高等院校选用教材系列

文科高等数学

袁小明 吴承勋 等编

科学出版社

高等院校选用教材系列

文科高等数学

袁小明　吴承勋 等编

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书是专门为师范及综合性大专院校文科大学生编写的一部基础数学教材. 随着科技及社会事业的发展，教育对文科学生掌握数学的要求也越来越高，本书深入浅出地介绍了文科大学生应掌握的数学基础知识，并且引导学生联系实际，利用所阐述的数学知识去解决现实生活中的具体问题，以提高文科学生理解数学和应用数学的能力. 读者对象为文科大专院校的师生.

图书在版编目（CIP）数据

文科高等数学/袁小明等编. -北京：科学出版社，1999. 1
ISBN 7-03-006951-X

Ⅰ. 文…　Ⅱ. 袁…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 23365 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

科地亚印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经销

*

1999 年 1 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
1999 年 1 月第一次印刷　印张：18 1/2
印数：1—4 000　字数：425 000

定价：28.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　言

长期以来，除了大学的理工科学生还在学习数学外，文科大学生是很少再接触数学知识了，这不能不说是一种遗憾，在经济、科技迅猛发展的今天，文科大学生若是仅靠中学时所学的那点初等数学知识是无法适应新时代生活的．正是从这一认识出发，我们经过一年多的酝酿为广大的文科大学生奉献上这本《文科高等数学》．

本书贯彻“导引”的思想，为读者充当近现代数学知识的“导游”，力求让广大文科大学生接触到较高中阶段更为深邃、更为广泛、更具有使用价值的高等数学知识，但更注重由表及里，由浅入深的阐释．其内容以实用，具有思想价值的近现代数学知识为主体，包括了组合论、图论、概率论、模糊数学、运筹学等等．考虑到文科大学生的特点，我们对每个篇章都作了深入浅出的介绍．相信文科大学生通过不太刻苦的阅读是能掌握书中内容的，对数学的本质也会有更深的理解．

本书在形式上打破了传统数学的体系，我们希望通过此书能向文科大学生提供今后工作所需的数学基本知识和基本技能，以及相应的数学思想方法，以利于他们利用这些思想方法去处理社会科学中的各种事件．

参与本书撰写工作的有：

第一章　孙联荣	第二章　钱纯青
第三章　吴承勋	第四章　万小岚
第五章　陆宗元	第六章　陆宗元
第七章　费鹤良	第八章　施永兵
第九章　刘俊杰	第十章　刘俊杰

文科数学是一门新兴学科，尚待不断发展和完善．由于我们理论水平与实践经验有限，书中定会有不足之处，望读者指正且不吝赐教！

本书愿为广大文科大学生做一块铺路石．

袁小明

目　录

第一章　数论与初等代数若干课题研究

数学是一门历史悠久，内容浩瀚的科学. 本章所讨论的数论和初等代数，可以说是整个数学的起点. 尽管我们是从文科学生的需要出发，介绍了一些数论的基础知识，然而也能使我们领略到其中丰富多彩的一面. 数论中的许多结论是那样的显而易见，但是要证明它却很艰难，以至在这个领域出现了数学中最多的、至今仍悬而未决的世界难题.

初等代数是大家所熟悉的，如数及其运算；式及其恒等变形；方程和不等式；函数和数列以及数学归纳法等等. 本书不是对这些内容的"炒冷饭"，而是选择几个典型课题，从不同的角度介绍它们的应用，并在这样的介绍中去表现它的思想方法，力求使文科的学生不至于觉得数学是枯躁无味、不可捉摸的，而是那样的有趣和有用，充满了美的感受.

第一节　自然数、因数和素数

我们知道数的概念的发展大致经历了以下的过程：

自然数→整数→有理数→实数→复数.

其中自然数：1，2，3，4，…是最基本的. 自然数反映事物的个数. 比如"3"，它是从反映包含三个东西的集合中抽象出来的，像 3 头牛，3 把椅子，3 本书等等. 它不依赖于这些集合里的对象的任何特殊性质，也不依赖于为了表示它所采用的符号. 可用"三"、"3"、"Ⅲ"等等.

自然数可进行运算，最常见的是四则运算. 四则运算中加法和乘法是基本的. 减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算. 关于加法和乘法有大家所熟知的 5 个基本定律：

1）　$a+b=b+a$；

2）　$ab=ba$；

3）　$a+(b+c)=(a+b)+c$；

4）　$(ab)\cdot c=a\cdot(bc)$；

5）　$a(b+c)=ab+ac$.

