智能模拟

复旦大学　谢铭培

国防工业出版社

智 能 模 拟

复旦大学 谢 铭 培

国 防 工 业 出 版 社

智 能 模 拟

复旦大学 谢铭培

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第 074 号

解放军第七二二六工厂印刷 内部发行

*

$787 \times 1092^{1}/_{16}$ 印张 $11^{6}/_{8}$ 272 千字

1981 年 8 月第一版 1981 年 8 月第一次印刷 印数 1-4,000 册

统一书号：N15034（四教 72）定价 1.25 元

内 容 简 介

本书介绍了智能模拟方面的一些基础知识及基本原理。

全书共分五章。第一章介绍了智能模拟的概况及必备的数学知识。第二章详述了问题求解的各种方法。第三章系统地介绍了自动定理证明的基本知识。第四章简要介绍了模式识别的统计决策方法及模式文法。并介绍了自动机在模式识别中的应用。第五章概要地介绍了智能机器人。如机器视觉、对答系统等。

本书可作为高等学校有关自动控制、计算机科学与工程等专业的教科书。也可供从事这方面研究工作的科技人员参考。

前　言

本书系高等学校工科电子类自动控制专业统编教材之一。但它也可作为其他理工科计算机科学、计算机工程、心理学等有关专业的选修课教材。也可作为有关专业研究生的参考书。

智能模拟（即人工智能）这门学科是一门较新的学科，也是一门较艰难的学科。随着我国科学技术的迅猛发展及计算机科学技术的日益普及，掌握这门学科知识的欲望也在提高。所以有必要编写这门教材。这就是我们编写这门教材的宗旨。但考虑到我国的现状，我们只介绍其基本原理，而对如何用语言（如LISP,FORTRAN）来实现它，则没有加以介绍。

在第一章中简要地介绍了本课程必备的集合论和图论的知识。这是为了照顾到有些学生的数学知识欠缺之故。在第二章中较详细地介绍了问题求解的几种方法。在第三章中较系统地介绍了自动定理证明的基本知识。例如，命题演算、谓词演算及分解原理。在第四章中扼要地介绍了模式识别方法。例如，决策论方法及模式文法。还介绍了自动机的基本知识及其与形式语言的关系。第五章在智能机器人的标题下，介绍了多种技术，且较多地介绍了对答系统。

本课程的学时数为54学时。第一章为6学时；第二章为12学时；第三章为12学时；第四章为12学时；第五章为12学时。这样安排是很紧凑的。仅供讲课教师参考。他们可以根据各自的具体情况灵活安排。例如：(1) 已学过《离散数学》课程，则第一章可以不讲，让学生自学，熟悉一下基本符号即可。(2) 从知识的连贯性角度看，各章几乎是独立的。甚至于在一章中（除了第三章而外）有些节也是独立的。删去某些章节并不影响知识的系统性。所以可以只选择其中几个章节详细讲解。

在各章之后附有习题。书后还附有词汇索引。读者还可从书后所附的参考文献中找到其他参考文献。

清华大学计算机工程与科学系林尧瑞、石纯一、刘植桢、黄昌宁等同志审阅了本书并提出许多宝贵意见。特此深表感谢。

对本书进行审阅工作的还有：复旦大学计算机科学系朱洪（第一章）、吴立德（第二章）、廖有为（第三章和第四章）和倪重匡（第四章）等同志。他们提了许多宝贵意见。另外，复旦大学计算机科学系自动化教研室的李宗葛、陆道政、许时明、王松年、王宗彩等教师为编写该书协助搜集了许多资料。特表谢意。

由于作者水平有限，必有许多错误之处。望请读者多多批评指正。

编　者

1980.5.

目　录

第一章　概论及数学知识准备*

1.1　概　　论

智能模拟，又名**人工智能**或**机器智能**，是研究使机器能够做一些需要人类的智慧才能完成的工作的一门学科。“需要人类的智慧才能完成”这点相当重要。人类原先幻想孙悟空的“千里眼”和“一觔斛翻十万八千里”，现在的雷达技术、飞机、火箭等业已实现。但是，雷达、飞机，火箭等等都是人的眼、腿等等五官和四肢的延伸。它们并不是大脑的智慧劳动才能完成的。因此，这方面的工作不属于智能模拟这门学科的范畴。但是，什么工作才算是智慧劳动？这个问题至今仍未明确。四则运算难道不是智慧劳动吗？但是，一般的计算器都能做这项工作，却算不上智能机。因而，确切地说，什么是智能模拟，至今都没有一个很明确的定义。随着科学技术的突飞猛进，对于“智能模拟”的定义要求也愈来愈高了。在现阶段，问题求解，定理证明，博奕、模式识别、判决、自然语言理解，对答系统以及景物分析等等都是属于智能模拟这门学科的范畴。

