

场论与粒子物理学

下 册

李政道 著

33

76

科学出版社

53.833

场论与粒子物理学

下 册

李 政 道 著

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书是根据作者在美国哥伦比亚大学和中国科技大学研究生院讲授本课程的讲义修改补充而成,由相对独立而又相互联系三部分构成: I. 量子场论,主要讨论场的量子化, S 矩阵的微扰论计算方法及孤粒子等; II. 对称原理,讨论粒子物理学中的各种时空对称性、内部对称性及有关的实验结果; III. 相互作用,主要讨论 SU_c 对称性,量子色动力学、夸克囚禁、孤粒子(或袋)模型、弱相互作用唯象理论、弱电统一理论及夸克部分子模型等。上册包括 I、II 部分,下册包括 III 部分。

学习本书只需要具备一般的电动力学和量子力学的基本知识。本书可作为大专院校物理系高年级学生或研究生的教学用书和参考书,也可用作理论物理和实验物理工作者很有用的参考书。

本书由 Harwood Academic Publishers
(Chur, New York, London, Paris) 同时出版英文版

场 论 与 粒 子 物 理 学

下 册

李 政 道 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 6 月 第 一 版	开本: 850×1168 1/32
1981 年 6 月 第一次印刷	印张: 4
印数: 精 1—2,520	插页: 精 4 平 2
平 1—4,070	字数: 106,000

统一书号: 13031·1655

本社书号: 2271·13—3

定价: 布面精装 2.05 元
平 装 0.85 元

整 理 说 明

1979 年春天,李政道教授应中国科学院的邀请,在北京中国科技大学研究生院讲授《场论与粒子物理学》和《统计力学》两门课程。在整理出版《场论与粒子物理学》的过程中,李政道教授由于工作很忙,只整理了讲稿的前十五章。第十六章以后的讲稿,是我们受委托根据李政道教授讲课的录音、录象、讲义初稿,并参考了裘照明、夏仁立、曹南薇三位同学的笔记整理出来的。具体分工是赵保恒整理第十六章至第二十一章,朱重远整理第二十二章至第二十六章,然后互相校阅。最后由陈崇光同志誊写。虽然我们尽量保持李政道教授原来讲课的风格,但整理后的书稿未经李教授过目,如有错误或不当之处,由整理者负责,并欢迎读者批评指正。

赵保恒 朱重远

1980 年 11 月

目 录

II. 相 互 作 用

第十七章	概论	1
第十八章	SU_3 对称性	9
§ 18.1	SU_3 对称性	9
§ 18.2	物理应用	16
第十九章	量子色动力学	23
第二十章	色介常数和夸克囚禁	30
§ 20.1	色介常数和真空的抗色性	30
§ 20.2	夸克囚禁	32
§ 20.3	证明当 $L > l$ 时, $\kappa_L < \kappa_l$	38
第二十一章	孤粒子(或袋)模型	43
§ 21.1	以量子色动力学为基础的唯一象拉氏密度	43
§ 21.2	零阶近似	45
§ 21.3	辐射修正	54
第二十二章	弱相互作用唯象分析	62
§ 22.1	纯轻子弱相互作用	62
§ 22.2	半轻子弱相互作用	64
§ 22.3	无轻子弱相互作用	74
§ 22.4	么正极限	74
第二十三章	无标度假设	78
§ 23.1	无标度假设	78
§ 23.2	无标度假设的应用	80
§ 23.3	无标度性的破坏	87
第二十四章	戈德斯通机制和希格斯机制	89

§ 24.1	戈德斯通机制	89
§ 24.2	希格斯机制	94
第二十五章	温伯格理论	99
§ 25.1	$SU_2 \times U_1$ 群	99
§ 25.2	温伯格理论	101
§ 25.3	格拉肖-伊利奥朴勒斯-迈阿尼机制 (简称 GIM 机制)	110
第二十六章	夸克部分子模型	113
§ 26.1	部分子假设	113
§ 26.2	部分子模型的应用示例	116
习题		120