其中 1)和 2)分别称为加法的交换律和乘法的交换律；3)和 4)分别称为加法的结合律和乘法的结合律；5)称做乘法对于加法的分配律.

表示自然数的方法是进位制. 常用的进位制有十进制、二进制等等. 十进制是以 10 作为基数的. 一个小于 1 万的自然数 n，如其值为：$a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d$. 其中 a,b,c,d 分别是从 0 到 9 中的某一个整数，由于 $10^3,10^2,10$ 等可以通过 a,b,c 所在的位置表示出来，所以 n 可缩写成 $abcd$. 比如 $3\times 10^2+5\times 10+2=352$.

二进位制以 2 作为基数，这时，只有数码 0 和 1. 其它所有的数都用 0 和 1 来表示. 比

如十进位中的27,用二进制表示为11011.

由于二进制数,只有0和1两个数码,所以电子计算机中都应用二进制进行数的运算.

还有,如时间是用60进制计算的;有些物品的计数习惯是以12进制的,如铅笔以12支为1打,等等.

接下来我们来讨论自然数的性质.

两个自然数a和b,如果存在一个自然数p,使得$ap=b$,我们就称a是b的因数.比如,4是12的因数,因为存在自然数3使$4\times3=12$,反过来我们可以说12被分解成4和3.有些自然数能分解成除1和其自身以外的因数的乘积.比如$10=2\times5$,$21=3\times7$,$72=2\times2\times2\times3\times3$.但是有些自然数不能这样,它的因数只有1和它本身,比如,2,3,5,7,11,13,…等等.这样的数,我们称之为素数(或质数).除1以外,不是素数的数称之为合数.如4不是素数是合数,因为它可以分解成2×2,2是它的一个因数.6也是合数,因为它可以分解成2×3,2和3都是它的因数.很明显,每个合数都可以分解成素数之积,这是因为,若N是合数,则它可以分解成两个较小整数之积,若这两个整数为素数,结论已经成立.若这两个整数不是素数,而是合数,那么,每个合数又可分解为两个较小整数之积,这样做下去,直至所有的因数都是素数为止.

数学家喜欢追根刨底.对于素数容易产生的一个问题是,素数会不会只有有限个?如果只有有限个,那就可以设法把它们一个一个地找出来.然而,公元前3世纪,希腊数学家证明了"素数有无限个".其证明的方法是:假设只有有限个素数,比如有n个,不妨设它们是$P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$,于是,可以利用这n个素数去构成一个新的自然数A,方法是$A=P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdots P_n+1$.显然,$A$不同于$P_1,P_2,\cdots,P_n$中的每一个.$A$是不是素数,有两种可能.若$A$是素数,那表明在$P_1,P_2,\cdots,P_n$之外还有素数;若$A$不是素数,是合数,那它可以进行分解,而分解出来的素数不可能等同于$P_1,P_2,\cdots,P_n$,这也表明在$P_1,P_2,\cdots,P_n$之外还有素数.无论哪种情况都推翻了素数是有限的假设,从而证明它的反面必然是正确的,即素数有无限多个.

到目前为止,已知的最大素数是$2^{216091}-1$.

在数论中有一条很重要的定理,称为"算术基本定理":**每一个比1大的整数N,都可以分解成素因数的乘积;而且,如果不考虑素因数乘积的顺序,那么,这种分解式是唯一的.**

比如,360可以分解成$360=2\times2\times2\times3\times3\times5=2^3\times3^2\times5$,而且这个分解式是唯一的.

在自然数中又有偶数、奇数之分别,偶数是2,4,6,8,…;奇数是1,3,5,7,….

很容易验证:"偶数+偶数还是偶数";"奇数-奇数是偶数";"偶数+奇数是奇数"等等.

在素数中,除了2是偶数之外,所有的素数都是奇数,也就是说,是偶数的素数只有2一个.除2以外素数一定是奇数,但奇数却不一定是素数,比如9是奇数而不是素数.

因为奇数个奇数之和一定是奇数(想一想为什么?),且大于2的素数一定是奇数,所以奇数个大于2的素数之和一定是奇数.特别地,三个大于2的素数之和一定是奇数.同样,两个大于2的素数之和一定是偶数.