直到目前为止，智能活动的奥秘仍未揭开。但是，却引起科学家的重视。人（包括某些动物在内）如何用其大脑（物质甚础）来进行智能活动的？甚至连早期人类都还不知道“思考问题是通过大脑”的情况下，人类也已经在进行智能活动了。这些奥秘引起了心理学家和生理学家的重视。在 1943 年，W.S.McCulloch 和W.H.Pitts 就提出了神经网络的数学模型。他们从神经网络的生物原型出发，最早最明确地探索了脑功能。有人把这一尝试看作是智能模拟的开端。

不过，从 Leibnitz 开始，就考虑用机械性的办法来证明定理了。后来，人们做了一番努力，试图寻找能够从一个公理系统中得出全部永真公式的算法。但以失败而告终。到了三十年代，Herbrand 找到了一个算法。如果某个公式是永真公式，则利用这个算法可以验证它。但若它不是永真公式，则该算法可能永不停止。由于当时的计算技术条件限制，都无法得到较好的效果。后来人们又做了一番努力，也因效率太低而未能实用。1957 年心理学家 Allen Newell、Herbert Simon 和 J.C.Shaw 合作编制了名为“逻辑理论家”（LT）的程序，当时就成功地证明了 Whitehead 和 Russell 的一部数学名著《数学原理》第二章 52 个定理中的 38 个。另 14 个定理由于当时计算机的限制未能证出。直到 1963 年才在一部较大的计算机中最终全部证明了这 52 个定理。LT 模拟了数理逻辑在证明定理时的思维规律，把一个问题分解为若干个子问题，而后根据记忆中的公理或已被证明了的定理，用代入法（如把常量代入变量）、替换法（以一个逻辑符号替换另一个逻辑符号）来求解这些子问题，从而最终解决这个问题。

1959 年 H.Gelernter 发表了证明平面几何问题的程序。J.Slagle 于 1963 年发表了求不

---

* 本章主要参考文献见“参考文献”6、11、12、15、16 和 17。

不定积分的搜索程序，编进了人们求不定积分的许多技巧。结果，机器的解题行为和人很相似。

到了1965年，Robinson提出了分解原理，使定理的自动证明又有了重大突破。对这个方法，人们也提出了许多改进办法，使之达到相当实用程度。

1976年美国伊利诺斯大学数学家K.Appel和W.Haken用计算机证明了“四色定理”，轰动了世界数学界。1878年A.Cayley在伦顿的数学会上提出“在任意地图上着色，只需四种颜色就够了”的猜想。1879年A.B.Kempe发表文章加以证明了。可是在1880年P.J.Heawood指出“该证明有误，只能说明‘五色就够了’，并不能允分证明‘四色已够了’的结论”。从此，“四色猜想”仍是一个猜想。但是Kempe的证明方法仍然是可取的。许多数学家做了不懈的努力。这么过了近百年，K.Appel和W.Haken才应用新算法，在计算机上花了一千二百小时的计算时间才得到了证明。这就大大推动了以计算机为基础的智能模拟的发展。即使这样，人们仍然提出这只是一个计算机辅助的定理证明，并非机器有智能，智能的主要角色还是人。因此，人们提出了计算机与人如何合理分工的问题。把一些繁琐的细微工作让给计算机做，它是一丝不拘的。而人则做一些创造性的工作。即让机器协助人工作。

IBM的A.Samnel让计算机向人学习下跳棋，结果机器于1962年击败了美国某州的跳棋冠军。

在下五子棋方面，计算机已达到相当高的水平。没有经过深造的人是很难胜过它的。

在下国际象棋方面，让计算机记住开局和残局的棋谱，并给予一定训练，也有相当的下棋水平。国际上有时还举行计算机象棋比赛。

在以上所述的问题求解方法中，绝大部分属于演绎法思维范畴。而如何让机器像人那样从观察到的许多事实中概括出一般性规律来，这种归纳法思维过程，至今仍是很大的难题。

让机器像人的视觉、听觉那样来识别文字、图形、脸谱、声音等等这类模式识别方面的研究，已经有了可观的成就。已经可以使机器辨认英文印刷体和某些手写体文字，并应用于文件、资料检索、自动分类、自动排版，自动信件分检等等。汉字的识别也有很大的进展。在日本已有相当的研究。用机器来识别癌细胞、染色体，已经是现实了。它的广泛应用将造福于人类。不过，在模式识别方面虽然应用较广，但是还需要人们花很大的努力。例如，机器对虎视眈眈及温情脉脉的眼神至今还未能分辨。