II. 相 互 作 用

第十七章 概 论

相互作用的研究是粒子物理学最基本的内容。近几年来,在这个领域里发生了很大变化,许多方面取得了重要进展。 J/ψ 家族和 Υ 粒子的发现,表明夸克模型作为强子谱和强子动力学的基础是极为有用的;中性流的发现,轻子和强子的各种深度非弹性过程的研究,导致人们期望也许最终可以把弱相互作用和电磁相互作用统一起来;而重轻子的发现,再一次提醒人们,粒子物理学现有的图象还是极不完善的。所有这些使相互作用的研究在目前是极其激动人心的。

目前所谓的基本粒子可以分成三类:

- 一、媒介子,包括光子、引力子、中间玻色子;
- 二、轻子,包括各种中微子, $e^\pm$, $\mu^\pm$, $\tau^\pm$, ...;
- 三、夸克,包括 d (下), u (上), s (奇), c (粲), b (底), t (顶), ...。

这里我们引进了一个名称“媒介子”。媒介子是传递各种相互作用的粒子,但它不是普通的所谓介子。光子、引力子和中间玻色子分别传递电磁相互作用、引力作用和弱相互作用。引力子和中间玻色子尚未在实验中观察到,但是,目前大多数粒子物理学家相信它们是存在的。

轻子这个名称是从历史上沿袭下来的,它并不是很恰当的。开始发现的轻子确实很轻,但近年来发现的 τ 轻子并不轻,其质量达到 1.8 GeV。

夸克是有强相互作用的基本粒子。“夸克”这个名称是盖尔曼 (M. Gell-Mann) 提出的,它的原意是一种瑞士奶酪蛋糕。最初盖尔

曼提出夸克模型时,他对这个理论也不是认真看待的,但是后来的发展表明这个理论是非常重要的。在现代的“粒子性质表”上,“基本”二字已经去掉。过去人们认为,普通强子都是基本粒子,但是现在认为,它们是由夸克组成的。这是本世纪六十年代初到七十年代中一个具有革命性的转变。这个转变和十九世纪旧的物质结构观念转变到原子、分子观念几乎有同样的重要性。至于前面列举的三种基本粒子,可能也只是暂时可以认为是基本的。

根据夸克模型,所有的强子都是夸克的或夸克和反夸克的复合态。所有介子($\pi, K, \rho, \omega, \dots$)都是由一个夸克和一个反夸克组成的;所有重子($p, n, \Lambda, \Delta, \dots$)都是由三个夸克组成的。图 17.1 是强子结构的示意图,其中 q 表示夸克, $\bar{q}$ 表示反夸克。

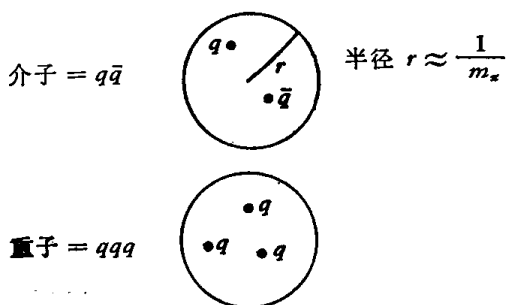


图 17.1

以后我们要说明,怎样从实验决定夸克的自旋、电荷和质量。实验表明,夸克的自旋为 $\frac{1}{2}$ 。强子内的夸克和自由轻子的质量有明显的对应关系:

夸克	d	u	s	c	b
轻子	ν	e	μ	τ	
质量(大约)	0	0	$0(10^2 \text{ MeV})$	2 GeV	5 GeV

夸克的电荷如下:

夸克	d	u	s	c	b	$t(?)$
电荷(单位 e)	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} (?)$

以下我们用具体例子说明强子是怎样由夸克组成的。

例1 夸克模型认为 π^+ 或 $\rho^+ = \bar{d}u$; π^- 或 $\rho^- = \bar{u}d$; π^0 或 $\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$ 。