这些结论是如此的显然，以至我们不费吹灰之力就可以加以证明. 但是反过来成立吗？即：

A） 每一个大于或等于 6 的偶数，都可以表示为两个奇素数之和；

B） 每一个大于或等于 9 的奇数，都可以表示为三个奇素数之和.

可以证明 B)是 A)的直接推论. 事实上，假设奇数 $N\geqslant 9$，则 $N-3\geqslant 6$，而且 $N-3$ 是偶数，由 A)的结论，存在两个奇素数 P_1 和 P_2，使得：$N-3=P_1+P_2$，即 $N=3+P_1+P_2$，所以 B)成立.

命题 A)称为哥德巴赫猜想. 有人对 33×10^6 以内的每一个不小于 6 的偶数一一进行了验算，都表明它是正确的. 比如，$6=3+3$，$8=3+5$，$10=5+5$，$12=5+7$，$14=7+7$，$16=3+13$，$18=7+11$，…，等等.

但是，为了证明这对于所有不小于 6 的偶数都是对的，或者至少找出一个反例来否定它. 不知有多少数学家付出了毕生的精力，但迄今尚未得到最后解决.

下面我们再换一个角度来观察素数. 若两个素数间没有其它素数，我们就说这两个素数是相邻的. 于是我们就会问："两个相邻素数会相隔多远呢?"，"有多少对相邻素数正好相差 2 呢?".

第一个问题的回答是：相邻两个素数的间隔可以任意大.

我们通过证明 99 个连续自然数中没有一个是素数来说明本结论.

取这 99 个连续的自然数为

$$100!+2,100!+3,100!+4,\cdots\cdots,100!+100$$

（100! 是 1 到 100 的所有自然数的乘积，即：$100!=100\times 99\times 98\times\cdots\cdots\times 2\times 1$，读作 100 的阶乘）

由于 2 能整除 2 和 100!（100! 中含有因数 2），所以第一个数能被 2 整除；3 能整除 3 和 100!（100! 中含有因数 3），所以第二个数能被 3 整除；同理，第三个数能被 4 整除，以此类推，最后一个数能被 100 整除. 于是我们得到这连续 99 个自然数之中没有一个是素数. 把这一思想用于制造出更多的这样连续的自然数，比如，999 个，9999 个，……，就可使得相邻两个素数的间隔可以任意大.

对于第二个问题，像 5 与 7，11 与 13，17 与 19，29 与 31，等等，都是相差 2 的素数对，这样的素数我们称之为孪生素数. 人们相信，存在无穷多个这样的素数对. 但至今为止，这个结论还没有得到证明，而且，在解决这个问题的方向上，还根本谈不上有什么好的办法.

在数论中，是否有无限多个 n^2+1 这种形式的素数？是否在 n^2 和 $(n+1)^2$ 之间总有一个素数？这些问题到现在还没有得到解决.

应用与练习(一)

1. 将下列二进制数转换成相应的十进制数.

（1） 1101　　（2） 10101

（3） 11010　　（4） 100011

2. 将下列十进制数转换成相应的二进制数.

(1) 12　　(2) 23

(3) 60　　(4) 95

3. 所有的奇数都是素数吗?

4. 所有的偶数都是合数吗?

5. 用下列给出的大于 6 的偶数来验证哥德巴赫猜想.

(1) 16　(2) 60　(3) 84　(4) 124

6. 试写出所有二位数以内的孪生素数对.

7. 所谓完全数是指这样的数,它的所有因数(除了该数本身)的和等于这个数.试判断下列数中哪些是完全数?

(1) 6　(2) 16　(3) 20　(4) 28　(5) 42

第二节　最大公约数与最小公倍数

前一节我们已经提到,对于正整数 a,b,如果存在正整数 p,使得 $ap=b$,我们就称 a 是 b 的因数,或称 a 能整除 b,称 b 是 a 的倍数.如果 c 是两个正整数 a,b 公共的因数,即 c 能整除 a,也能整除 b,那么称 c 是 a 和 b 的公约数,公约数中最大的一个,叫做 a 与 b 的最大公约数,记为 (a,b).例如

$$36=2\times2\times3\times3 \qquad 30=2\times3\times5$$

36 和 30 两数的公约数有 1,2,3,6,而 6 是公约数中最大的.所以 36 和 30 的最大公约数是 6.

又如　$25=5\times5$,$54=2\times3\times3\times3$,所以 25 和 54 的公约数只有 1,1 就是它们的最大公约数.如果两个数的最大公约是 1,那么就称这两个数互质.25 和 54 是互质的.

