上海师范大学数学系主编

大学本科函授教材

实变函数与泛函分析

华东地区省（市）属师范大学协编教材

下册

张一鸣　杨有锠　王晓斐
徐际宏　王纯洁　李贤瑜　编

上海科学技术出版社

大学本科函授教材

实变函数与泛函分析

下　册

上海师范大学数学系主编

张一鸣　杨有镛　王晓斐
徐际宏　王纯洁　李贤瑜　编

上海科学技术出版社

大学本科函授教材

实变函数与泛函分析

下　　册

上海师范大学数学系主编

张一鸣　杨有锠　王晓斐
徐际宏　王纯洁　李贤瑜　编

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 6.5　字数 142,000
1988 年 9 月第 1 版　1988 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—11,700

ISBN7-5323-0561-9/O·49(课)

定价：1.60元

目　　录

第七章 距离空间

从本章开始我们将介绍泛函分析，泛函分析是现代数学中一个较新的重要分支，它是古典分析的推广与提高，主要以无限维空间的结构及其上算子理论为其研究对象，综合了代数、几何、分析的观点和方法，巧妙而成功地处理了一系列数学问题和物理问题，偏微分方程、概率论以及一部分计算数学也由于运用了泛函分析而得到较大的发展．本教材介绍线性泛函分析的初步知识，重点是叙述距离空间（赋范线性空间作为其特殊的一类）的基本内容，对有界线性算子及泛函的理论与希尔伯特（Hilbert）空间只作较为简单的介绍．

在第二章中我们引入了 n 维欧几里得空间 R^n 的概念，它是由全体 n 位有序实数组 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 组成之集．对 R^n 中任意两点 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$、$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 按 $\rho(x, y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2}$ 定义了距离（称为欧几里得距离）．

R^n 是对我们有着直观意义的数直线 R^1、平面 R^2 或空间 R^3 的推广．

近代数学所谓的空间是指以公理形式给出某些关系（或称附上某种结构）的一般的集合．距离空间是附上距离函数的一般的集合，它是 R^1（附以 $\rho(x, y)=|x-y|$）的抽象化，也可看作 $R^n\left(附以\ \rho(x, y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2}\right)$的进一步的推广．

在距离空间有了距离后，便可建立相应的收敛性（即可用

距离描述极限过程）以及一系列与距离有关的概念（如有界集、开集、闭集、基本列、映射的连续性等）和结论．另一方面，许多具体收敛性都可用按距离收敛的意义统一起来．

为了使所考察的距离空间具有较为良好的性质，我们又加上了完备性、可分性、列紧性等条件，即把几类特殊而重要的距离空间从一般的距离空间中划分出来．在本章末我们又引入一类特殊的附以代数结构（有加法、数乘）的距离空间即赋范线性空间，完备的赋范线性空间称为巴拿赫(Banach)空间，它是在泛函分析中用得较多的一类非常重要的空间．因篇幅所限本书主要讨论 R^n、$C[a, b]$、l^p、$L^p[a, b]$ $(p\geqslant 1)$ 等四个具体的常用的距离空间．

§7.1 距离空间的定义与例子·距离空间中的极限

作为准备知识，我们先叙述下列几个常用不等式．

1．霍尔德(Hölder)不等式

(1) 级数形式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\left(\xi_k、\eta_k\text{ 为复数(或实数)}, k=1, 2, \cdots, p>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.\right)$

(2) 积分形式

$$\int_a^b|x(t)y(t)|dt\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

($x(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上任意复值(或实值) p 幂可积函数，$y(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上任意复值（或实值）q 幂可积函数，$p>1$,

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.)

注 1 (1)中不等式当 $p=q=2$ 时称为柯西(Cauchy)不等式. (2)中不等式当 $p=q=2$ 时称为许瓦兹(Schwarz)不等式.

2. 闵可夫斯基(Minkowski)不等式

(1) 级数形式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(ξ_k、η_k 为复数(或实数), $k=1, 2, \cdots$, $p\geqslant 1$.)

(2) 积分形式

$$\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

($x(t)$、$y(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上任意复值(或实值) p 幂可积函数, $p\geqslant 1$.)

注 2 以上诸不等式在学习后面内容时要经常用到, 请读者先熟悉一下.

