

高等学校教学用书

材料力学

下 册

杜庆华等编著

高等教育出版社

高等学校教学用书



材 料 力 学

下 册

杜庆华等编著

高等教育出版社

本書系由杜庆华、孙訓方、賈有权、張福范等教师根据清华大学、天津大学、唐山鉄道学院三校历年編写的材料力学講义整理改写而成，由杜庆华教授主編，并經教育部同意作为高等工業学校土建、机械类專業的試用教材。

本書暫分上下册出版。下册共十一章，闡述構件的强度及剛度計算，靜不定系統的計算基础，彈性地基上的梁，薄壁杆件的扭轉和弯曲，变形系統平衡的稳定問題，动載荷問題等等，并有丰富的例題和圖表。本書除供各高等学校广泛使用外，还可供在职干部學習及工程技術人員参考之用。

2/5/14

材 料 力 学

下 册

杜庆华等編著

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

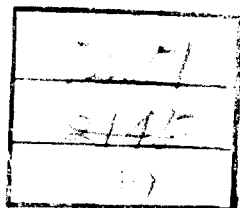
(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号 15010·720 開本 787×1092 1/16 印張 14 1/8

字數 328,000 印數 0001—10,000 定價 (10) 1.80

1958年9月第1版 1958年9月北京第1次印刷



下 册 目 录

第十四章 在任意载荷作用下构件的强度计算

§14.1 杆在任意载荷作用下的应力计算方法	217	§14.6 受偏心拉伸(或压缩)的杆的应力计算及强度校核	227
§14.2 杆在斜弯曲情况下的应力及变形计算	218	§14.7 截面核心	230
§14.3 斜弯曲情况下梁的强度校核	222	§14.8 受扭转与弯曲联合作用的杆的强度校核	233
§14.4 杆在不同平面内的横向力作用下的弯曲问题	224	§14.9 曲柄轴的强度校核	237
§14.5 受弯曲与拉伸(或压缩)联合作用的杆的强度校核	225		

第十五章 任意载荷作用下杆件的刚度计算

§15.1 拉伸、扭转与弯曲的变形能计算	240	§15.4 卡氏定理	248
§15.2 变形能的一般算式·克拉贝依隆原理	241	§15.5 功的互等定理	251
§15.3 莫尔定理	243		

第十六章 静不定系统·力法

§16.1 静不定系统的一般概念	253	算的校核	262
§16.2 基本系统·解静不定问题的基本方法	254	§16.6 连续梁	263
§16.3 正则方程式	256	§16.7 三弯矩方程式	264
§16.4 最小功原理	261	§16.8 支座高度不准确的影响	267
§16.5 温度对于静不定系统的影响·静不定系统计算			

第十七章 弹性地基上的梁

§17.1 一般概念	269	§17.4 半无限长梁	272
§17.2 挠度曲线的微分方程及其解	269	§17.5 有限长梁	274
§17.3 无限长梁	270		

第十八章 薄壁杆件的扭转和弯曲

§18.1 薄壁杆件的定义	280	§18.6 薄壁杆件约束扭转的剪应力	291
§18.2 自由扭转与约束扭转的概念	280	§18.7 薄壁杆件约束扭转的微分方程及其积分	294
§18.3 截面的几何性质	281	§18.8 薄壁杆件在复杂抗力的一般情况下的应力计算	296
§18.4 扭转中心与弯曲中心	285		
§18.5 基本假设·约束扭转的正应力算式	287		

第十九章 平面曲杆的强度及刚度计算

§19.1 平面曲杆的平面弯曲问题	301	§19.4 平面曲杆在平面弯曲时的强度条件	310
§19.2 平面曲杆在纯弯曲时的正应力公式	302	§19.5 计算曲杆在平面弯曲时正应力的另一方法	312
§19.3 中性层曲率半径 r 及截面形心到中性层距离 y_0 的计算	305	§19.6 平面曲杆弯曲正应力公式的讨论	313
		§19.7 平面曲杆弯曲变形的计算	315

第二十章 厚壁圆筒与薄壁容器

§20.1 计算厚壁筒应力与位移的方程式	317	§20.4 薄壁容器的应力计算	326
§20.2 各种受力情况下厚壁筒之应力及位移的计算	320	§20.5 容器联接环的计算	328
§20.3 组合筒的计算	322		

第二十一章 变形系统平衡的稳定问题

§21.1 稳定的平衡和不稳定的平衡	330	计算	339
§21.2 求临界力的欧拉公式	332	§21.5 压杆的稳定校核	344
§21.3 端点条件对临界力的影响	334	§21.6 稳定计算的一些特殊性质和它的实际意义	349
§21.4 欧拉公式的应用限度和超出弹性范围的稳定		§21.7 纵横弯曲的概念及强度校核	351

第二十二章 动载荷问题

§21.8 侧稳定和其他稳定概念.....	355	§22.7 振动时应力的计算.....	368
§21.9 稳定计算的发展.....	356	§22.8 撞击时应力的计算.....	372
§22.1 一般概念.....	358	§22.9 撞击应力的计算实例.....	374
§22.2 构件作等加速运动时应力的计算.....	359	§22.10 考虑被撞击之弹性体系的质量时撞击应力的计算.....	376
§22.3 构件作等速转动时应力的计算.....	360	§22.11 撞击物自身应力之计算.....	378
§22.4 连杆和摇杆内的应力.....	361	§22.12 撞击时材料机械性质的实验研究.....	380
§22.5 直杆的自然振动频率.....	362		
§22.6 旋转轴的共振、临界速度.....	367		

第二十三章 交变应力下构件的强度计算

§23.1 基本概念.....	385	限曲线.....	400
§23.2 交变应力的符号及其循环特性.....	385	§23.8 材料与构件的简化持久极限曲线及计算公式.....	403
§23.3 在交变应力下构件疲劳破坏的现象.....	387	§23.9 拉伸-压缩、弯曲或扭转的交变应力下构件的强度校核.....	405
§23.4 对交变应力下材料破坏原因的假说.....	389	§23.10 弯-扭组合交变应力下构件的强度计算.....	410
§23.5 材料的持久极限及其测定方法.....	392	§23.11 在不稳定的交变应力下按强度条件及按持久寿命计算构件的方法.....	413
§23.6 影响材料持久极限的主要因素.....	395		
§23.7 非对称循环下持久极限的变化规律、持久极限曲线.....			