如何求两个数的最大公约数呢?我们先把这两个数分别分解素因数.可以用素数 2,3,5,7,11…(按这样的顺序)去除被分解的数,直到求得一个因数为止.比如,分解 455 的因数.首先,2 不是它的因数,3 也不是它的因数,5 是它的一个因数,$455=5\times91$;接着找 91 的因数.它的最小素因数是 7,$91=7\times13$,故 $455=5\times7\times13$.由于 5,7,13 都是素数,所以 $455=5\times7\times13$ 分解素因数完成.当两个数素因数分解完成之后,再去找出这两个数的公共素因数,并取这个素因数出现的较低次幂,然后把这些因数相乘,所得积即为两个数的最大公约数.

例 1　求 84 与 120,56 与 240 的最大公约数.

解:　因为　$84=2\times2\times3\times7=2^2\times3\times7$

$120=2\times2\times2\times3\times5=2^3\times3\times5$

所以　84 与 120 的最大公约数 $(84,120)=2^2\times3=12$.

因为　$56=2\times2\times2\times7=2^3\times7$

$240=2\times2\times2\times2\times3\times5=2^4\times3\times5$

所以　56 与 240 的最大公约数 $(240,56)=2^3=8$.

我们发现,用 56 去除 240 得 $240=56\times4+16$,而 $(56,16)=8$,所以 $(240,56)=(56,16)$.一般地,一个较大数与另一个数的最大公约数,等于较大数除以另一个数所得的余数

与另一个数的最大公约数.这是因为,如果正整数 $a>b$,由带余除法,$a=bg+r$.

如果 d 是 a 与 b 的公约数,那么 d 能整除 a,也能整除 b,所以 d 亦能整除 $r=a-bg$;反过来,d' 是 b 与 r 的公约数,即 d' 能整除 b,也能整除 r.所以 d' 也能整除 $a=bg+r$.由于 a 与 b,b 与 r 的公约数都相同,所以它们的最大公约数也相同,即有 $(a,b)=(b,r)$.用这个思想,我们可以得到求两个数的最大公约数的另一种有效方法——**辗转相除法**.

例 2 求 38454 与 336 的最大公约数.

解: 由带余除法 $38454=336\times114+150$

所以 38454 与 336 的最大公约数等于 336 与 150 的最大公约数.

同样 $336=150\times2+36$,336 与 150 的最大公约数等于 150 与 36 的最大公约数;$150=36\times4+6$,150 与 36 的最大公约数等于 36 与 6 的最大公约数,而 36 与 6 的最大公约数是 6,所以 38454 与 336 的最大公约数就是 6.

用辗转相除法,要比用素因数分解法来求两个数的最大公约数显得更简捷.

如果 c 是两个正整数 a 和 b 公共的倍数,即 c 能被 a 整除也能被 b 整除,那么称 c 为 a 和 b 的公倍数,公倍数中最小的一个叫做 a 与 b 的最小公倍数,记为 $[a,b]$.

类似于求两个数的最大公约数的方法,用素因数分解亦可求两个数的最小公倍数.这时,需找出所有不同的素因数,并取每个素因数出现的较高次幂,然后将这些所有因数相乘,所得积即为这两个数的最小公倍数.

例 3 求 42 与 120 的最小公倍数.

解: 将 42 与 120 分解为

$$42=2\times3\times7,\ 120=2^3\times3\times5.$$

所以 42 与 120 的最小公倍数 $[42,120]=2^3\times3\times5\times7=840$.

求最大公约数和最小公倍数的问题,在现实生活中常有应用.比如某工厂加工一种零件,要经过三道工序.第一道工序每个工人平均每小时加工 18 件;第二道工序每个工人每小时平均加工 12 件;第三道工序每个工人平均每小时加工 24 件.现在问各道工序上应安排多少工人才能使生产顺利进行(即在每道工序上不出现积压和等待)?

要使生产顺利进行,必须使每小时加工的零件总数是 18,12,24 的公倍数,这样问题就转化为求 18,12,24 的最小公倍数.

由于 $18=2\times3\times3=2\times3^2$ $12=2\times2\times3=2^2\times3$ $24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$

所以,它们的最小公倍数是 $2^3\times3^2=72$.因此第一道工序最少应安排 $72\div18=4$(人),第二道工序最少应安排 $72\div12=6$(人),第三道工序最少应安排 $72\div24=3$(人).

故三道工序应安排的工人数分别是 4,6,3 的同一倍数时,才能使生产顺利进行.