注 3 以上诸不等式证明见附录.

一、距离空间的定义与例子

我们在数学分析中已经知道极限运算是分析学的最基本的运算, 而极限运算又是用"距离"来刻划的, 在数直线 R^1 中, 两点 x、y 之间的距离 $\rho(x, y)$ 由下式规定: $\rho(x, y)=|x-y|$ (从几何上看, 这是 x、y 两点之间直线段的长度), 它表示 x 与 y 的接近程度. 点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 是用

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, x)=\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0$$

来表示的, 所以距离概念是极限运算的基础, 从而也是数学分

析中一系列的概念和结论的基础.

近代数学处理的对象往往不再是数的集合（或几何上点的集合），而是一般的某种数学对象的集合（例如，n 位有序数组的集合，或具有某种特性的无穷数列的集合与函数的集合等等）. 因此，如果对一般的集合也能引进一个“距离”，那末利用这个“距离”就可仿 R^1 的情况来定义极限运算，以及建立各种与距离有关的概念与结论.

对一般的集合应该怎样来定义距离呢？

先看 R^1 中两点距离 $\rho(x, y)=|x-y|$ 具有什么基本特性. 分析一下有下列三条：

(1) 非负性 $\rho(x, y)\geqslant 0$; $\rho(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) 对称性 $\rho(x, y)=\rho(y, x)$,

(3) 三角形不等式 对任意三点 x、y、$z\in R^1$ 有

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y);$$

于是我们便以上述三条性质作为公理抽象化后便导出了下述距离空间（或称度量空间）的概念.

定义 设 X 是由某些元素组成的非空集，对其任意两个元素 x、y，按照一定的法则对应于一个实数 $\rho(x, y)$，满足下列三个条件：

(M1) $\rho(x, y)\geqslant 0$; $\rho(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$（非负性公理），

(M2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$（对称性公理），

(M3) 对任意三个元素 x、y、$z\in X$ 有

$$\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)\quad\text{（三角形不等式公理），}$$

则称 $\rho(x, y)$ 为 x、y 的距离（此 X 上二元函数 ρ 称为**距离函数**），而称 X 为以 ρ 为距离的**距离空间**，记作：(X, ρ). 在 ρ 已经明确的情况下可简单地记作 X（即与集 X 使用同一记

号）．X 中的元素称为空间的点．X 中的非空子集 M 按距离 ρ 显然也是一个距离空间，称为 X 的子空间．

请读者注意，按上述定义距离空间只是一个附以满足三条公理的二元函数 ρ 的一个任意集合，它的元素不再一定是通常几何上的点，距离也不再是通常两点间的几何长度，而只是反映两元素按某种意义接近程度的一个数．

下面介绍一些距离空间的例子．

例 1 设 X 是任意一个非空集，我们总能以下列平凡的方式引入距离：

$$\rho(x, y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y;\\ 1, & \text{当 } x\neq y,\end{cases}$$

这时 X 按距离 ρ 成为距离空间．事实上，公理(M1)、(M2)显然满足，(M3) 则因当 $x=y$ 时显然成立，而当 $x\neq y$ 时由 $x\neq z$、$z\neq y$ 至少有一成立即可推得．我们称这种距离空间为**离散距离空间**，它与 R^n 有着很大不同的性态，以后在点集的举例中要多处提到它．

例 2 设 M 为 R^1 中任一非空子集，对任意 x、$y\in M$ 规定 $\rho(x, y)=|x-y|$，则 $\rho(x, y)$ 显然满足三条公理，于是 (M, ρ) 成一距离空间，它是 R^1（附以距离 $\rho(x, y)=|x-y|$）的子空间．

例 3 n 维欧几里得空间 R^n．

设 R^n 是由全体 n 个实数的有序组 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 组成的集合，对 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 定义距离如下：

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2}. \tag{1}$$

这种距离称为欧几里得距离，R^n 附上这个距离后则称为 n 维

欧几里得空间，以后如不作声明记号 R^n 即表示 n 维欧几里得空间．关于 ρ，公理(M 1)、(M 2)显然成立，只须再验证公理(M 3)也成立．证明公理(M 3)成立时要用下述柯西不等式：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \tag{2}$$