模式识别的研究方法很多，主要有三个类型。一类是从数学角度出发，称为统计决策方法，有人称之为“数学式的模式识别”。它解决了许多实际问题，而且对图形分类的统计理论也做出了贡献。但是其对特征的抽取没有建立统一的理论，而且当特征矢量的维数高时，往往就遇到困难。另一类是从人识别图形的角度考虑问题的。不仅要辨认出某些特征是否存在，而且要看特征之间的结构关系。正象要理解一句话必须有文法规则一样，识别一个模式，就是用一些简单的模式元和一定的“文法规则”来描述大量复杂的模式。这种方法称为句法结构方法。第三类是所谓机器视觉。让机器象人一样，根据二维图片识别其所描述的三维物体，例如长方体以及景物。

让机器理解自然语言（包括书写文字的语言及有声语言）也是科学工作者的努力目标。五十年代初的机器翻译，简单化地采用“巨型字典”。但一字多义、一词多义，常无法理解其义而失败。Chomsky的“短语结构文法”和“转换文法”，对理解自然语言的研究起了

很大作用。但是着重语法分析，往往出现机器在答话时语法完全正确，但却毫无意义而十分可笑。因而，人们就转至语义方面的分析。在自然语言中，有时是不符合语法规则的，但对方却能理解其语义而不苛求。1972年 T.Winograd 的理解自然语言的程序是把语法、语义和推理规则以互相交织的方式运用的。使机器的理解力更强了。目前，仍是处于试验阶段。对有声语言方面，还有语气问题。而对答系统中，还有上下文关系问题。总之是相当难的课题。总的说来，这样的机器还属于低能儿。

在神经元研究方面，目前也仅是一些设想的模型。有些生理学家还对人的记忆机理进行探讨。但是，有许多奥秘——回忆、联想记忆等都未探明。可以说，在神经元的模拟方面，人类还是门外汉。

智能模拟的研究方法大约从三方面着手。一方面是从数学的角度来模拟人的某些智能。有时用了高等的深奥的数学。另一方面是研究人类在智能活动过程中的心理活动，从而模拟它。再一方面是研究人的神经的生理机能，为智能模拟提供重要的物质依据。这三方面研究，往往是互相结合的，当然也有所侧重。

智能模拟的研究甚至于引起哲学方面的争议。关于机器能否模拟人的智能？机器的智能可否超过人？这些问题至今都还在争论不休。甚至有人认为人也是机器。也有人认为机器如能超过人的智能，这是对人类尊严的污辱。有人主张智能活动也是物质运动的一种形式，因此是可认识，可模拟、可超过的。说不定这场争论会进行到人类灭亡才能停止。

智能模拟的研究确实有很大的难度。进展也是缓慢的。但是在研究的过程中与工程技术，工农业等各方面的实际应用课题结合起来，则会取得不可估量的成效。

1.2　集合论的基本概念

1.2.1　集合与成员

集合　把一些可区别的客体按某些共同特性加以汇集，而具有共同特性的这些客体的全体就称为**集合**，或简称为**集**。

成员　组成一个集合的客体称为该集合的**成员**，或称为**元**。

集合表示法　集合的表示法有二种：

(1) 把所有的成员加以列举，或者列举出其中的某些成员而其他成员可一目了然地类推，再用一对{ }括起来。

例 1.1　$\{a,b,c\}$表示有三个成员 a,b,c 的集合。

　　　$\{1,2,3\cdots\}$表示成员为自然数的集合。

(2) 用公式的形式 $\{x|P(x)\}$ 表示。读为“使得 $P(x)$为真的所有客体 x 的集合”或“满足特性或条件 $P(x)$的所有客体 x 的集合”。