从电荷看来这是对的。例如, $\bar{d}$ 的电荷为 $\frac{1}{3}$, u 的电荷为 $\frac{2}{3}$, 所以 $\bar{d}u$ 的电荷为 1, 和 π^+ , ρ^+ 的电荷一样。

我们假定组成介子的 $\bar{q}q$ 处于 s 波状态, 于是介子的自旋由 $\bar{q}q$ 的总自旋决定。 $\bar{q}q$ 的旋量波函数有两类, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q - \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$ 代表自旋为零的状态。由于 q 和 $\bar{q}$ 的内禀宇称相反, $\bar{q}q$ 的宇称是负的, 因此, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q - \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$ 代表 0^- 赝标介子。 $\uparrow_{\bar{q}}\uparrow_q$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q + \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$, $\downarrow_{\bar{q}}\downarrow_q$ 是自旋为 1, 宇称为负的重态, 代表 1^- 矢量介子。

注意, $J=1$, $J_z=0$ 的自旋波函数为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q + \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$,

但是, $I=1$, $I_z=0$ 的同位旋波函数为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$ 。 $\downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q$ 和 $\bar{d}d$ 前的符号相反。根据第十一章的讨论, 我们知道, 如果 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ 是一个同位旋旋量, 则 $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$ 也是一个同位旋旋量, $\bar{u}$ 前的负号导致 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$ 中的 $\bar{u}u$ 和 $-\bar{d}d$ 的相对相因子相反。这一点也可以由下述方法看出。令 $\phi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, 则 $\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} \tau_3 \phi$ 是一个同位旋矢量。其第三分量为 $\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\phi} \tau_3 \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$, 和前面的结果一致。

另外要注意, 由于夸克 u, d 的质量 $\cong 0$, 它们在介子内的运动是相对论性的。在这种情形下, 为什么可以把自旋角动量和轨道角动量分开考虑呢? 在第二十一章中, 我们将考虑夸克运动的

相对论性。但在这里,我们只是指出,暂时忘掉相对论性所得到的某些结果和考虑了相对论性所得到的结果是一致的。

例2 由 $\bar{s}u, \bar{s}d$ 可以组成 K^+, K^0 和 $K^{*+}, K^{*0}(892)$, 由 $\bar{u}s, \bar{d}s$ 可以组成 $K^-, \bar{K}^0$ 和 $K^{*-}, \bar{K}^{*0}$; 由 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$ 和 $\bar{s}s$ 可以组成 $\eta, \eta'(958)$ 和 ϕ, ω 。

由 d, u, s 可以构成 9 种 $\bar{q}q$, 又 $\bar{q}q$ 的自旋状态有 4 种, 所以 $\bar{q}q$ 有 36 种状态。 $\pi^{\pm,0}, K^{\pm,0,\bar{0}}, \eta, \eta'$ (共 9 种) 属于自旋为 0, 内禀宇称为负的状态。 $\rho^{\pm,0}, K^{*\pm,0,\bar{0}}, \omega, \phi$ (共 9 种, 每种有 3 个自旋状态) 属于自旋为 1, 内禀宇称为负的状态。从粒子性质表可以看到, 它们是最低能量状态。如果忽略夸克之间的自旋有关作用的影响, 这 36 个状态是简并的。自旋有关作用使 0^- 粒子和 1^- 粒子的质量分开来。

例3 $J/\psi(3100), \chi(3415, 3510, 3555)$ 和 $\psi(3685)$ 是由 $\bar{c}c$ 组成的; $Y(9500)$ 大概是由 $\bar{b}b$ 组成的。

例4 重子是 qqq 复合态。例如

	总自旋
$uud = \begin{cases} p \\ \Delta^+(1232) \end{cases}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$
$ddu = \begin{cases} n \\ \Delta^0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$
$uuu = \Delta^{++}$	$\frac{3}{2}$
$ddd = \Delta^-$	$\frac{3}{2}$