从求两个正整数 a,b 的最大公约数与最小公倍数的素因数分解的方法中,我们可以得到两个正整数 a 和 b 的最大公约数与最小公倍数之间的一个关系式

$$(a,b)\times[a,b]=a\times b$$

比如 $36=2^2\times3^2$, $24=2^3\times3$;$(36,24)=2^2\times3$, $[36,24]=2^3\times3^2$;

$$\begin{aligned}(36,24)\times[36,24]&=(2^2\times3)\times(2^3\times3^2)\\&=(2^2\times3^2)\times(2^3\times3)\end{aligned}$$

$$=36\times 24.$$

在求两个正整数 a 和 b 的最小公倍数时，我们也可以利用以上关系式，先求出这两个数的最大公约数 (a,b)，然后求出 $[a,b]=\dfrac{a\times b}{(a,b)}$.

应用与练习（二）

1. 对下列各数进行素因数分解

   (1) 30　　(2) 63　　(3) 150　　(4) 325

   (5) 441　　(6) 891

2. 求下列各组数的最大公约数

   (1) 45,50　　(2) 54,96

   (3) 133,665　　(4) 345,1679

3. 求下列各组数的最小公倍数

   (1) 25,40　　(2) 54,72

   (3) 320,150　　(4) 364,1982

4. 某学院召开代表大会，有教师代表 84 人，学生代表 60 人，职工代表 42 人，要编成若干小组进行讨论，编组时每组各方代表人数要相等，最多能编几组？每组有各方代表各多少人？

第三节　可除性的检验

本节我们要讨论如何判断一个整数能否被另一个整数整除的简捷方法. 我们先介绍几个有关整除的简单定理，由此出发来讨论可除性的检验.

定理 1-1　如果整数 a 能整除整数 b，那么 a 也能整除 b 的倍数

例如　因为 5 能整除 15，所以 15 的倍数，比如 $3\times 15=45$ 也能被 5 整除.

一般地，因为 a 整除 b，即存在整数 p，使得 $b=ap$. b 的 n 倍，即 nb. 因为 $nb=nap$，即 $nb=a(np)$，所以 a 能整除 nb.

定理 1-2　如果两个整数 a 和 b 分别能被 c 整除，则它们的和也能被 c 整除.

例如　12 能被 4 整除，20 也能被 4 整除，它们的和 $12+20=32$，也能被 4 整除.

一般地，a 能被 c 整除，那么存在整数 p_1，使得 $a=cp_1$，b 能被 c 整除，即存在整数 p_2，使得 $b=cp_2$，则

$$a+b=cp_1+cp_2=c(p_1+p_2)$$

所以 $a+b$ 也能被 c 整除.

利用定理 1-1 和定理 1-2 的结论，我们即可得到：

定理 1-3　如果两个整数 a 和 b，分别能被 c 整除，则 a 和 b 的倍数的和，也能被 c 整除.

例如　12 能被 4 整除，20 也能被 4 整除，则 $3\times 12+5\times 20=136$ 也能被 4 整除.

定理 1-4　如果一个整数 c 分别能被 a 和 b 整除，且 a 和 b 是互质的，则 c 能被 a 和 b 的积 ab 整除.

例如　45 能被 3 整除，也能被 5 整除，且因为 3 和 5 是互质的，所以 45 也能被 $3\times5=15$ 整除.

这个定理的严格证明比较复杂，我们这里仅用一种直观的方法加以说明.

因为 c 能被 a 整除，所以将 c 和 a 素因数分解之后，c 一定含有 a 的所有的素因数；同样的理由 c 也一定含有 b 的所有的素因数，因为 a 和 b 是互质的，那 a 和 b 没有相同的素因数. 所以 c 含 a 的所有的素因数与 c 含 b 的所有的素因数是不相同的，即 c 含有 a 与 b 的积 $a\cdot b$ 的所有素因数，这说明 c 能被 ab 整除.

利用以上定理，我们可以得到一个整数能否整除另一个整数的一系列判别方法，利用这些方法我们能很快说出，整数 569322 能被 3 整除，否则，我们只能动手用 3 去除 569322，看看余数是否为零，来判断 569322 能否被 3 整除.

判别法 1　如果一个整数的末尾数能被 2 整除，则该数能被 2 整除.

例如　32，916，70，1564 等等，由于这些整数的个位数都能被 2 整除，所以这些数都能被 2 整除.