例 1.2　$\{x|x=2^n, n=1,2,3,\cdots\}$表示成员为 2,4,8,…的集合。

用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示成员。用符号$\in$表示成员属于集合，用符号$\notin$表示成员不属于集合。

例 1.3　$a\in A$ 表示 a 是集合 A 的成员。而 $a\notin B$ 表示 a 不是 B 的成员。

用$|A|$表示集合 A 的成员个数。成员个数是有限个的集合称为**有限集合**，用$|A|<\infty$表

示。成员个数是无限个的集合称为**无限集合**，用$|A|=\infty$表示。

例 1.4　$A=\{0,1,2,\cdots,9\}$　则$|A|=10$

$B=\{x|x=2^n,n=1,2,3,\cdots\}$　则$|B|=\infty$。

集合相等　两个集合相等的充要条件是它们有共同的成员。

例 1.5　$\{0,1,\cdots,9\}=\{9,8,\cdots,1,0\}$

$\{0,1\}=\{x|x^2-x=0\}=\{x|x$为一位二进制数字$\}$

$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}=\{1,3,2,2\}\neq\{1,2,4\}$

注意：(1) 集合相等不是指集合的成员个数相等，也不要求其顺序相同，也不要求分类特性相同。

(2) 用第二种表示法$\{x|P(x)\}$比用第一种表示法的信息量多一些。

空集　没有成员的集合称为**空集合**，或**空集**。用ϕ或$\{\ \}$表示

例 1.6　$\{x|x<1$ 且 $x>2\}=\phi$　$\{x|x\neq x\}=\phi$

注意：(1) $\{0\}\neq\phi$　因有成员为 0 的集合不是空集合。

(2) $\phi\neq 0$　因空集是一个集合，不是数值 0。

(3) $\{\phi\}\neq\phi$　集合中有成员（即空集合）存在，故不是空集。（此处的成员是一个集合，已有类的概念了。）

类　集合的类是一个其成员本身也是集合的集合。即集合的集合也是集合，称为**集合的类**，简称为**类**。用斜体字母表示类。由于类也是集合，所以有时也不特称为类，而统称为集合。

例 1.7　$\mathcal{A}=\{\{0\},\{1,2\},\{3,4,5\},\cdots\}$

$\mathcal{B}=\{A|A=\{x|x$ 是某个英文单词中的字母$\}$

注意，此处$\mathcal{B}\neq\{A,B,C,\cdots,X,Y,Z\}$。而且$\{x,y,w\}\notin\mathcal{B}$，因为$x,y,w$组合不成一个英文单词。不过，单词 *act*，*cat*，*tact* 都给出了同一集合$\{a,c,t\}\in\mathcal{B}$。

1.2.2　蕴含

蕴含　集合 A **蕴含于**集合 B 的充要条件是集合 A 的每个成员都是集合 B 的成员。记为$A\subseteq B$。

如果集合 A 蕴含于集合 B 的话，也可称为集合 B **蕴含着**集合 A。记为 $B\supseteq A$。因而 $A\subseteq B$ 与 $B\supseteq A$ 是等价的。

子集　若 $A\subseteq B$，则称 A 是 B 的**子集合**（或称**子集**）。称 B 是 A 的**上界集合**（或**超集合**）。

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**。记为 $A\subset B$。

若 $A\subseteq B$ 不成立，则记为 $A\nsubseteq B$。

全称　为了简化叙述，常使用全称符号$\forall$。$\forall$表示“全体”、“任一个”、“所有的”或“每一个”。

例如，“对于集合 A 的每一个成员，也都是 B 的成员”就可简述为“$\forall x\in A$，有$x\in B$”。

例 1.8　定理“对于所有的集合 A 而言，空集都是 A 的子集”就可简述为“$\forall A$，则 $\phi\subseteq A$”。

存在　为了简化叙述，常使用存在符号$\exists$。$\exists$表示“存在着”、“有一个”、“存在着一个”或“可找到一个”。例如，“对于任何非空集合 A，总可找到一个成员属于 A”就可简述为“$\forall A\neq\phi$，则 $\exists x\in A$”。

例 1.9 “A 是 B 的真子集的必要条件是在 B 中至少存在着一个成员，该成员不属于 A”就可简述为“$A \subset B$ 的必要条件是 $\exists x \in B$，使得 $x \notin A$。”