根据上面的讨论,可以得到几个令人惊奇的结果:

1. 夸克有分数电荷。例如由 $\Delta^{++} = uuu$, 可以推出 $Q_u = \frac{2}{3}$. 然后根据其他粒子的电荷可以推出另外一些夸克的电荷也是分数的。

2. 夸克有三色, 无色是强子。重子中的 qqq 处于 s 波中, 于是总自旋等于 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$, 恰好可以用来描写低质量态的 $\frac{1}{2}^+$ 重子和 $\frac{3}{2}^+$ 重子。反之, 如果 qqq 不处于 s 波中, 就有许多实验上无法说明的多余状态。另一方面, 如果 qqq 在 s 波中, 就和费米统计的要求矛盾。例如 $\Delta^{++} = uuu$, 它的自旋波函数和同位旋波函数都是对称的, 因此总波函数也是对称的。1964 年格林伯格 (O. W. Greenberg) 提出夸克服从反常统计 (parastatistics) 理论。根据这个理论可以认为, 每种夸克都有三种颜色。这样就可以在 s 波情形下组成反对称的波函数, 因而满足费米统计的要求。但是引进颜色量子数后可能的状态就太多了。于是格林伯格进一步假定普通强子是无色的, 而有颜色的态是不允许的。例如介子波函数为 $\bar{q}_R q_R + \bar{q}_B q_B + \bar{q}_G q_G$ 。与颜色(简称色)相对照, 人们把夸克的上, 下, 奇, 粲, $\dots$ 称为味道(简称味)。

我们进一步讨论一下怎样从实验直接定出夸克的自旋、电荷、质量和颜色的问题。考虑 e^+e^- 对撞实验。对撞后终态为 e^+e^- , $\mu^+\mu^-$, $\bar{q}q$ 等。 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\bar{q}q$ 可用图 17.2 表示。当 $s = (E_{\text{质心系}})^2 \gg (2m_q)^2$ ($2m_q$ 是图 17.2(b) 过程的阈能) 时, 如果忽略

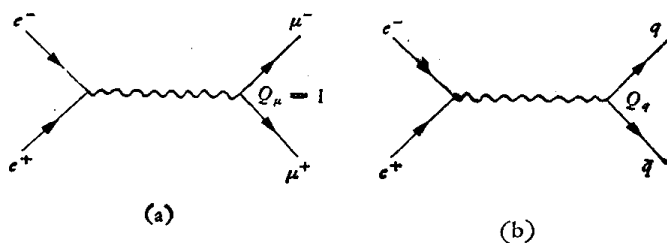


图 17.2

终态中 $q, \bar{q}$ 之间的强相互作用, 就有 (参考本书上册习题 7)

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \cong 3Q_q^2, \quad (17.1)$$

其中 $q = u, d, s, \dots$, 系数 3 是夸克的三种颜色贡献的。如果对所有强子终态求和, 则得

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{所有强子终态})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \cong 3 \sum_q Q_q^2, \quad (17.2)$$

其中 $\sum_q$ 表示对质量 $m_q < \frac{1}{2} E_{\text{质心系}}$ 的夸克求和。假定夸克的电荷数值如第 2 页所示, 则当

$1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} < 2m_c$ 时 (假定 $2m_u, 2m_d$ 及 $2m_s \ll 1 \text{ GeV}$),

$$R \cong 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = 2;$$

当 $2m_c < \sqrt{s} < 2m_b$ 时,

$$R \cong 2 + \Delta R = 3 \frac{1}{3}, \quad \Delta R \cong 3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{3}.$$

当 $2m_b < \sqrt{s} < 2m_t$ 时,

$$R \cong 3 \frac{1}{3} + \Delta R = 3 \frac{2}{3}, \quad \Delta R \cong 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