第二十四章 考虑材料的塑性时杆件的计算

§24.1 按承载能力计算静不定杆系.....	415	§24.5 高温下的塑性变形、徐滑试验.....	426
§24.2 按承载能力法计算受扭转的圆轴.....	418	§24.6 徐滑时许用应力的确定.....	429
§24.3 按承载能力法计算静定梁.....	420	§24.7 应力松弛.....	433
§24.4 按承载能力法计算连续梁、关于塑性铰的概念.....	423		

附录 1. 函数 η 、 η_1 、 η_2 和 η_3 的数值.....	436
---	-----

附录 2. 计算弹性地基上的等截面梁用的院士阿·恩·克雷洛夫的函数表.....	438
---	-----

附录 3. A. 工字形压延断面的惯性几何特性.....	443
------------------------------	-----

B. 槽形压延断面的惯性几何特性.....	444
-----------------------	-----

第十四章 在任意載荷作用下構件的強度計算

§ 14.1. 杆在任意載荷作用下的應力計算方法

在以前各章中已討論了杆在載荷作用下發生拉伸、壓縮、剪切、扭轉和彎曲五種基本形式的變形時，計算其橫截面上應力的方法。實際上，大多數的杆在載荷作用下往往同時發生兩種以上的變形，例如機器上的傳動軸和曲柄軸是在彎曲和扭轉的聯合作用下工作的，擋土牆除了受本身重量的壓縮外還受土壓力的作用而發生彎曲等（見圖 14.1）。

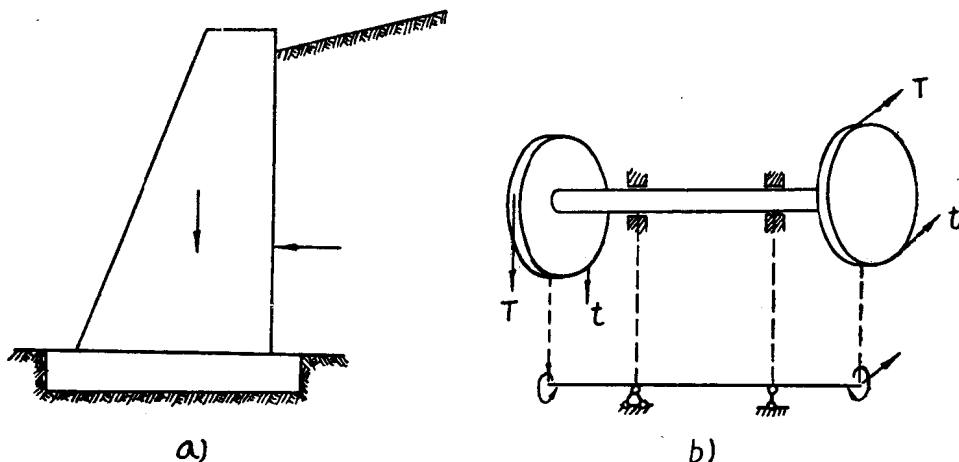


圖 14.1

在任意載荷作用下，杆將同時發生兩種以上的基本變形，按杆所發生的變形情況，在本章中將討論以下諸問題：

- (1) 斜彎曲，以及兩個主平面內彎曲的聯合作用；
- (2) 彎曲與拉伸或壓縮的聯合作用，偏心拉伸或壓縮；
- (3) 彎曲與扭轉的聯合作用，彎曲、扭轉與拉伸或壓縮的聯合作用。

在這一類問題的計算中，通常是利用生文南原理和力作用的迭加原理，將作用在杆上的任意載荷簡化為一系列與其相當的載荷，每一個載荷僅產生一種基本形式的變形；分別求出每一個載荷在構件橫截面上所產生的應力，然後由力作用的迭加原理求出橫截面上總的應力即等於原來的載荷所產生的應力。必須指出，這種方法的應用是受到一定限制的，首先，在載荷作用點的鄰近截面上不能用此方法計算應力（因為生文南原理只適用於離載荷作用點較遠的截面處）；其次，在力作用的迭加原理不能應用的某些情況中（例如細長杆同時受縱向力和橫向力而彎曲時）也不能應用此種方法。

在計算任意載荷作用下棱體杆任意橫截面上〔例如图 14.2, a) 的 mn 截面〕的應力時，可以用所研究的橫截面將杆假想地截開為兩部分，棄去其左半而研究其留下的右半；作用在留

下部分上的外力可以简化到横截面 mn 的形心处从而变成三个通过截面形心的力 N, Q_y, Q_z 和三个力偶 M_k, M_y^H, M_z^H (图 14.2, b), 其中 x 轴与棱体杆的轴线(横截面形心联线)重合, y, z 两轴则为横截面的两个中心主惯性轴。每一个力或力偶均只产生一种基本形式的变形。与此六个简化后的外力相对应的变形形式、内力素[参看图 14.2, c)] 以及横截面上的应力计算公式可以参看表 14.1。根据这些应力计算公式, 利用力作用的迭加原理, 即可求出横截面上任意一点的应力, 作为强度计算的根据。

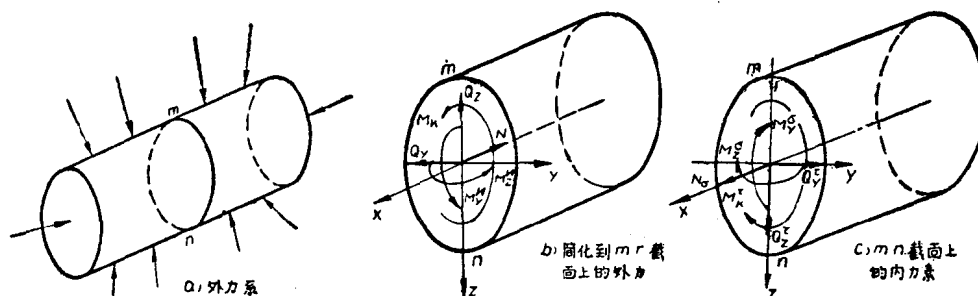


图 14.2

表 14.1

简化到横截面形心上的外力	相应的内力素	相应的变形	横截面上应力的计算公式
$N = \sum X$	轴力 N_σ	拉伸或压缩	$\sigma = \frac{N}{F}$
$Q_y = \sum Y$	剪力 Q_y^τ	主平面 xy 内的剪切	$\tau_y = \frac{Q_y S_{(y)}}{J_z b_{(y)}}$
$Q_z = \sum Z$	剪力 Q_z^τ	主平面 xz 内的剪切	$\tau_z = \frac{Q_z S_{(z)}}{J_y b_{(z)}}$
$M_k = \sum M_x$	扭矩 M_k^T	扭 转	$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p} (\text{圆截面})$
$M_y^H = \sum M_y$	弯矩 M_y^σ	主平面 xz 内的弯曲	$\sigma = \frac{M_y z}{J_y}$
$M_z^H = \sum M_z$	弯矩 M_z^σ	主平面 xy 内的弯曲	$\sigma = \frac{M_z y}{J_z}$