事实上，对 R^n 中任意三点：

$$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n),\ y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n),$$
$$z=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_n),$$

令
$$a_k=\xi_k-\zeta_k,\ b_k=\zeta_k-\eta_k,$$

则有 $\xi_k-\eta_k=a_k+b_k$．由柯西不等式有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n} a_k^2+2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k+\sum_{k=1}^{n} b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n} a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^2}+\sum_{k=1}^{n} b_k^2\\&=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2,\end{aligned}$$

即
$$\rho^2(x,\ y)\leqslant(\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y))^2,$$

或
$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y).$$

例 4 对点集 R^n 若用下式引入距离：

$$\rho_1(x,\ y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k| \tag{3}$$

则 ρ_1 仍满足(M 1)、(M 2)、(M 3)三条公理，即$(R^n,\ \rho_1)$亦成距离空间．(验证作为习题．)

从上述数例我们可以看出两点：

1° 例 1 告诉我们，在任何一个非空集上都能以平凡的方式定义距离使该集成为距离空间．

2° 例 3、例 4 告诉我们，在同一非空集上可按不同方式定义距离，一般来讲，在某一非空集 X 上定义了两个距离 ρ

与 ρ_1，若 $\rho \neq \rho_1$，即存在 X 中两点 x、y 使 $\rho(x, y) \neq \rho_1(x, y)$，则 (X, ρ) 与 (X, ρ_1) 应看成不同的距离空间，所以例 3 中的 (R^n, ρ) 与例 4 中的 (R^n, ρ_1) 是两个不同的距离空间.

现在我们接着再叙述几个重要、常用的函数空间与序列空间的例子，在以后引入线性结构后它们都是无限维空间，因而这些空间是泛函分析讨论的主要对象.

例 5 空间 $C[a, b]$

设 $C[a, b]$ 为定义在 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成的集合，对任意 x、$y \in C[a, b]$，定义

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|, \qquad (4)$$

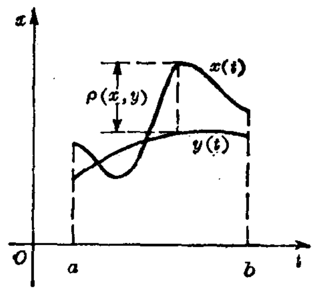

图 7-1

则 $C[a, b]$ 按 (4) 式所定义的距离成为距离空间（图 7-1）. 事实上，公理 (M 1)、(M 2) 显然满足，只须再证 (M 3) 成立. 对任意 $z \in C[a, b]$，我们有

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) &= \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \\
&= \max_{a \le t \le b} |(x(t) - z(t)) + (z(t) - y(t))| \\
&\le \max_{a \le t \le b} (|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|) \\
&\le \max_{a \le t \le b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \le t \le b} |z(t) - y(t)| \\
&= \rho(x, z) + \rho(z, y),
\end{aligned}$$

所以 $C[a, b]$ 按距离 (4) 成为距离空间.

为了介绍 l^p 和 $L^p[a, b]$ $(p \ge 1)$，须要用到本节开头所介绍的闵可夫斯基不等式.

例 6 空间 l^p(其中 $p\geqslant 1$ 为固定常数)

若实数列 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p<+\infty$, 则称 x 为 p 幂收敛数列, 以 l^p 表示全体 p 幂收敛数列组成之集,对 l^p 中任意二点 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots)$定义

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

则 l^p 按(5)式所定义的距离成为距离空间.

事实上, 我们首先注意当 x、$y\in l^p$ 时由(5)式所定义的距离是一个有限实数, 即 $\rho(x, y)$有意义, 这从闵可夫斯基不等式便可推出,因为

$$\begin{aligned}\rho(x, y)&=\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+(-\eta_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.\end{aligned}$$

下面验证 $\rho(x, y)$满足距离三公理.

公理(M 1)、(M 2)成立是显然的, 只须证(M 3)成立. 据闵可夫斯基不等式,对任意 $z=(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k, \cdots)\in l^p$ 有

$$\begin{aligned}\rho(x, y)&=\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k-\zeta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k-\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\rho(x, z)+\rho(z, y)\end{aligned}$$

所以(M 3)成立.