定理 1.1 $A = B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq A$。

证明：必要性是显然的。从略。

证充分性。设 $A \neq B$，则 $\exists x \in A$，使得 $x \notin B$。或者 $\exists x \in B$，使得 $x \notin A$。前者与 $A \subseteq B$ 有矛盾，后者与 $B \subseteq A$ 有矛盾。

1.2.3 幂集

集合 A 的所有子集所组成的类称为 A 的**幂集**。记为 2^A 或 $P(A)$。

即 $P(A) \triangleq \{B \mid B \subseteq A\}$

其中，$\triangleq$ 表示“根据定义等于”。

例 1.10 若 $A = \{1,2,3\}$，则 $2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

定理 1.2 如 $|A| = n < \infty$，则 $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^n$

将这个证明留给读者。

1.2.4 集合的运算

并集 也称为**和集**，记为 $A \cup B$。定义如下：

$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\} \tag{1.1}$$

交集 **交集**记为 $A \cap B$，定义如下：

$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\} \tag{1.2}$$

若 $A \cap B \neq \phi$，则称 A、B 相交。

若 $A \cap B = \phi$，则称 A、B 不相交。

直和 **直和**记为 $A + B$，定义如下：

$$\text{若 } A \cap B = \phi\text{，则 } A + B \triangleq A \cup B。\tag{1.3}$$

差集 记为 $A - B$，**差集**定义如下：

$$A - B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\} \tag{1.4}$$

对称差 集合 A 与 B 的**对称差**也是一个集合，记为 $A \ominus B$，定义如下：

$$A \ominus B \triangleq (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \tag{1.5}$$

补集 若 $A_i \subseteq A$，则 $A - A_i \subseteq A$。置

$$A_i^c \triangleq A - A_i \tag{1.6}$$

称 A_i^c 为 A_i 的关于 A 的**补集**。有时也用 $\overline{A}_i$ 记之。

显然 $(A_i^c)^c = A_i$

为了更易理解以上运算的定义，在图 1.1 中用图形表示之，其中的阴影部分是运算结果。

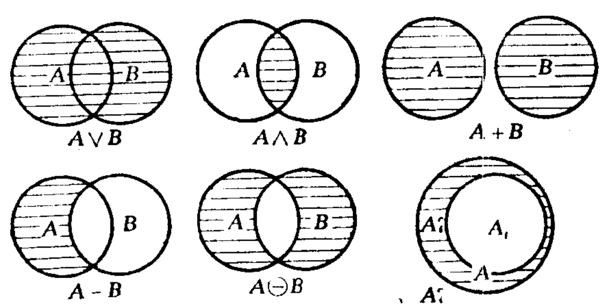

图 1.1 集合运算的图解

例 1.11 设 $A = \{a,b,c\}$，$B = \{c,d,e\}$，$C = \{f\}$，$D = \{a\}$，则 $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$，$A \cap B = \{c\}$，$A + C = \{a,b,c,f\}$，$A - B = \{a,b\}$，

$A\ominus B=\{a,b,d,e\}$，$D^c=\{b,c\}$（在此，D^c表示D关于A的补集）

1.2.5 全集

如果在所研究的场合中，由所考察的客体而构成的集合全都是某一个固定集合U的子集合，则称该固定集合U为所考察集合的**全集**。

例1.12 在研究的范围中有男、女、老年、青年、壮年、少年、儿童、婴儿、学生、教师、大学生、职员、工人等几类，则全集为“人类”。

定理1.3 令A为集合，U为全集，则 $A\cup A^c=U$，$A\cap A^c=\phi$。

1.2.6 n 值运算

对某集合M的任意 n 个成员施以被定义过的任何运算操作，所得的“结果”仍然是原来M的唯一的一个成员，称该运算操作为在M中的 **n 值运算**。

特别地，$n=2$ 时的运算，称为 **2 值运算**。

例1.13 $A,B\in P(U)$，A，B对以上的所有运算所得的新的集合也是 $P(U)$ 的唯一的某一成员。因而，以上所定义的运算操作为在 $P(U)$ 中的 n 值运算。

1.2.7 加索引集合

加索引集合 集合A的子集用加索引的下脚标来表示，再将这些下脚标汇集成一个集合I。则称I是**索引集合**，I的成员是**索引**。称集合A的子集所组成的类为**加索引集合**。