像 32 和 916 这样的整数，我们可以把它们表示成 $32=3\times10+2$，$916=91\times10+6$. 我们来说明它们能被 2 整除的理由. 由于 10 能被 2 整除($10=2\times5$)，由定理 1-1，3×10 和 91×10 也能被 2 整除，由于个位数上的数 2 和 6 都能被 2 整除，再根据定理 1-2，$3\times10+2$ 和 $91\times10+6$ 也能被 2 整除，所以 32 和 916 都能被 2 整除. 当然，我们也可以直接利用定理 1-3，得到以上结论.

其实，所有的整数都可表成 $a\times10+b$(b 是该数的最后一位数，a 是该数去掉个位数 b 之后，位数少 1 位的整数)的形式.

例如　$4579=457\times10+9 \qquad (a=457, b=9)$

$12874=1287\times10+4 \qquad (a=1287, b=4)$

所以，一个整数能否被 2 整除，完全取决于最后一位数. 几乎是用同样的理由，只要把 2 换成 5 的话，我们可以得到下面的结论：

判别法 2　如果一个整数的最后一位数字是 5 或 0，则该数能被 5 整除.

例如　18960，9145 都能被 5 整除，因为它们的最后一位数字不是 0 就是 5.

判别法 3　如果一个整数的各位数字的总和能被 3 整除，则该整数能被 3 整除.

例如　537 的各位数字的和 $5+3+7=15$，因为 15 能被 3 整除，所以 537 能被 3 整除. 413 的各位数字的和是 $4+1+3=8$，因为 8 不能被 3 整除，所以 413 不能被 3 整除.

接下来，我们只对四位数的情形来证明结论的正确性. 这个证明可以类似地推广到位数为任意数的情形.

考虑一个四位数 $n=abcd$.

因为　$$abcd=a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d$$

$$= (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d$$
$$= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$$

注意到 999,99 和 9 分别能被 3 整除,所以 $999a+99b+9c$,能被 3 整除. 如果 $a+b+c+d$ 能被 3 整除,则$(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$就必能被 3 整除,即 $abcd$ 能被 3 整除.

你也许已经发现 $999a+99b+9c$ 不仅能被 3 整除,而且也能被 9 整除,于是,我们可以得到下述结论:

判别法 4　如果一个整数的各位数字的总和能被 9 整除,则该整数能被 9 整除.

判别法 5　如果一个整数最后两位数字组成的数能被 4 整除,则该数能被 4 整除.

例如　9216 的最后两位数是 16,而 16 能被 4 整除,所以 9216 能被 4 整除.

本结论的证明,类似判别法 1 的证明. 因为任何一个 2 位数以上的整数,都可以表成 $a\times100+bc$(bc 是该整数的最后两位数字,a 是该数去掉末两位数之后,位数少 2 位的整数).

例如　$9216=92\times100+16$　　$(a=92, bc=16)$

$573=5\times100+73$　　$(a=5, bc=73)$

由于 100 能被 4 整除,如果末两位数 bc 能被 4 整除的话,那么 $a\times100+bc$ 亦能被 4 整除,所以一个整数能否被 4 整除,完全取决于最后二位数.

判别法 6　如果一个整数的最后三位数字组成的数能被 8 整除,则该整数能被 8 整除.

例如　751344 的最后 3 位数是 344,因为 344 能被 8 整除($344=8\times43$),所以 751344 能被 8 整除.

同样类似于判别法 1 的证明,因为任何一个三位数以上的整数都可表成 $a\times1000+bcd$.

例如　$751344=751\times1000+344$　　$(a=751, bcd=344)$

$8156=8\times1000+156$　　$(a=8, bcd=156)$

由于 1000 能被 8 整除($1000=8\times125$),如果末三位数 bcd 能被 8 整除的话,那么 $a\times1000+bcd$ 亦能被 8 整除. 所以一个整数能否被 8 整除,完全取决于最后三位数.

判断一个整数能否被 7 整除的方法,要略微复杂一点. 首先,我们将这个整数作一个处理,即将这个整数看成是 $N=a\times1000-bcd$. 然后将去掉最后三位数之后的位数少 3 位的整数与末三位数作差,得 $N_1=a-bcd$.

例如　$N=378322$,得 $N_1=378-322=56$

如果 N_1 能被 7 整除,那么这个整数 N 亦能被 7 整除.