§ 14.2. 杆在斜弯曲情况下的应力及变形计算

当垂直于杆轴线的横向力的作用平面并不与杆的主平面 (即通过横截面的一个中心主轴而与横截面垂直的平面, 例如图 14.2 中的 xy 和 xz 平面) 重合时, 实验结果指出: 弯曲后杆的轴线(挠曲线)已经不在外力的作用平面上了, 这种弯曲即被称为斜弯曲, 屋面上的桁架是斜弯曲的典型例子 (图 14.3)。

斜弯曲可以看成是两个平面弯曲的联合作用, 因此, 只要将斜弯曲分解为两个主平面内的平面弯曲, 分别计算在两个平面弯曲中横截面上任意一点 c 的正应力, 再利用力作用的迭加原理求出两个正应力的代数和, 即等于在斜弯曲情况下横截面上 c 点的正应力 [图

14.4, a)], 并且从而可确定横截面上的最大正应力。以同样的道理分别算出两个平面弯曲情况中的挠度, 按力作用的迭加原理算出其向量和, 即可求出在斜弯曲情况中的最大挠度。

下面以一端固定, 另一自由端承受集中载荷 P 的椭圆截面直梁的斜弯曲为例 (图 14.4), 来说明斜弯曲时梁的横截面上正应力和梁的变形的计算方法。

假定载荷 P 作用在自由端截面的形心 B 上, 其方向与截面的中心主轴之一的 z 轴成 φ 角, 假定 yz 坐标轴的选择方法是使 P 力恒在坐标系的第一象限内。现在将 P 力分解为沿 y 轴和 z 轴方向的两个力 P_y 和 P_z , 其值为:

$$P_y = P \sin \varphi, \quad P_z = P \cos \varphi.$$

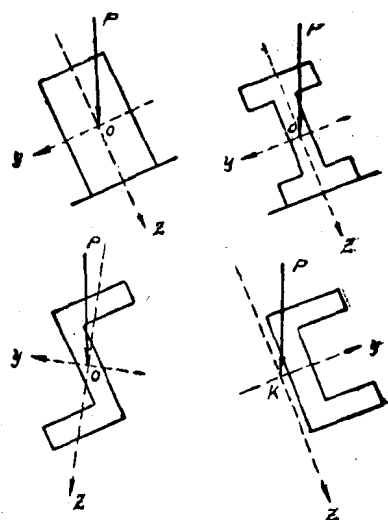


图 14.3

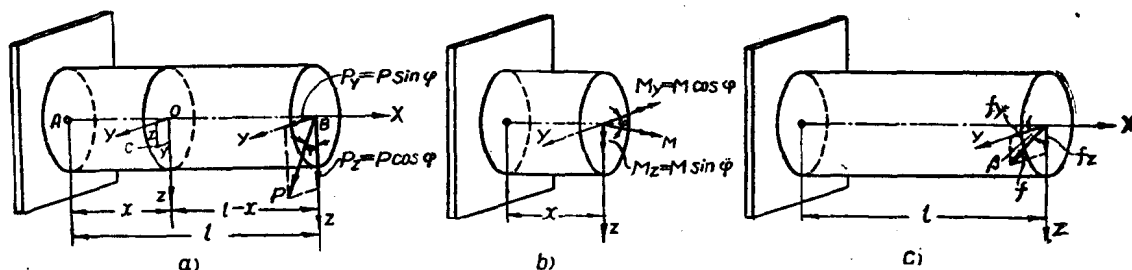


图 14.4

P_y 和 P_z 两力将使梁分别在两个主平面 xy 和 xz 内发生平面弯曲。在任意 x 截面上由于这两个力所引起的弯矩将等于

$$\left. \begin{aligned} M_z &= P_y \cdot (l-x) = P \cdot \sin \varphi \cdot (l-x) = M \sin \varphi; \\ M_y &= P_z \cdot (l-x) = P \cdot \cos \varphi \cdot (l-x) = M \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

其中: $M = P(l-x)$ 代表在 P 力作用平面内的弯矩。显然弯矩 M_y 和 M_z 同样也可以通过向量分解的方法将弯矩 M 分解到两个主轴方向以求得 [图 14.4, b)]。

在 x 截面上任意一点 $c(+y, +z)$ 处的正应力, 可以分别地按两个平面弯曲来计算:

$$\text{由于 } M_y \text{ 的作用} \quad \sigma' = -\frac{M_y \cdot z}{J_y} = -\frac{M \cos \varphi \cdot z}{J_y},$$

$$\text{由于 } M_z \text{ 的作用} \quad \sigma'' = -\frac{M_z \cdot y}{J_z} = -\frac{M \sin \varphi \cdot y}{J_z},$$

上式中的负号是因为在 c 点 $(+y, +z)$ 处由于 M_y 和 M_z (均为正值弯矩) 所引起的正应力均为压应力的缘故。

它们的代数和即等于梁在斜弯曲情况下由于弯矩 M 所引起的 x 截面上 c 点处的正应力:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -M \left[\frac{z \cos \varphi}{J_y} + \frac{y \sin \varphi}{J_z} \right], \quad (14.2)$$

上式中 J_y 和 J_z 依次代表横截面对 y 轴及 z 轴的惯性矩。由于将 P 力放在 yz 坐标系的第

一象限中, 因此可以认为 M 和 φ 均为正值, 用(14.2)式计算任一点的正应力时只需将该点的 y, z 坐标的代数值代入, 即可得到该点的正应力, 正值代表拉应力而负值则代表压应力。

(14.2) 式虽然是根据一端固定, 另一自由端受集中载荷作用的梁在斜弯曲情况下所导出的, 但同样可用于其他支座形式及载荷情况的梁中, 为了保证 (14.2) 式的符号正确, 必须选择 yz 坐标轴位置, 使载荷恒作用在 yz 坐标系的第一象限内。

既知横截面上任意一点的正应力, 即可进一步确定横截面上的最大正应力所在点的位置及其数值。由于斜弯曲可以看成是两个平面弯曲的联合作用, 而在平面弯曲时曾假定横截面象刚性平面一样地绕中性轴旋转(变形的平面假设), 因此, 在两个平面弯曲的联合作用下, 横截面将绕两个中性轴旋转, 根据理论力学中的原理可知, 其组合的效果即相当于横截面绕通过此两中性轴交点的另一轴旋转, 这个轴也就是在斜弯曲情况下横截面上的中性轴, 或称为零应力线。既然在斜弯曲情况下横截面也象刚性平面一样地绕其零应力线旋转, 因此, 横截面的任意点的正应力均与该点到零应力线的垂直距离成正比, 换言之, 即沿横截面上任一直线上各点的正应力均按直线规律变化(图 14.5)。