在图 17.3 中, 我们示意地画出了实验结果, 实验曲线与理论的

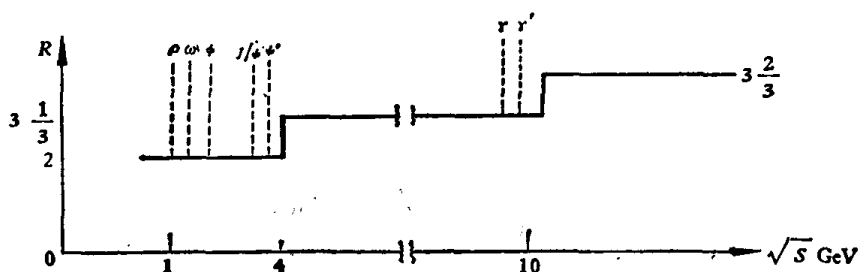


图 17.3

要求一致。这种一致性说明了许多问题。首先说明夸克的自旋为 $\frac{1}{2}$, 如不然 (17.1) 和 (17.2) 式就不成立。夸克自旋取任何其他值时将给出与 (17.1) 和 (17.2) 式完全不同的结果。此外, 实验与理论的一致性还说明:

1. 夸克有分数电荷,其数值如第 2 页所示,
2. 每种味道的夸克有三种颜色;
3. 从实验曲线可以估计强子内部夸克的质量,结果表明夸克的“质量”相当小;
4. 在共振态外,夸克之间的强相互作用可以忽略[否则(17.1)和(17.2)式不成立].

这四个结果是相当不寻常的,但更令人惊奇的是,虽然我们可以用夸克解释许多问题,但是我们在终态中找不到自由夸克。夸克不能跑出强子的现象称为夸克囚禁,夸克囚禁是当前粒子物理学中一个极为尖锐的问题。夸克囚禁似乎说明夸克之间有很强的作用,但这是和上面第四点矛盾的;并且其它实验结果(电子或中微子与强子相互作用的总截面,强子的质量谱等)也支持强子内部夸克质量很小并且相互作用可以忽略的看法。夸克囚禁和为什么观察不到有颜色的强子态,是我们以后要着重讨论的两个问题。

近年来粒子物理学有很大进步。我们对粒子的性质和它们的相互作用已有相当多的了解。但是,一些现在看来似乎很明显的事情,当初都是经过激烈争论才被人们承认的。在四十年代中期,人们还不知道有弱相互作用和强相互作用的区别。当时有人(M. Conversi, E. Pancini 和 O. Piccioni)测量了宇宙线中发现的一种介子(后来叫 μ 介子)通过碳时的吸收率,发现 μ^- 介子几乎一半被原子核俘获,另一半衰变掉。这样似乎可以从衰变是通过弱作用进行的而推测出俘获也是通过弱作用进行的。但事情并不这样简单,因为 μ^- 介子被原子吸收后,如果停留在绕核运动的外层轨道上,就很少有机会进入核内而被核俘获。为了弄清楚这个问题,费米和泰勒(E. Teller)计算了 μ^- 从外层轨道进入内层轨道所需要的时间,发现这个时间是很短的,远比 μ^- 的寿命小。于是推测出 μ^- 俘获的作用是很弱的, μ 介子不是汤川理论中所预言的介子。另一方面,海森堡发现费米为解释 β 衰变提出的费米型相互作用在短距离是发散的,因此,他认为这种相互作用可以产生强相互作用,而无需汤川理论。1947年发现了 π 介子,这是对汤川理