用数学形式定义如下：

令 $\mathcal{A}$ 是集合 A_{s_1}，A_2，A_{s_3}，…的类，其中，如 $s_i=s_j$ 时则 $A_{s_i}=A_{s_j}$。则$\mathcal{A}$的成员就可由集合 $I=\{s_1,s_2,s_3,\cdots\}$的成员来等价。可写为 $\mathcal{A}=\{A_i\,|\,i\in I\}$。

引入索引集可提供方便。索引集比加索引集要简单些。正象查阅资料一样，查索引号总比查原名称要简单得多。甚至于有时可将某些集合的运算等价于索引集的运算。这就提供更大的方便了。

例1.14 集合 $A=\{a,b\}$的四个子集为$\{\ \}$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，将它们写为 B_{00}，B_{01}，B_{10} B_{11}。则 $I=\{00,01,10,11\}$。加索引集写成如下形式：

$$P(A)=\{B_i\,|\,i\in I\}$$

其中 $I=\{i\,|\,i$ 是二进制数整数，且 $00\leqslant i\leqslant 11\}$。

从例中可看出，如果从索引集中找到索引10，则就等价于找到了A的子集$\{b\}$。

例1.15 已知 $I=\{a,b,c\}$，$B=\{A_i\,|\,i\in I\}$。将类 B 具体地列出其所有的成员，则为 $B=\{A_a,A_b,A_c\}$。

∪拓广 有了索引集I，可将并运算加以拓广为

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{a\,|\,a\in A_i,\exists i\in I\} \tag{1.7}$$

∩拓广 有了索引集I，也可将交运算拓广为

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{a\,|\,a\in A_i,\forall i\in I\} \tag{1.8}$$

例1.16 若 $I=\{1,2,3,4\}$，且$A_1=\{a,b\}$，$A_2=\{a,c\}$，$A_3=\{a,d\}$，$A_4=\{a,b,c,e\}$，则

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{a,b,c,d,e\}$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{a\}$$

1.2.8 划分

若$\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in I,\ A_i\neq\phi,\ A_i\subseteq A\}$而且 $\bigcup_{i\in I}A_i=A$，以及$A_i\cap A_j=\phi$（$\forall\ i,j\in I$，$i\neq j$），则称$\mathcal{A}$是集合 A 的**划分**。

例 1.17　$A=\{1,2,3,4\}$，A 的划分有如下几种：

$\mathcal{A}_1=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$；$\mathcal{A}_2=\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$；$\mathcal{A}_3=\{\{1,2,3,4\}\}$；$\mathcal{A}_4=\{\{1,4\},\{2,3\}\}$；$\mathcal{A}_5=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$等等。它们各个都可成为 A 的划分。

1.2.9 集合的代数式

集合运算的一些基本代数式列于后（证明留给读者）：

$$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A \tag{1.9}$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \qquad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \tag{1.10}$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \qquad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{1.11}$$

$$A\cup A=A \qquad A\cap A=A \tag{1.12}$$

$$A\cup\phi=A \qquad A\cap\phi=\phi \tag{1.13}$$

$$A\cup U=U \qquad A\cap U=A \tag{1.14}$$

$$A\cup A^c=U \qquad A\cap A^c=\phi \tag{1.15}$$

$$\phi^c=U \tag{1.16}$$

$$U^c=\phi \tag{1.17}$$

$$(A^c)^c=A \tag{1.18}$$

$$A\cup(A\cap B)=A \qquad A\cap(A\cup B)=A \tag{1.19}$$

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c \qquad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c \tag{1.20}$$

1.2.10 有序偶

集合的成员是不考虑其顺序的，如$\{2,3\}$和$\{3,2\}$是等价的。但有些场合却需要考虑顺序的。如解析几何中表示点的坐标就是考虑顺序的，$(2,3)$与$(3,2)$所定义的点是不同的。

用(a,b)来表示**有序偶**。有序偶的成员之前后顺序不可调。a 和 b 的有序偶 (a,b) 可用集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$来表示。称 a 是(a,b)的第一坐标，b 是 (a,b) 的第二坐标。

可见，$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a,b\},\{a\}\}=\{\{b,a\},\{a\}\}$。但是$(a,b)\neq\{\{b\},\{a,b\}\}$（除 $a=b$ 而外）。

有序偶相等可如此定义。$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$的充要条件是 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$。

例 1.18　有序偶$\{\{a\},\{a,b\}\}$与$\{\{c\},\{d,c\}\}$相等，则 $a=c$，$b=d$。

例 1.19　$(a,a)=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\}$。注意，$\{\{a\}\}\neq\{a\}$。