这样, 就可以得到如下的结论: 离零应力线垂直距离最远的点其正应力为最大。因此, 要确定最大正应力所在点的位置及其数值, 首先应该确定零应力线的位置。据根定义, 零应力线上各点的正应力均等于零, 因此, 若令 (y_0, z_0) 为零应力线上任意一点的坐标, 则有如下条件:

$$(\sigma)_{y=y_0, z=z_0} = -M \left[\frac{z_0 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_0 \sin \varphi}{J_z} \right] = 0,$$

从而得到零应力线的方程:

$$\frac{\cos \varphi}{J_y} \cdot z_0 + \frac{\sin \varphi}{J_z} \cdot y_0 = 0; \quad (14.3)$$

(14.3) 式是一条通过坐标原点的直线, 它与 y 轴间的夹角 α 值可以由下式算出

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_0}{y_0} = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{J_y}{J_z}, \quad (14.4)$$

上式中的负号表示 α 角是在 yz 坐标系中的第二象限内(图 14.5)。

既知零应力线的位置, 即可作与零应力线平行的线使与横截面的周边相切, 以确定离零应力线垂直距离最远点的位置(即最大正应力所在点), 例如图 14.5 中的 1、2 两点。该两点处的正应力分别为横截面上的最大拉应力和最大压应力。将两点坐标的代数值 (y_1, z_1) 、 (y_2, z_2) 代入公式(14.2), 即得横截面上的最大拉应力和最大压应力。在图 14.5 所示之例中:

$$\left. \begin{array}{l} \text{最大拉应力在 1 点}(y_1, z_1 \text{ 均为负值}): \rho \sigma_{\max} = \sigma_1 = -M \left[\frac{z_1 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_1 \sin \varphi}{J_z} \right]; \\ \text{最大压应力在 2 点}(y_2, z_2 \text{ 均为正值}): \rho \sigma_{\max} = \sigma_2 = -M \left[\frac{z_2 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_2 \sin \varphi}{J_z} \right]. \end{array} \right\} \quad (14.5)$$

上述方法及公式可以用来确定在斜弯曲情况下任意形状的横截面上(例如图 14.6 所示的钢轨截面)的最大应力。

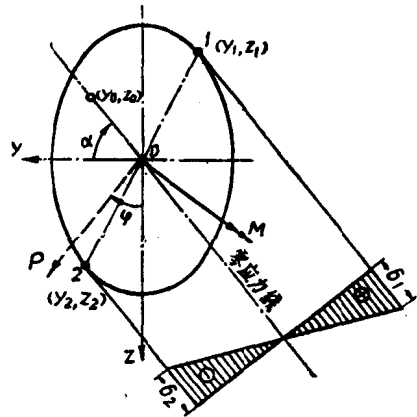


图 14.5

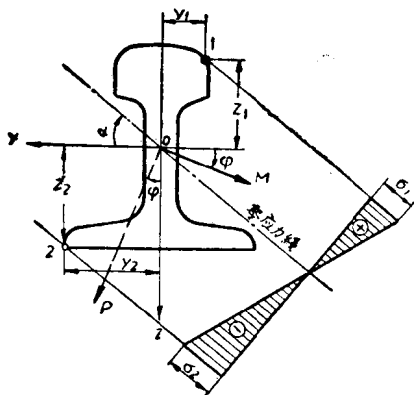


图 14.6

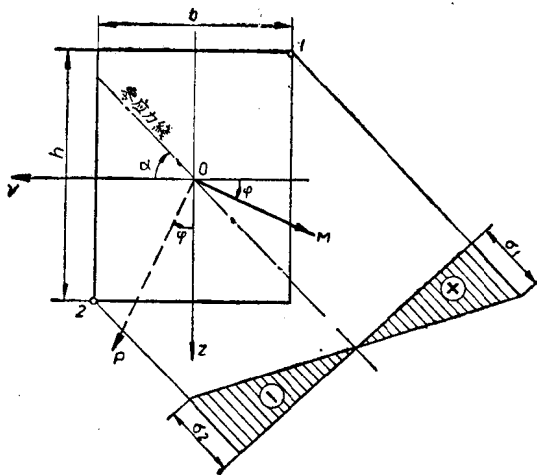


图 14.7

在图14.7所示的矩形截面中,将1,2两点的坐标值代入(14.5)式可得:

$$\left. \begin{aligned} p\sigma_{\max} = \sigma_1 &= -M \left[\frac{-\frac{h}{2}\cos\varphi}{J_y} + \frac{-\frac{b}{2}\sin\varphi}{J_z} \right] = M \left[\frac{\cos\varphi}{W_y} + \frac{\sin\varphi}{W_z} \right] = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}; \\ c\sigma_{\max} = \sigma_2 &= -M \left[\frac{\frac{h}{2}\cos\varphi}{J_y} + \frac{\frac{b}{2}\sin\varphi}{J_z} \right] = -M \left[\frac{\cos\varphi}{W_y} + \frac{\sin\varphi}{W_z} \right] = -\left[\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \right]. \end{aligned} \right\} (14.6)$$

讀者可自行証明,在具有棱角的对称截面中(例如矩形、工字形等截面)最大正应力恒发生在 yz 坐标系的第一三象限的頂角处(当载荷作用在第一象限时),而且其值恒可由公式(14.6)来计算。必須指出,对于没有棱角的截面决不可以用公式(14.6)来计算最大正应力。

在两个中心主惯性矩相等的截面中(即 $J_y = J_z$),例如圆形、正方形、环形截面等,由(14.4)式可算出其零应力綫与 y 軸間的夹角 α 的正切值:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{J_y}{J_z} = -\operatorname{tg} \varphi,$$

由此可知,零应力綫垂直于外力的作用平面。这就是說,在这一类截面中,不論载荷作用在哪个平面內均将发生平面弯曲而不会发生斜弯曲。因此,对于这类截面可以直接按平面弯曲公式进行計算。事实上,在 $J_y = J_z$ 的截面中,任何通过截面形心的軸均为中心主軸(可以由公式 9.21 推导出),因此,根本就没有发生斜弯曲的可能。

在斜弯曲中計算剪应力的方法,显然也同样地可以采用分別計算两个平面弯曲情况中的剪应力,然后按迭加原理算出其几何和(因为两个剪应力方向互相垂直)。但由于在斜弯曲情况下剪应力的数值往往很小,在实际运算中是不考虑剪应力强度条件的,因此这种計算沒有实用价值,这里就不加討論了。

最后来研究斜弯曲情况下挠度的計算。仍以图 14.4 所示之梁为例,要計算梁自由端的挠度,首先还是把 P 力分解成 P_y 和 P_z 两个分力,然后計算在这两个分力作用的平面弯曲中,梁在自由端的挠度 f_y 和 f_z ,最后求出它們的向量和,即得斜弯曲时的总挠度 f 。由平面弯曲中的公式可知:

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{P \sin \varphi l^3}{3EJ_z}; \quad f_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{P \cos \varphi l^3}{3EJ_y};$$

梁自由端的总挠度等于:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \frac{Pl^3}{3EJ_z} \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{J_z}{J_y}\right)^2 \cos^2 \varphi}. \quad (14.7)$$

上式同样可以用以计算其他载荷方式和支座情况下的梁在斜弯曲时的总挠度, 只需将根号前面的系数改变为相应于各种支座和载荷情况下在 xy 平面内发生平面弯曲时的挠度值即可。

由 f_y 和 f_z 的数值还可以算出总挠度与 y 轴间的夹角 β [图 14.4, c)] 的数值:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (14.8)$$

由此证明了在斜弯曲情况下挠曲线所在平面与载荷的作用平面是不重合的, 因为只有当 $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \varphi$ 时才意味着两者的重合。

由公式(14.4)知道零应力线 with y 轴间的夹角 α 是由

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \varphi$$

来计算的。从而得:

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg} \varphi \cdot \left(-\frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \varphi\right) = -1;$$

由此可知零应力线仍旧是与梁的挠曲线所在平面垂直的。

§ 14.3. 斜弯曲情况下梁的强度校核

根据(14.5)式可以进行在斜弯曲情况下梁的强度校核。首先, 应该确定最大弯矩所在截面的位置及最大弯矩值 $M_{\max}$, 然后将 $M_{\max}$ 值代入(14.5)式即可得到在斜弯曲情况下梁的横截面上的最大正应力。在材料的拉压强度不等的情况下, 可得出如下两强度条件:

$$\left. \begin{aligned} \rho \sigma_{\max} &= -M_{\max} \left[\frac{z_1 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_1 \sin \varphi}{J_z} \right] \leq [\sigma]_p, \\ |\sigma_{\max}| &= \left| -M_{\max} \left[\frac{z_2 \cos \varphi}{J_y} + \frac{y_2 \sin \varphi}{J_z} \right] \right| \leq [\sigma]_{\text{cck.}} \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

在材料的拉压强度相等的情况下, 只需利用上式中的一个强度条件即足。

在一般工程中常用的截面多半是有棱角的对称截面(例如图 14.8 中的诸截面), 在这一类截面中的最大拉应力与最大压应力相等, 且可由(14.6)式来计算:

$$\rho \sigma_{\max} = \pm \left[\frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} \right]. \quad (14.6)$$

同时, 常用的梁均为钢制, 其拉伸与压缩

的许用应力是相等的, 因此, 对于这一类构件的强度条件可以写为

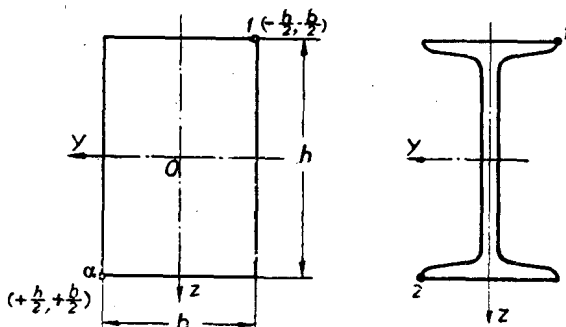


图 14.8

$$\rho\sigma_{\max} = \left[\frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} \right] \leq [\sigma]_p; \quad (14.10)$$

或简化为

$$\frac{M_{y\max}}{W_y} \left[1 + \frac{W_y}{W_z} \operatorname{tg} \varphi \right] \leq [\sigma]_p, \quad (14.11)$$

其中 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{z\max}}{M_{y\max}}$ [参看图 14.4, b)]。

由以上强度条件可知, 在斜弯曲情况下选择截面是较为困难的, 因为在强度条件中包括了两个未知的抗弯截面模数。若按(14.11)式选择截面则可以较为简便。

在矩形截面中(图 14.8)

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{\frac{1}{12}bh^2}{\frac{1}{12}b^2h} = \frac{h}{b},$$

因此, 只要知道 h 与 b 的比值即可确定 $\frac{W_y}{W_z}$ 的比值, 从而可按(14.11)式直接选择截面尺寸。

在工字钢及槽钢的截面选择中, 可以根据以下的 $\frac{W_y}{W_z}$ 近似值:

$$\text{工字钢截面} \quad \frac{W_y}{W_z} \doteq (8 \sim 10),$$

$$\text{槽钢截面} \quad \frac{W_y}{W_z} \doteq (6 \sim 8).$$

利用公式(14.11)初步选择一个截面, 然后再按所用截面实际的 $\frac{W_y}{W_z}$ 比值代入公式(14.11)进行核算, 通常经过一两次试算后即可最后确定所用截面的号码。

例题 14.1 跨度为 4m 的工字钢梁, 两端简支, 在梁跨的中点承受 $P = 2\text{T}$ 的集中载荷作用, 载荷平面与截面主轴 z 间的夹角为 $\varphi = 15^\circ$ (图 14.9)。钢的许用应力为 $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ 。选择此工字钢的号码, 并计算其最大挠度。

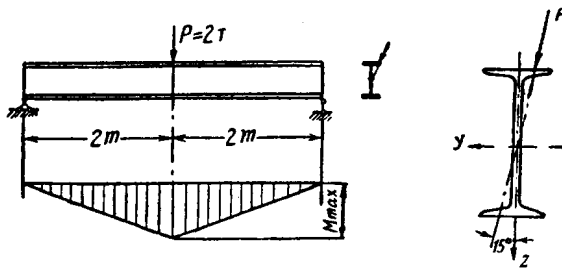


图 14.9

解: 在载荷平面内, 梁的最大弯矩在集中载荷作用的截面处:

$$M_{\max} = \frac{1}{4}Pl = \frac{1}{4} \times 2000 \times 400 = 200000 \text{ kg-cm}.$$

在主平面 oz 内的最大弯矩为

$$M_{y\max} = M_{\max} \cdot \cos \varphi = 200000 \cos 15^\circ = 193000 \text{ kg-cm}.$$

先假定工字钢的 $\frac{W_y}{W_z} = 6$, 由强度条件(14.11)得:

$$W_y \geq \frac{M_{y\max}}{[\sigma]} \left[1 + \frac{W_y}{W_z} \operatorname{tg} \varphi \right] = \frac{193000}{1600} [1 + 6 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ] = 315 \text{ cm}^3.$$

由工字钢表查得 22b 工字钢:

$$W_y = 325 \text{ cm}^3; \quad W_z = 42.7 \text{ cm}^3; \quad \frac{W_y}{W_z} = \frac{325}{42.7} = 7.62.$$