空间 l^p 当 $p=2$ 时的特例 l^2 与 n 维欧几里得空间较为接近,在理论上有着特别的重要性,

例7 空间 $L^p[a, b]$（其中 $p\geqslant 1$ 为固定常数）

若定义在有限区间 $[a, b]$ 上的可测函数 $x(t)$ 满足

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty,$$

即 $x(t)$ 的绝对值的 p 次幂为 $[a, b]$ 上的勒贝格可积函数，则称 $x(t)$ 为 $[a, b]$ 上的 p 幂可积函数，以 $L^p[a, b]$ 表示 $[a, b]$ 上全体 p 幂可积函数组成之集.

易知当 $p>1$ 时 $L^p[a, b]$ 为 $L^1[a, b]$ 的子集，即若 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上 p 幂可积，则 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上必可积. 事实上，命 $A=\{t: |x(t)|\geqslant 1,\ t\in[a, b]\}$ 则有

$$\begin{aligned}\int_a^b |x(t)|dt &= \int_A |x(t)|dt + \int_{[a,b]-A} |x(t)|dt \\ &\leqslant \int_A |x(t)|^p dt + m([a, b]) \\ &\leqslant \int_a^b |x(t)|^p dt + (b-a) < +\infty.\end{aligned}$$

在 $L^p[a, b]$ 中规定两函数若在 $[a, b]$ 上几乎处处相等则视为同一函数. 对任意 x、$y\in L^p[a, b]$，定义

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (6)$$

则 $L^p[a, b]$ 按(6)式定义的距离成为距离空间.

事实上，我们首先注意当 x、$y\in L^p[a, b]$ 时，由(6)式定义的距离 $\rho(x, y)$ 是一个有限实数，即 $\rho(x, y)$ 有意义，这只要利用闵可夫斯基不等式（积分形式）仿 l^p 情况，同理即可证得.

下面验证 $\rho(x, y)$ 满足距离三公理.

因为 $\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0$ 显然成立 另外，$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ 当且仅当 $x(t)-y(t)$

$=0$ $a.e.$ 于$[a, b]$，即 $x(t)=y(t)$ a. e. 于$[a, b]$，根据我们的规定几乎处处相等的函数视为相同，于是有 $\rho(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$，即(M1)成立．(M2)成立是显然的．再据闵可夫斯基不等式，对任意 x、y、$z\in L^p[a, b]$有

$$
\begin{aligned}
\rho(x, y)&=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\left(\int_a^b |(x(t)-z(t))+(z(t)-y(t))|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant\left(\int_a^b |x(t)-z(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+\left(\int_a^b |z(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\rho(x, z)+\rho(z, y),
\end{aligned}
$$

所以(M3)成立．

空间 $L^p[a, b]$ 当 $p=2$ 时的特例 $L^2[a, b]$ 在理论上与应用上具有特别重要性．

二、距离空间中的极限

距离空间中任意两点之间都有确定的距离，于是可仿数直线 R^1 中点列收敛性的定义来建立距离空间中点列收敛的概念．

定义 设 X 是一个距离空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 为 X 中的一个点列，若存在某一 $x\in X$，使当 $n\to\infty$ 时数列 $\rho(x_n, x)\to 0$，则称点列 $\{x_n\}$ **收敛于** x，记作：

$$x_n\to x\quad(n\to\infty)\quad(\text{也可简记为 } x_n\to x)$$

或
$$\lim_{n\to\infty} x_n=x.$$

这时称 $\{x_n\}$ 为**收敛点列**，并称 x 为点列 $\{x_n\}$ 的**极限**．

利用距离 $\rho(x, y)$ 满足的三条公理可以推导出点列收敛性有下述性质：

定理 1.1 (1) 若 $x_n\to x\ (n\to\infty)$ 且 $x_n\to y\ (n\to\infty)$，则 $x=y$. 即收敛点列极限是唯一的.

(2) 若 $x_n\to x\ (n\to\infty)$ 则 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$ (其中 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$)，即收敛点列的任一子点列收敛于同一极限.

证 (1) $0\leqslant\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ x_n)+\rho(x_n,\ y)=\rho(x_n,\ x)+\rho(x_n,\ y)\to 0(n\to\infty)$，所以 $\rho(x,\ y)=0$，即 $x=y$.