无序偶则不考虑其顺序，记为$\langle a,b\rangle$。$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$。

1.2.11 笛卡尔积

笛卡尔积又称**直积**，记为 $A\times B$。集合 A 和 B 的笛卡尔积定义如下：

$$A\times B\triangleq\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\} \tag{1.21}$$

式（1.21）**是有序偶的笛卡尔积**。

无序偶的笛卡尔积，记为 $A\triangle B$，定义如下：

$$A\triangle B\triangleq\{\langle a,b\rangle\mid a\in A,b\in B\} \tag{1.22}$$

例 1.20　若 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$，则

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$
$$A\triangle B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle\}$$

例 1.21 若 $A=\{x,y,z\}$，则

$$A\times A=\{(x,x),(x,y),(x,z),(y,x),(y,y),(y,z),(z,x),(z,y),(z,z)\}$$
$$A\triangle A=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle x,z\rangle,\langle y,y\rangle,\langle y,z\rangle,\langle z,z\rangle\}$$

可见，如$|A|=n$，则$|A\times A|=n^2$，$|A\triangle A|=n(n+1)/2$。

n 个集合的直积 n 个集合的笛卡尔积，也称为 **n 个集合的直积**，是一个 n 元组。n 个集合 A_1，A_2，A_3，…，A_n 之间的直积定义如下：

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\triangleq\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_1\in A_1,a_2\in A_2,\cdots,a_n\in A_n\}\tag{1.23}$$

例 1.22 若$A=\{a,b\}$，则 $A\times A\times A=\{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b),(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}$

其中 $A\times A\times A$ 可简写为 A^3。若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 可简写为 A^n。

1.2.12 对应与映照

对应与映照的概念，在数学方面仍是与集合论相并列的最基本的概念。不管是图论，还是智能模拟，都必须具备集合论、对应与映照的概念。

对应 对于二个集合 A 和 B，根据某规则 Γ，由 A 的各成员（$\forall a\in A$）分别确定 B 的子集 $\Gamma(a)$时，则称这个规则 Γ 为从 A 至 B 的**对应**。称对于 $a\in A$ 所确定的 $\Gamma(a)$（$\subseteq B$）为 a 关于 Γ 的**象**。这时 A、B 分别称为对应 Γ 的**始集合**和**终集合**。图 1.2 可以形象化地表现对应的概念。

对应的符号表示如下：

$$\Gamma: A\to B\tag{1.24}$$

注意，对于对应 $\Gamma: A\to B$ 而言，即使 a，$b(a\neq b)\in A$，$\Gamma(a)=\Gamma(b)$却可能存在，而且使得 $\Gamma(a)=\phi$ 的 $a(\in A)$也是存在的。

若从 A 至 B 的两个对应 Γ_1 及 Γ_2，对于任一 $a\in A$，$\Gamma_1(a)=\Gamma_2(a)$ 都成立，称 Γ_1 与 Γ_2 相等。记为 $\Gamma_1=\Gamma_2$。

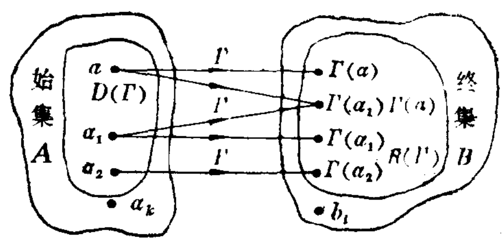

图 1.2 集合之间的对应

对于对应 $\Gamma: A\to B$ 而言，由

$$D(\Gamma)\triangleq\{a\mid a\in A,\ \Gamma(a)\neq\phi\}\tag{1.25}$$
$$R(\Gamma)\triangleq\{b\mid b\in\Gamma(a),\ a\in D(\Gamma)\}\tag{1.26}$$

所定义的集合 $D(\Gamma)(\subseteq A)$及 $R(\Gamma)(\subseteq B)$分别称为 Γ 的**定义域**和**值域**。可参看图 1.2。

显然，如果 $\Gamma(a)=\phi$ 的 $a\in A$ 不存在的话，即对任一 $a\in A$，在 B 中都有其象存在（即 $\Gamma(a)\subseteq B$），则 Γ 的始集 A 就是其定义域 $D(\Gamma)$。即 A 与 $D(\Gamma)$是一致的。