事实上,因为

$$N = a \times 1000 + bcd, N_1 = a - bcd,$$
$$N_1 \times 1000 = a \times 1000 - bcd \times 1000$$
$$N - N_1 \times 1000 = bcd + bcd \times 1000$$
$$= bcd \times 1001$$

所以　$N=N_1\times1000+bcd\times1001$.

因为,$1001=7\times11\times13$ 能被 7 整除. 所以,如果这样的 N_1 能被 7 整除的话,这个整数 N 也能被 7 整除.

根据这个结论,因为 56 能被 7 整除,所以 378322 能被 7 整除.

你也许会发现,1001 也能被 11 和 13 整除,所以如果这样的 N_1 能被 11 或 13 整除,那么该整数 N 也能被 11 或 13 整数,所以这也是判断一个整数能否被 11 或 13 整除的一个方法.

例　试判断 213143 能否被 7 整除,1123980 能否被 11 整除.

解：因为 $N_1=213-143=70$ 能被 7 整除,所以 213143 能被 7 整除.

因为 $N_1=1123-980=143$ 能被 11 整除,所以 1123980 能被 11 整除.

至此,我们已经考察了一个整数能否被 2,3,4,5,7,8,9 等整除的判断方法,十以内还剩下 6 的判断方法,我们利用定理 1-4,即可得到以下的结论：

判别法 7　如果一个整数能被 2 和 3 同时整除,则该整数能被 6 整除.

例如因为 738 能被 2 和 3 整除(为什么?),所以 738 能被 6 整除.

由定理 1-4,我们还可以得到：

1）一个整数能被 2 和 7 整除,则该整数能被 14 整除；

2）一个整数能被 3 和 5 整除,则该整数能被 15 整除；

3）一个整数能被 2 和 9 整数,则该整数能被 18 整除；

4）一个整数能被 3 和 7 整数,则该整数能被 21 整除.

应用与练习(三)

1. 试证明定理 1-3

2. 如果一个数能被 9 整除,它必定能被 3 整除吗? 反过来,如果一个数能被 3 整除,它也必定能被 9 整除吗? 说明理由.

3. 证明当 n 为任意自然数时,$n^2\pm n$ 必能被 2 整除.

4. 证明当 n 为任意自然数时,$n(n-1)(2n-1)$必能被 6 整除.

5. 根据掌握的可除性检验的判别法,将下列各分数化成既约分数(即分子与分母互质的分数)

(1) $\frac{60}{105}$　　(2) $\frac{108}{117}$　　(3) $\frac{180}{252}$

(4) $\frac{315}{390}$　　(5) $\frac{630}{980}$　　(6) $\frac{495}{2343}$

6. 试再给出一个判断一个数能否被 11 整除的判别法,并说明理由.

第四节　同余的概念及其应用

当碰到用一个固定的整数去除一系列整数的问题时,"同余"和"模"的概念将会使问题的解决变得简捷而又清楚.

为了引进这个概念,让我们用 3 去除一系列的整数,得到除式如下：

$$
\begin{array}{ll}
0=0\times3+0 & -1=-1\times3+2 \\
1=0\times3+1 & -2=-1\times3+1 \\
2=0\times3+2 & -3=-1\times3+0 \\
3=1\times3+0 & -4=-2\times3+2 \\
4=1\times3+1 & -5=-2\times3+1 \\
5=1\times3+2 & -6=-2\times3+0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

观察一下每个整数被 3 除时的余数，我们发现，余数只是 0,1,2 这三个中的一个. …−6,−3,0,3,6,…的余数都是 0;…−5,−2,1,4,7,…的余数都是 1;…−4,−1,2,5,8,…的余数都是 2. 这样用 3 做除数时可以将全体整数分成三类(余数是 0 或 1 或 2). 由于在同一类中的任意两个整数，它们被 3 除的余数相同，所以它们的差能被 3 整除. 一般地，如果两个整数的差能被整数 n 整除，那么，我们就说这两个数是模 n 同余的. 因此上例中同一类中的任意两个整数是模 3 同余的.

例 −3 和 9,1 和 7,−4 和 5 都是模 3 同余的，我们使用符号 $-3\equiv9(\mathrm{mod}3)$，$1\equiv7(\mathrm{mod}3)$，$-4\equiv5(\mathrm{mod}3)$. 同余概念，用符号表示即为：如果 $a-b$ 能被 n 整除，则记做 $a\equiv b(\mathrm{mod}n)$.