利用此 $\frac{W_y}{W_z}$ 比值代入(14.11)式得

$$W_y \geq \frac{193000}{1600} [1 + 7.62 \tan 15^\circ] = 367 \text{ cm}^3.$$

显然, 用 22b 工字钢是不够的, 因此, 可以采用大一号的: 24a 工字钢,

$$W_y = 381 \text{ cm}^3; \quad W_z = 48.4 \text{ cm}^3; \quad \frac{W_y}{W_z} = \frac{381}{48.4} = 7.88.$$

再将此 $\frac{W_y}{W_z}$ 比值代入(14.11)式得:

$$W_y \geq \frac{193000}{1600} [1 + 7.88 \tan 15^\circ] = 375 \text{ cm}^3;$$

从而可见, 用 24a 工字钢: $W_y = 381 \text{ cm}^3$ 是能满足强度条件的。

由此例可见, 采用层试法预先武断地假定一个 $\frac{W_y}{W_z}$ 比值, 一般经过两次试算即可确定截面尺寸。

此梁的跨度中点挠度最大, 先分别计算跨度中点沿 y 轴方向及 z 轴方向的挠度分量 f_y 及 f_z :

$$f_y = \frac{P_y l^3}{48 E J_z} = \frac{2000 \cdot \sin 15^\circ \cdot 4^3 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 280} = 1.23 \text{ cm};$$

$$f_z = \frac{P_z l^3}{48 E J_y} = \frac{2000 \cdot \cos 15^\circ \cdot 4^3 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4570} = 0.28 \text{ cm}.$$

然后按向量和求出最大挠度 $f_{\max}$ 值:

$$f_{\max} = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{(1.23)^2 + (0.28)^2} = 1.26 \text{ cm}.$$

最大挠度方向与 y 轴间的夹角 β 等于

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{f_z}{f_y} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.28}{1.23} \right) = \tan^{-1}(0.228) = 12.8^\circ.$$

§ 14.4. 杆在不同平面内的横向力作用下的弯曲问题

在机械制造中常用到的零件, 它所承受的横向力并不作用在同一平面内, 对这种零件的最大弯曲正应力的计算方法是将载荷分解到两个主平面内, 求出其分力, 然后再分别地画出两个主平面内的弯矩图, 从而确定最大弯矩所在的截面。分别计算此截面上由于两个主平面内的平面弯曲所产生的弯曲正应力, 再利用 §14.2 中的迭加法即可求出横截面上总的弯曲正应力。

先以矩形截面杆为例以说明此计算方法。图 14.10, b) 所示的矩形截面杆, 受到两个横向力 P 及 Q 的作用[图 14.10, a)], 先将 P, Q 两力分解为与主轴 y, z 方向平行的分力, 然后分别画出主平面 oy 及 oz 内的弯矩图[图 14.10, c), d)], 由此两弯矩图可以确定固定端 A 的弯矩为最大。在固定端 A 的横截面上由于 M_y 所引起的最大弯曲正应力为

$$\sigma' = \frac{M_y}{W_y},$$

作用在横截面的上下最外纤维处[图 14.10, e)]。

由于 M_z 所引起的最大弯曲正应力则为

$$\sigma'' = \frac{M_z}{W_z},$$

作用在横截面的左右两最外纤维处[图 14.10, e)]。

迭加之后显然可见, 最大拉伸和压缩应力分别发生在 1、2 两点, 其值为:

$$\sigma_{1,2} = \frac{P \sigma_{\max}}{c \pi \sigma_{\max}} = \pm \left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \right).$$

注意, 此结果与(14.6)式是相同的。

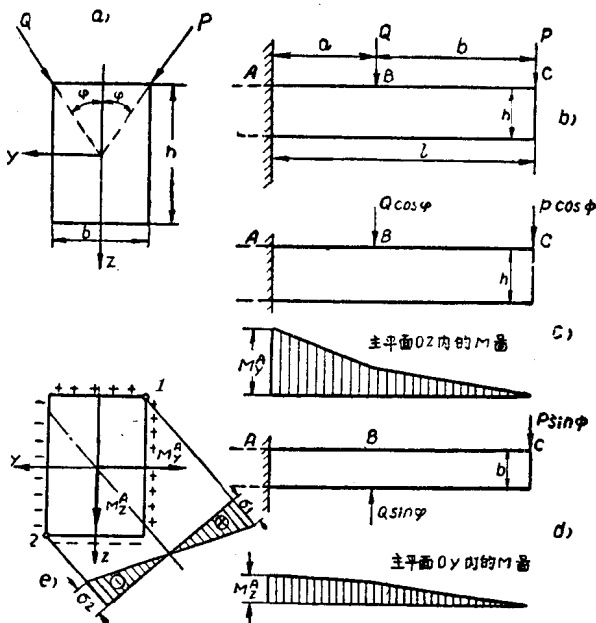


图 14.10

其次来研究圆截面杆受到不在同一平面内的横向力 P 和 Q 的作用[图 14.11, b)]时弯曲正应力计算的问题。由于圆截面的任一直径均为中心主轴, 因此可以选择 P 力的方向为主轴 z 的方向。 Q 力可以沿两主轴 y, z 的方向分解为

$$Q_y = Q \sin \varphi \quad \text{及} \quad Q_z = Q \cos \varphi$$

两个分力。分别绘出主平面 oz 及 oy 内的弯矩图[图 14.11, c), d)]。由圆截面的特点——任意直径均为中心主轴, 可以在计算弯曲应力时将两个不同平面内的弯矩按向量相加得到一个总的弯矩 M_u :

$$M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}, \quad (14.12)$$

然后根据此弯矩按照平面弯曲进行计算。由图 14.11, c), d) 可知最大总弯矩 $\max M_u$ 必定在 C, D 两截面中的一个截面上, 假定在 D 截面处, 则:

$$\max M_u = {}_D M_u = \sqrt{{}_D M_y^2 + {}_D M_z^2},$$

参看图 14.11, e)。根据此弯矩值, 即可按平面弯曲的公式(12.8)算出 D 截面上的最大弯曲正应力:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_u}{W} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{{}_D M_y^2 + {}_D M_z^2},$$

