尔分布也可称为最小值的 Fisher-Tipper III 型渐近分布,也就是说,它可从极值理论中导出。此外,在所有可用统计分布中威布尔分布被认为是最有价值的,因为它可以描述初始强度非正态分布时的破坏寿命并且包含了包括接近正态分布在内的大量分布。

(a) 三参数威布尔分布

威布尔分布的更一般形式通过引入位置参数 γ 考虑了任意起始的随机变量,当设计的构件至少能工作一定的时间时,这个位置参数在寿命试验中是需要的。在这种情况下 CDF 和 PDF 变为

$$P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^\beta\right], \quad (1.13)$$

这里的 γ 是 $Q(t)=0$ 时的时间并且是位置参数, θ 是特征寿命并且是尺度参数,而 β 是形状参数。故:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^\beta\right] \quad (1.14b)$$

概率密度函数是:

$$f(t) = [\beta(t-\gamma)^{\beta-1}/\theta^\beta] \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^\beta\right] \quad (1.14a)$$

威布尔分布是三参数(γ, θ, β)的分布,而正态与对数正态仅有二个控制参数(均值与标准差)。统计上对数正态也有三参数形式,但在可靠性分析中第三个参数通常被安全地忽略。