逆对应 在对应 $\Gamma: A\to B$ 中，如果关于每个 $b\in B$ 的集合 $\Gamma'(b)$由式

$$\Gamma'(b)\triangleq\{a\mid b\in\Gamma(a)\}\tag{1.27}$$

所定义的话，则确定了对应 $\Gamma': B\to A$。这个对应 Γ' 称为 Γ 的**逆对应**。记为 Γ^{-1}。还有，

$b \in B$ 关于 Γ^{-1}的象 $\Gamma^{-1}(b)$，称为 b 关于 Γ 的**原象**或**逆象**。

从该定义可见，由于有 $b \in \Gamma(a)$的限制（当然 $b \in R(\Gamma)$），所以 $\Gamma^{-1}(b) \neq \phi$。

映照　在对应 $\Gamma: A \to B$ 中，如果对于任一 $a \in A$，$\Gamma(a)$仅是由 B 的唯一的成员组成的话，则称这个对应 Γ 为从 A 至 B 的**映照**。

映照通常用小写拉丁字母 f，g 等表示。即 $f: A \to B$。

从定义可知，在 $f: A \to B$ 中，不仅对任一 $a \in A$，$|f(a)| = 1$，而且 $A = D(f)$。但是 $B = R(f)$不一定成立。

由于$|f(a)| = 1$，所以简写为 $f(a) = b$。

例 1.23　对于实数域 R，若有一个对应 $\exp(x)$（$x \in R$）的话，则这个对应是从 R 至其自身的映照。如用 f 表示，则对于任一 $x \in R$，写为 $f(x) = \exp(x)$。

满照　在 $f: A \to B$ 中，如果 $B = R(f)$，即值域与终集一致的话，称这个 f 为**满照**。也称 f 为**从 A 至 B 上的映照**。

$R(f) \subseteq B$ 且 $B \neq R(f)$时，就称 $f: A \to B$ 为**从 A 至 B 中的映照**。

一对一映照　在映照 $f: A \to B$ 中，对于任意的 a, a'，如果

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a') \tag{1.28}$$

时（其中记号⇒表示“可导出”之意），则称 f 为从 A 至 B 的**一对一映照**。

一一映照　既是满照又是一对一映照的映照称为**一一映照**。

例 1.24　从实数域R至自身的映照 f_1，f_2，f_3 由如下定义的话，

$$f_1(x) \triangleq x - 1, \quad f_2(x) \triangleq \sin x, \quad f_3(x) \triangleq x^3 - x^2$$

则 f_1 是从 R 至 R 的一一映照；f_2 既不是满照又不是一对一映照；f_3 是满照但不是一对一映照。

逆映照　一一映照 f 的逆对应 f^{-1} 称为**逆映照**。一一映照与逆映照的关系可用图 1.3 形象地表达。

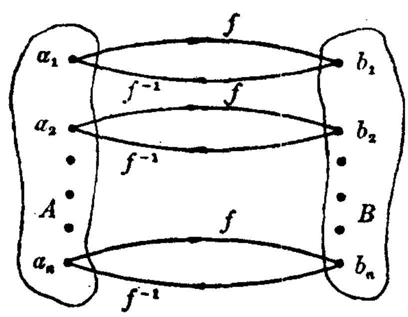

图 1.3　一一映照与逆映照

例 1.25　例 1.24 中的一一映照 $f_1(x) \triangleq x - 1$ 之逆对应 $f_1^{-1}(y) \triangleq y + 1$ 就是 f_1 的逆映照。

从定义可知，逆映照也符合“既是满照又是一对一映照”的条件的。因而，逆映照本身也是个一一映照。

其逆映照的逆映照就是一一映照它本身。即

$$(f^{-1})^{-1} = f \tag{1.29}$$

复合　设一一映照 $f: A \to B$，一一映照 $g: B \to C$。如果对任一 $a \in A$，先关于 f 映照至 $B(f(a) \in B)$，再关于 g 映照至$C(g(f(a)) \in C)$，则可找到一个从A 至 C 的一一映照 $h: A \to C$，使得 $h(a) = g(f(a)) \in C$。就称 h 是 f 与 g 的**复合**。用下式来表达这个复合映照 h。（参阅图 1.4，即可理解之）。

$$h = g \circ f \tag{1.30}$$

映照的复合是符合结合律的。即

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \tag{1.31}$$

通常情况下，一一映照的复合是不可交换的。即 $g \circ f \neq f \circ g$