在日常生活中，同余的概念是经常出现的，让我们观察一下日历. 下面是一张 1997 年 5 月的日历：

	SUN 日	MON 一	TUE 二	WED 三	THU 四	FRI 五	SAT 六
May				1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
五月	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30	31	

在星期的每一列中，我们可以看出：同列中每个日期的数码都比其上方的大 7，如星期三的日期是 1,8,15,22,29，任意两个星期三的日期的差都能被 7 整除. 其它星期几的日期亦如此，因此，在日历中，同为星期几的日期是模 7 同余的.

岁月流逝，生日和各种周年纪念日的日期，不会发生变化，但星期几是会变化的，不管你今年的生日是星期几，但明年的将肯定不同. 让我们用同余的概念来设计一种方法，用以确定过去或将来的某个日期是星期几.

一个特殊的日期(固定在几月几日)，每年不会恰好在固定的星期几，这是因为一年中的日数 365 或 366(闰年)不能被 7 整除的缘故.

当用 7 除 365 时，余数是 1，所以平年的日数与 1 是模 7 同余的，记作 $365\equiv1(\mathrm{mod}7)$. 类似地，当用 7 除 366 时余数是 2，所以闰年的日数与 2 是模 7 同余的，记作 $366\equiv2(\mathrm{mod}7)$. 这说明天数变动 365 天，星期几变动一天. 即某个固定日期，在某平年是星期几，到下一年(如果这一年也是平年)，它所对应的星期几的数增加 1. 在前一年(如果这一年也还是平年)它所对应的星期几的数减少 1. 例如，某年的 6 月 14 日是星期三，那么下一年的 6 月 14 日就是星期四，前一年的 6 月 14 日是星期二.

由于闰年造成的星期几变动数是 2，所以碰到闰年，你必需要作一些调整. 闰年是很

容易辨认的，因为它们能被 4 整除(但要除去尾数是 00 而又不能被 400 整除的年份，像 2000 年是闰年，1800，1900，2100 都不是闰年)，所以 1980，1984，1988，1992，1996 等都是闰年. 1989，1991，1995 等都是平年. 闰年比平年所多的那一天总是 2 月 29 日，因此，所计算的日期每越过一个 2 月 29 日，星期几的数或增加 2，或减少 2. 例如 1996 年 1 月 18 日是星期四，且 1996 年是闰年，有 2 月 29 日，下一年的 1997 年 1 月 18 日，由于越过 2 月 29 日，所以是星期六，前一年 1995 年 1 月 18 日是星期三. 而 1996 年 5 月 1 日是星期三，下一年 1997 年 5 月 1 日是星期四，前一年 1995 年 5 月 1 日由于越过了 2 月 29 日，所以是星期一.

接下来让我们来计算一下，2000 年的 5 月 1 日是星期几？1982 年的 5 月 1 日，又是星期几？

从 1996 年 5 月 1 日至 2000 年 5 月 1 日共 4 年，其中两年(1996 和 2000 年)是闰年，但只越过一个 2 月 29 日，所以星期数应向前移 5(其中 3 年各移一，1 年移二). 由于 1996 年 5 月 1 日是星期三，因此，2000 年的 5 月 1 日是星期一.

从 1996 年 5 月 1 日至 1982 年 5 月 1 日，共 14 年，其中四年(1996，1992，1988 和 1984 年)是闰年，共越过 4 个 2 月 29 日，所以星期数应向后移动 18(其中 10 年各移一，4 年各移二)，所以星期数减少 4($18\equiv 4 \pmod 7$)). 即 1982 年 5 月 1 日是星期六.

下面我们介绍同余的概念在密码学中的应用. 密码学是把信息写成密码的技术. 将信息转换成保密信息的过程叫做编码，反过来，由保密形式的信息导出原始信息的过程称为译码. 编码的方法也用于现代计算机的安全系统，目的是防止未经批准的人员从计算机档案中窃得机密的数据资料.

先看两个基本密码的例子.

英语的 26 个字母，可以按照规定的形式，用相互对应的字母编写密码. 例如我们规定：

表 1-1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

按照上述密码，信息“THE　END”的密码是“WKH　HQG”；反之，密码“LW LV ERPE”的原始信息是“IT　IS　BOMB”.

所以，当你知道密码是如何规定之后，译码工作是很容易的，即只需把编码后的信息中每个字母用标准字母表中的相对应的字母代替，即可获得原始信息.

另一种方式是将每一个字母用相应的数字来替代，例如我们规定：

表 1-2

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26