论的一个有力支持。1947 年底斯坦伯格从实验中发现 μ 衰变的终态电子能量不是固定的。因此终态不是两个粒子。于是我们知道有三种弱过程：

$$\mu^- \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}, \quad (17.3)$$

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu, \quad (17.4)$$

$$N \rightarrow p + e + \bar{\nu}. \quad (17.5)$$

当时费米的研究生杨振宁、罗森布鲁斯 (M. Rosenbluth) 和我本人作了一个计算，发现 (17.3)–(17.5) 三种过程中相互作用耦合常数为同一数量级。因此我们猜测弱作用是有普适性的，并且可能是通过一种质量很大的中间玻色子传递的，它和 $e^- \bar{\nu}$ 、 $\mu^- \bar{\nu}$ 及 $p \bar{n}$ 的耦合常数相同 (图 17.4)。这样就把弱相互作用与强相互作用区

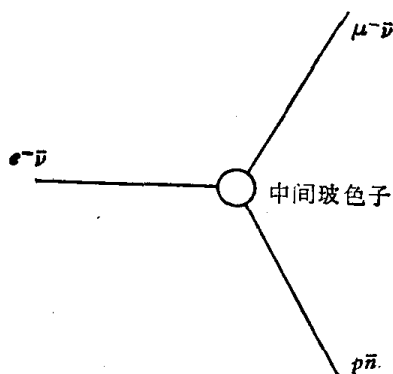


图 17.4

分开来了。近三十年来实验上发现了大量的强作用粒子，先是发现一批奇异粒子，紧跟着又发现了 $\Delta(1232)$ 共振态，以后又发现了更多的强子。在这个基础上提出了夸克模型。现在差不多可以肯定强子都是由夸克组成的。然而，如前所述，夸克模型一方面能说明许多实验事实，另一方面也存在着严重困难。解决这些困难就是当代粒子物理学的重大任务。

在以下第十八章到第二十一章中，我们研究强相互作用的问题。特别是在第二十章和第二十一章中，我们将着重研究夸克囚禁，强子为什么无色等问题，在以后各章中，我们讨论弱相互作用和电磁相互作用的问题。

第十八章 SU_3 对称性

1956年坂田提出所有强子均由三种粒子 p, n, Λ 组成的模型。接着在 1959 年,大贯、小川等人就把 SU_3 群应用到坂田模型上,提出了介子构成 SU_3 的一个 8 维表示,但是在他们的理论中,重子的地位是不清楚的。1961 年盖尔曼和奈曼(Y. Neéman)提出重子也构成 SU_3 的 8 维表示,他们的理论获得了很大成功。1964 年盖尔曼和茨魏格(G. Zweig)提出夸克模型。在现代的夸克模型中, SU_3 群既用来表示味道的对称性,也用来表示颜色的对称性。

§ 18.1 SU_3 对称性

为了说明什么是 SU_3 对称性,先回忆一下 SU_2 对称性。我们知道,强相互作用对于

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow u \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

有不变性,其中 u 是一个 2×2 矩阵,并且

$$u^\dagger u = 1, \quad \det u = 1.$$

$u^\dagger$ 与 u 的关系是 $(u^\dagger)^a_b = (u^b_a)^*$. u 矩阵的全体 $\{u\}$ 构成一个群,称为 SU_2 群。令

$$q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}, \quad (18.1)$$

q^i 的上标 $i = 1, 2, 3$ 既可以表示味道 ($q^1 = u, q^2 = d, q^3 = s$), 也可以表示颜色。我们将说明,强作用对变换

$$q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \rightarrow uq \quad (18.2)$$

有某种不变性(对味道是近似不变的,对颜色是严格不变的),其中 u 是一个 3×3 矩阵,

$$u = (u^a_b) = \begin{pmatrix} u^1_1 & u^1_2 & u^1_3 \\ u^2_1 & u^2_2 & u^2_3 \\ u^3_1 & u^3_2 & u^3_3 \end{pmatrix}, \quad (18.3)$$

并且

$$u^\dagger u = 1, \quad \det u = 1, \quad (18.4)$$

u 的全体 $\{u\}$ 构成 SU_3 群.

下面我们先讨论 SU_3 群表示的一些性质,在下一节中再讨论它们的应用.