(2) 由 $x_n\to x$ 知数列 $\rho(x_n,\ x)\to 0$，但 $\{\rho(x_{n_k},\ x)\}$ 为 $\{\rho(x_n,\ x)\}$ 的一个子数列，所以 $\rho(x_{n_k},\ x)\to 0(k\to\infty)$，即 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$. ▮

定理 1.2 若 $x_n\to x(n\to\infty)$; $y_n\to y(n\to\infty)$，则 $\rho(x_n,\ y_n)\to\rho(x,\ y)(n\to\infty)$，即距离 $\rho(x,\ y)$ 是两个变元的连续函数.

证 由(M 3)知对任意 n 有

$$\begin{aligned}\rho(x_n,\ y_n)&\leqslant\rho(x_n,\ x)+\rho(x,\ y_n)\\&\leqslant\rho(x_n,\ x)+\rho(x,\ y)+\rho(y,\ y_n)\end{aligned}$$

于是有

$$\rho(x_n,\ y_n)-\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x_n,\ x)+\rho(y,\ y_n). \tag{7}$$

类似地有
$$\begin{aligned}\rho(x,\ y)&\leqslant\rho(x,\ x_n)+\rho(x_n,\ y)\\&\leqslant\rho(x,\ x_n)+\rho(x_n,\ y_n)+\rho(y_n,\ y).\end{aligned}$$

移项，得

$$\rho(x,\ y)-\rho(x_n,\ y_n)\leqslant\rho(x,\ x_n)+\rho(y_n,\ y). \tag{8}$$

由(7)、(8)两式及(M 2)便有

$$\begin{aligned}|\rho(x_n,\ y_n)-\rho(x,\ y)|&\leqslant\rho(x_n,\ x)\\&+\rho(y_n,\ y)\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

即 $\rho(x_n,\ y_n)\to\rho(x,\ y)$. ▮

在距离空间中我们可以仿照 R^n 定义有界集的概念.

定义 设 X 是距离空间，$A\subset X$，若存在 $x_0\in X$，$r>0$，使对 A 中任一点 x 有 $\rho(x,\ x_0)\leqslant r$，则称 A 为 X 中的有界

集.

我们知道收敛数列是有界的，现在证明在一般距离空间中对收敛点列亦有相同的结论.

定理1.3 设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中收敛点列，则 $\{x_n\}$ 是有界的.

证 设 $x_n \to x_0$，即 $\rho(x_n, x_0) \to 0$，于是存在正整数 N 使当 $n > N$ 时有 $\rho(x_n, x_0) < 1$，取 $r = \max\{1, \rho(x_1, x_0), \cdots, \rho(x_N, x_0)\}$，则对任意正整数 n 有 $\rho(x_n, x_0) \leqslant r$，即 $\{x_n\}$ 是有界的. ▋

现在我们考察前述几个具体的距离空间 R^n、$C[a, b]$、l^p、$L^p[a, b]$ 中按距离 $\rho(x, y)$ 收敛性的具体意义.

1. R^n 中 $x_m \to x(m\to\infty)$ 的具体意义是按（每个）坐标收敛，即 x_m 的每个坐标收敛于 x 的相应坐标.

事实上，设 $\{x_m\} = \{(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})\}$ 收敛于 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，对任意 $k = 1, 2, \cdots n$，由

$$|\xi_k^{(m)} - \xi_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(m)} - \xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(x_m, x)$$

易知当 $\rho(x_m, x) \to 0(m\to\infty)$ 时有 $\xi_{k}^{(m)} \to \xi_k(m\to\infty)$，对 $k = 1, 2, \cdots n$ 都成立.

反之，若 $\xi_k^{(m)} \to \xi_k(m\to\infty)$ 对 $k = 1, 2, \cdots n$ 都成立，则对任给 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使当 $m > N$ 时有

$$|\xi_k^{(m)} - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots n.$$

于是当 $m > N$ 时有

$$\rho(x_m, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(m)} - \xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

即 $\rho(x_m, x) \to 0(m\to\infty)$，亦即 $x_m \to x(m\to\infty)$.

注 如果在集 R^n 中附上距离