其中, d 为圆杆的直径。

必须指出, 这种方法仅适用于圆截面及环形截面, 因为这类截面既不可能发生斜弯曲, 而且对于任何形心轴的 W 值均相等。

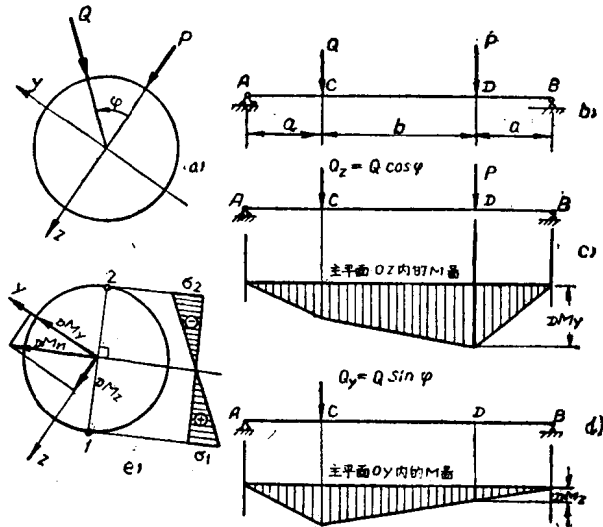


图 14.11

建议读者自行研究椭圆截面杆受到不在同一平面内的横向力作用时如何计算其最大弯曲正应力。

§ 14.5. 受弯曲与拉伸(或压缩)联合作用的杆的强度校核

如果作用在梁上的力除了横向力外还有轴向力, 则梁的变形就成为弯曲和拉伸或压缩的联合作用, 例如挡土墙、悬臂式滑车架等。现在来研究一个最简单的例子, 图 14.12 中的 AB 梁(其横截面具有两个对称轴)受均布载荷 q 及轴拉力 P 的同时作用, 若梁的挠度与横截面尺寸相比可以略去不计, 则可假设轴拉力 P 在横截面上只产生均匀分布的正应力。在此假设的基础上, 可以利用力作用的迭加原理来计算横截面上的最大正应力。由于轴拉力 P 所产生的应力为:

$$\sigma_P = +\frac{P}{F};$$

而由于分布载荷 q 所引起的弯矩最大的截面(固定端截面 A , 即最危险截面)上的最大弯曲

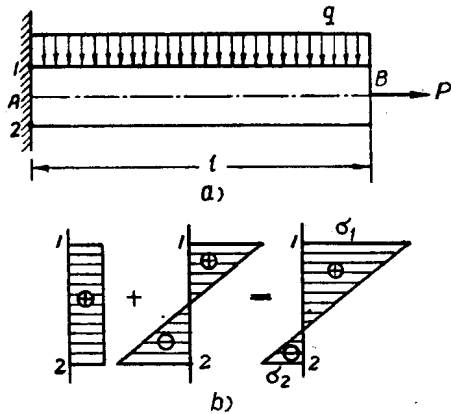


图 14.12

正应力为:

$$\sigma_q = \pm \frac{M_{\max}}{W}.$$

两者的代数和即等于最危险截面上上下两最外纤维 1 及 2 处的正应力:

$$\sigma_1 = + \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}. \quad (14.13)$$

在图 14.12, b) 中给出了固定端截面 A 上由于轴拉力 P 和弯矩 $M_{\max} = ql^2/2$ 所引起的正应力分布情况及迭加后总的正应力分布情况。在 P 为拉力情况下, 最大应力为拉应力, 发生在固定端截面 A 的最上缘纤维 1 处; 若 P 为压力, 则最大应力为压应力, 发生在最下缘纤维 2 处。

若以 N 表示轴力, $M_{\max}$ 表示梁内最大弯矩, 则在弯曲与拉伸或压缩联合情况下按正应力的强度条件的普遍形式为:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W} \right| \leq [\sigma]. \quad (14.14)$$

至于在上式左端两项之间采用正号或负号划视轴力 N 为拉力或压力而定。

必须指出, 强度条件 (14.14) 式只适用于对于中性轴对称的横截面而且材料抵抗拉伸和压缩的强度相等的情况。在对于中性轴不对称的横截面中则应具体研究哪一边最外缘纤维的正应力最大, 并校核此处的强度。若材料抵抗拉伸与压缩的强度不等, 则应同时对两个最外缘纤维进行拉伸与压缩的强度校核。

当梁的挠度与横截面尺寸相比不能略去不计时, 则由于横向力所产生的弯曲变形将改变轴力作用的性质, 在此情况下轴力不但要引起简单拉伸或压缩, 而且还将引起附加的弯曲, 同时, 梁的挠度不但与横向力所产生的弯矩有关, 而且还与轴力所产生的弯矩有关, 因此这一类问题就不能利用力作用的迭加原理来解决了。但是, 当轴力所产生的弯矩与横向力所产生的弯矩相比较为甚小时, 在实用的计算中梁内最大正应力仍可按公式 (14.13) 作近似的计算, 不过该式中的 $M_{\max}$ 应包括轴力所引起的附加弯矩 Pf 在内, f 是横向力作用下梁的挠曲线中 P 力作用截面与最大弯矩截面两者间的相对挠度。这类问题的精确解可参看本书 §21.7。

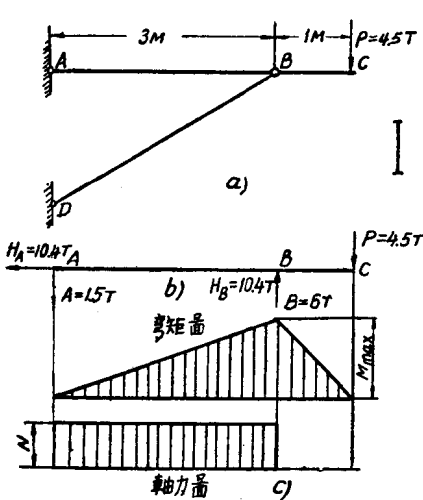


图 14.13

例 14.2 为图 14.13, a) 所示的钢支架中 AC 杆选择一工字钢截面。已知钢的许用应力为 $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ 。

解: 取 AC 杆为隔离体 [图 14.13, b)], 由静力平衡条件可得

$$\sum M_B = 0; \quad A \cdot 3 - 4.5 \cdot 1 = 0, \quad A = 1.5T (\downarrow);$$

$$\sum Y = 0; \quad B - 4.5 - A = 0, \quad B = 6.0T (\uparrow).$$

因为 BD 杆为二力杆件, 因此 BD 杆对 AC 杆的反力系沿 BD 杆方向, 从而可知:

$$H_B = B \cdot \text{ctg} 30^\circ = 6 \cdot 1.73 = 10.4T (\rightarrow);$$

在 AC 杆內,

$$\Sigma X = 0: \quad H_A = H_B = 10.4T(\leftarrow).$$

根据 AC 杆上的外力, 可以繪出其弯矩图及軸力图于图 14.13, c) 上, 由此两图可以确定 AC 杆上最危險截面为 B 截面, 其上的弯矩及軸力为:

$$M_{\max} = 4.5T - M = 450000 \text{ kg-cm},$$

$$N = +10.4T = +10400 \text{ kg}.$$

先不考虑軸力 N 的作用, 按弯曲正应力强度条件选择截面:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{450000}{1600} = 281 \text{ cm}^3,$$