定义 1 $T^{i_1 \dots i_n}_{a_1 \dots a_m}$ 称为 (n, m) 级的混合张量,假使当 $q^a \rightarrow u^a_b q^b$ 时,

$$T^{i_1 \dots i_n}_{a_1 \dots a_m} \rightarrow u^{i_1}_{j_1} \dots u^{i_n}_{j_n} (u^\dagger)^{b_1}_{a_1} \dots (u^\dagger)^{b_m}_{a_m} T^{i_1 \dots i_n}_{b_1 \dots b_m}. \quad (18.5)$$

下面列举出三个特殊的张量.

1. δ^i_j 是一个 $(1, 1)$ 级张量(利用 $u^\dagger u = 1$ 可以验证它的张量性质: $\delta^i_a \rightarrow u^i_j (u^\dagger)^b_a \delta^j_b = u^i_j (u^\dagger)^j_a = \delta^i_a$).

2. ϵ^{ijk} 是一个 $(3, 0)$ 级张量. 它的定义是:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的偶排列;} \\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的奇排列;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(利用 $\det u = 1$ 可以验证 ϵ^{ijk} 的张量性质:

$$\epsilon^{ijk} \rightarrow \epsilon^{abc} u^i_a u^j_b u^k_c = \epsilon^{ijk} \det u = \epsilon^{ijk}).$$

3. ϵ_{ijk} 是一个 $(0, 3)$ 级张量,它的定义是:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的偶排列;} \\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的奇排列;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(利用 $\det u^\dagger = 1$ 可以验证 ϵ_{ijk} 的张量性质).

定义 2 $T^{i_1 \dots i_n}_{a_1 \dots a_m}$ 称为可约张量,假如它是一个 (n, m) 级张量,

并且

$$T_{b_1 \dots b_t}^{i_1 \dots i_s} = \Sigma T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n} \text{ 乘 } (\delta_{ij}, \epsilon^{abc}, \epsilon_{ijk}) \quad (18.6)$$

是一个不为零的 (s, t) 级张量, 其中 $s + t < n + m$. 否则 $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$ 称为不可约张量. 不可约张量有下面两条性质:

1. $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$ 对任何一对上指标 (i_α, i_β) , 或任何一对下指标 (a_r, a_s) 是对称的. (这是显然的, 否则以 $\epsilon_{i_\alpha i_\beta} a_{m+1}$ 或 $\epsilon^{a_r a_s} a_{m+1}$ 乘 $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$ 时, 结果不等于零.)

2. 用 δ^a_i 缩并 $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$ 任何一对上下指标时, 结果为零.

表 18.1 列出了一些不可约张量的例子.

表 18.1

张 量	级	(表示的)维数	说 明
1	(0, 0)	①	
T^i	(1, 0)	③	
T_a	(0, 1)	③	1
T^i_a	(1, 1)	⑧	2
T^{ij}	(2, 0)	⑥	
T_{ab}	(0, 2)	⑥	
T^{ijk}	(3, 0)	⑩	3
T_{abc}	(0, 3)	⑩	
T^{ij}_{ab}	(2, 2)	⑳	4

说明 1. T^i 和 T_a 是两种不同的张量, 这是与 SU_2 不同的 (参考本节后面的讨论).

2. T^i_a 有 9 个分量, 但是它们满足条件 $T^i_i = 0$, 所以只有 8 个独立分量.

3. T^{111} 型独立分量有 3 个, T^{112} 型独立分量有 6 个, T^{123} 型独立分量只有一个, 所以 T^{ijk} 共有 10 个独立分量.

4. T^{ij}_{ab} 有 $6 \times 6 = 36$ 个分量, 但是它们满足 9 个条件 $T^{ij}_{aj} = 0$, 因此 T^{ij}_{ab} 有 27 个独立分量.

对一个维数为 ⑩ 的不可约张量 $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$, 我们可以选出 N 个线性独立的分量 $v_1 \dots v_N$, 并把它们写成