由工字鋼表上查出: 22a 工字鋼 $W = 309 \text{ cm}^3$, $F = 42.0 \text{ cm}^2$. 选择此截面后应该再校核危險截面上的最大正应力(在 B 截面的最上边的纖維处)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{F} = \frac{450000}{309} + \frac{10400}{42.0} = 1456 + 247 = 1703 \text{ kg/cm}^2 > 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

从而可知, 用 22a 工字鋼时强度还不够, 因此, 必须采用大一号的 22b 工字鋼: $W = 325 \text{ cm}^3$, $F = 46.4 \text{ cm}^2$, 此时,

$$\sigma_{\max} = \frac{450000}{325} + \frac{10400}{46.4} = 1383 + 225 = 1608 \text{ kg/cm}^2.$$

$\sigma_{\max}$ 超过許用应力 $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ 仅 0.5%, 因此, 可以认为是安全的。注意, 在此例题中没有考虑由于軸力 P 所引起的附加弯矩 Pf 的影响, 因为其值甚小。

§ 14.6. 受偏心拉伸(或压缩)的杆的应力計算及强度校核

弯曲和拉伸(或压缩)的联合作用在实际应用中的另一重要問題是由于軸力不通过杆截面的形心而产生的所謂偏心拉伸(或压缩), 例如图 14.14 及 14.15 中所示的鉗床之机架和接触网所用的电杆即属于这一类問題。在本节中将研究由于軸力的偏心作用所引起杆的横截面上正应力的計算方法。根据生文南原理可知: 将作用在杆端截面上的偏心軸力用一个与其相当的新的力系代替后, 在离开杆端較远的横截面上应力的分布情况将不受到影响。因此, 在計算距杆端較远的横截面上由于偏心軸力所引起的正应力时, 可以将偏心軸力簡化到杆的端截面形心处, 变为一个通过截面形心的軸力和两个作用在主平面 xy 和 xz 內的力偶 M_x 和 M_y 。这就是把偏心拉伸(或压缩)的問題簡化为簡單拉伸或压缩与两个主平面內的純弯曲的联合作用。下面首先来研究偏心拉伸的情况, 所得到的結果只要將軸力变为負值即可用于偏心压缩的情况中。

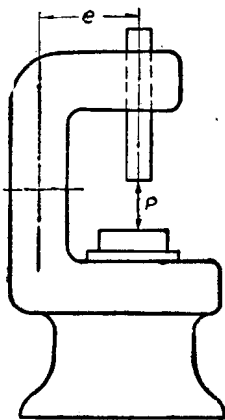


图 14.14

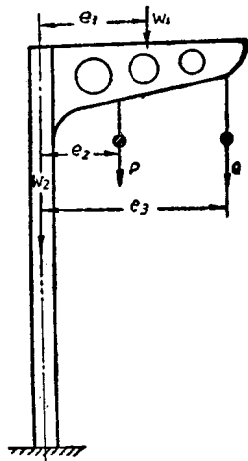


图 14.15

在图 14.16, a) 所示的杆的端截面上 A 点处作用着一个偏心的軸拉力 P (軸力以拉力为正值), 选择此截面的两个中心主軸为 y, z 坐标軸, 使 P 力的作用点 A 位于 yz 坐标系的第一象限內, P 力作用点 A 的坐标以 y_p, z_p 表示, (均为正值)。 P 力作用点 A 与截面形心 O 的联綫称为力綫。

为了计算离杆端较远的横截面上的正应力, 可以将 P 力用通过截面形心的 P 力和两个主平面内的力偶 M_y 、 M_z 来代替[图 14.16, b)], 显然可见:

$$\left. \begin{aligned} M_y &= P \cdot z_p \\ M_z &= P \cdot y_p \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

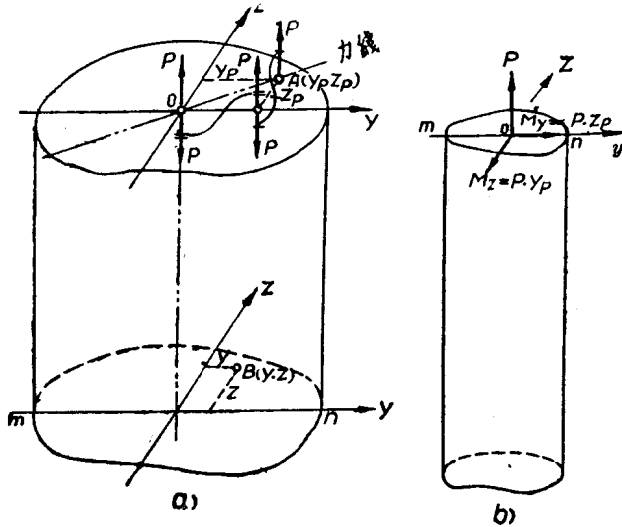


图 14.16

要计算距杆端较远的横截面上任意一点 $B(y, z)$ 处的正应力, 可以先分别算出由于轴力 P 及力偶 M_y 和 M_z 所引起的 B 点的正应力:

由于通过截面形心的轴力 P 所引起的 B 点的正应力为: $\sigma' = +\frac{P}{F}$;

由于主平面 xz 内的力偶 M_y 所引起的 B 点的正应力为: $\sigma'' = +\frac{M_y \cdot z}{J_y} = +\frac{P \cdot z_p \cdot z}{J_y}$;

由于主平面 xy 内的力偶 M_z 所引起的 B 点的正应力为: $\sigma''' = +\frac{M_z \cdot y}{J_z} = +\frac{P \cdot y_p \cdot y}{J_z}$.

然后, 根据力作用的迭加原理, 求出以上三个应力的代数和, 即得横截面上任意一点 B 在偏心轴力作用下的正应力:

$$\sigma = +\frac{P}{F} + \frac{P \cdot z_p \cdot z}{J_y} + \frac{P \cdot y_p \cdot y}{J_z} = +\frac{P}{F} \left[1 + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} \right], \quad (14.16)$$

上式中 i_y 及 i_z 分别代表横截面对两个主轴 y 和 z 的惯性半径(参看 § 9.10, 公式 9.29)。在上式中只要将 B 点的坐标值连同其符号一并代入, 即可求得 B 点正应力的数值(正值为拉应力, 负值为压应力)。附带地应该指出公式 (14.16) 不能用来计算靠近端截面的横截面上的正应力, 这些横截面上的应力属于局部应力, 只能由弹性理论的方法来计算。

由变形的平面假设可以推论得知横截面上应力分布规律仍为线性规律, 所以, 离开横截面上零应力线(在此线上各点的正应力均等于零)距离最远的点, 其正应力也将是最大的(参看 §14.2)。因此, 要计算横截面上的最大正应力, 首先应确定零应力线的位置。令零应力线上任一点的坐标为 y_0, z_0 , 则此点的正应力应等于零, 即: