塑性数学理论

R. 希尔

科学出版社

R. Hill

THE MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY

Oxford 1950

內 容 簡 介

本书是塑性理論方面的重要著作之一，內容精炼、实用．书中实例很多(特别是关于金属成形过程的)，并且注意提供实际所需的数据与近似方法．

全书共分十二章及几个附录．前三章着重基本概念与理論基础；第四至十章論述平面塑性应变和滑移綫場理論、彈塑性問題的解、二維定常与不定常运动問題、軸对称問題等，其中对二維运动問題論述尤詳；最后两章論述塑性各向异性等其他問題．附录一至四中介紹了有关的数学工具；中譯本并增加了附录五"金属准静态塑性变形的力学"，系作者在"G. I. Taylor七十寿辰紀念文集"中的一篇文章．

譯者在前言中对原书出版以来的塑性理論工作作了一个概括的介紹，并在书中加了一些注釋，补充了参考文献，使本书能适当反映塑性理論的当前发展．

本书可供研究及工程技术人員、应用数学工作者及高等院校有关专业师生参考．

塑 性 数 学 理 论

〔英〕R. 希尔 著

王 仁 等譯

*

科学出版社出版

北京朝阳門內大街137号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

上海新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1966年4月第一版 开本：850×1168 1/32

1966年4月第一次印刷 印張：13 5/8

精装：0001—1,470 插頁：3

平装：0001—1,330 字数：348,000

統一书号：13031・2245

本社书号：3408・13—2

定价：〔科七〕精装本 2.80 元 平装本 2.30 元

譯者前言

这是一本关于塑性力学数学理論的专著，它已出版了十多年．虽然这十多年来由于各方面生产上的需要，塑性力学的进展是很迅速的，而且目前国內有关塑性力学的专門著作也已譯著了好几本[1-9]，但是我們还是把它譯出来供塑性力学工作者参考，其理由主要是：

(1) 作者在总結和整理 1950 年前的塑性力学工作时有他的特色．本书作为塑性力学的数学理論，既做到了理論上的严格完整，又对当时的主要結果作出了簡炼而系統的概括．作者引用了塑性位势的概念，使应力-应变关系的綫索变得很清楚，把增量关系和全量关系的联系处理得簡单明了．书中关于解的唯一性定理和极値原理的討論，关于各向异性問題的討論，以及在处理具体問題时所进行的大变形分析等都是很有价値的，而其它书則較少討論．同时，本书也很注意树立明确的物理和力学概念．在解問題时，常能把理論解和实际結果进行比較；有必要时，能大胆从物理概念出发对問題进行簡化，而不是拘泥于数学理論．

(2) 在塑性力学的应用方面，本书在介紹了扭轉、厚壁容器等一些基本問題后，把主要精力集中在金属压力加工方面．本书关于剛塑性平面应变問題的討論是特別詳細和完整的，作者澄清了当时关于"靜定問題"的模糊概念，提出应力分布需要和速度分布一起考虑才能肯定是完全解，对应的載荷才有意义．本书关于非定常运动問題的討論也是最詳細的．作者在处理軸对称、平面应力以及各向异性問題时，也注意到在金属压力加工中的应用，給出了一些有意义的結果，它們經常被人引用．

(3) 本书在理論基础部分着重討論了等向强化 (isotropic hardening) 的增量应力-应变关系，在解强化材料的具体問題时

(虽然数量很少)，也用了这个关系．这些部分在其它书中較少介紹．虽然这种强化模型已被公认在应力分量的比值变化較大时与实驗結果不符，特别是它不能包括 Bauschinger 效应，因而近年来又提出了不少其它强化模型，但是，在常遇到的具体問題的加載过程中(稳定性問題除外)，各应力分量的比值实际上变化不大，基本上是合乎这种模型的使用范圍的*．另外，这种模型迄今还是最便于計算的，在广泛使用了电子計算机以后，現在用这种模型解問題的情形又多起来了．

(4) 作者担任主編的“固体的力学与物理学杂志”(Journal of the Mechanics and Physics of Solids) 从 1952 年創刊以来，經常发表塑性力学方面的新工作，它們經常以本书为基础，因而将本书譯出也会对参閱这些資料有所帮助．

我們最后附譯了作者在 1956 年发表的一篇总結性論文，把本书的內容补充到 1954 年底．

当然，本书也有不足之处，就总結当时的学科发展而言，本书沒有提及用全量理論解具体問題的方面，也沒有討論当时已取得一定进展的板壳結构的塑性分析問題(参看[2])．而从近代发展的結果来看，书中有些提法是不够全面的，值得讀者注意．我們将在以下結合近年来塑性力学的概况介紹加以討論．

本书在討論一般原理时采用了張量符号的縮写法則，有些讀者可能会覚得不习慣．其实，这里只采用了張量符号而沒有应用什么張量运算，只要先把附录一熟悉一下，看书时就不会有多大困难．熟悉一下这种符号也有好处，因为关于塑性理論基础的文献目前也都用这种符号．至于在解具体問題时书中仍回复到通常的符号，只須注意这里的剪应变分量 γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx} 是按張量的分量定义的，因而是通常工程书籍中同一符号的一半即可．

---

* 近年来，实驗表明，如果将比例极限看作为塑性的开始，則等向强化的模型較差，Bauschinger 效应很显著；但如果允許少量的永久应变(例如 0.05% 或 0.10%)作为塑性的开始，則这模型就能較接近于实驗結果．在工程应用中，通常是把永久应变为 0.2% 作为塑性的开始，这种模型和实驗結果就更接近．这时，这种模型的使用范圍可以相当大．

十多年来，塑性力学的发展是十分迅速的. 在基本理論和应力分析方面每年都有大量的工作发表，也經常有些全面的总結工作，至于其中一些主要部分的总結就更多了，要做一个簡单而又全面的介紹是极为困难的. 以下只想就个人认为是塑性力学发展中較为重要的几个方面，結合本书的內容，介紹一些近况和有关文献，尽可能理一下綫索，希望能对讀者有所帮助. 这介紹是不全面的，詳略也是不平衡的，有些不成熟的个人看法写在这里，还希望讀者批評指正. 至于較詳細的全面总結，讀者还应該参看[10,11]，他們分别是西方国家和苏联在1955年前的工作总結，后者还提到塑性力学的发展方向；[12]是1960年做的总結，也談到发展方向，[13]是一个专門討論塑性力学問題的論文集，涉及的方面較广，其中一部分已在力学譯丛中譯出，从这里也可以看出发展趋势.

一般說来，固体力学研究的問題大致可分为二个部分，其一是研究材料的力学性质，它的应力-应变关系和有关基本理論；另一是应用这些关系和理論解具体問題，求物体在外載荷作用下的应力和变形分布. 在彈性力学中，由于通常只考虑綫性彈性的情形，应力-应变关系早已确定，因而主要精力都在应用这些基本理論解具体問題. 这时，外載荷增长到某一数値时，体內有些地方的应力将增大到彈性极限. 如果外載荷再进一步增长，将出現一个进入塑性阶段的区域. 在分析塑性区域內的应力分布时，平衡方程、連續条件都和彈性阶段相同，所不同的只是应力和应变的关系，它是一个复杂的非綫性关系，加載和卸載时不同的关系. 在解具体問題时，由于既有彈性区域又有塑性区域，还要决定这两个区域的交界面，并在这里滿足应力和位移的連接条件. 这些都大大地增加了解題的困难.

以下先討論在基本理論及应力分析两方面的近况. 后面还单独把极限分析及动力学問題分开两段来討論，这是因为本书沒有涉及这些方面，而它們在近年来却有特别迅速的发展.

1. 基本理論方面*

在本书出版时，关于应力和应变的关系中如何看待全量(又称形变理論)和增量(又称流动理論)关系的問題正在进行着热烈的爭論．本来，在塑性阶段，由于变形的不可逆性，应該是一个应力增量和应变增量之間的关系，不过，在各应力分量按同一比例增长的簡单加載情形下，經过积分可得应力全量和应变全量的簡单关系(本书第二章第6节)．当然，用后者去解問題需要保証各点总是处在簡单加載过程．但是在平板的塑性失稳过程中，各应力分量的比例有很大变化，分明不是簡单加載，而实驗結果却和用全量关系計算的結果比較符合，而和用等向强化的增量关系計算的結果則相差很多．这个矛盾促使人們从更根本的途徑上去考虑塑性应力-应变关系．

在1950年前后，应用塑性位势理論討論应力-应变关系时，主要是取等向强化的 Mises 屈服条件作为位势函数．它們是应力分量的連續可微函数，在以应力分量为坐标的应力空間中，它們是一組按比例放大的光滑曲面(这些面用来区分何时将产生新的塑性变形，故又称为加載表面)，見图1．为了解决前述矛盾，Batdorf 和 Budiansky 在1949年根据金属变形的机构提出了滑移理論，說明加載表面将在加載点附近形成尖角，見图2．根据他們的計算，

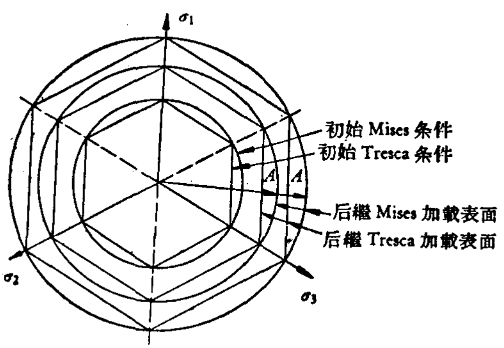

图1 等向强化模型

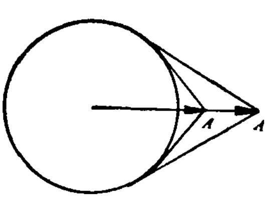

图2 滑移理論模型

---

* 这方面的总結还可以参看[14—17]；以下提到的一些具体工作可以从[15]所附的文献中查到．

板的失稳値和实驗結果能够較好地相符. 此后的十多年內，人們进行了大量的实驗，研究加載表面怎样随应力历史而变化. 根据这些实驗結果，或根据一些形式上的基本假設进行了許多研究，主要結果有:

(1) 认識到加載表面必須和应力-应变关系連在一起用，并且考虑到非光滑加載表面的情形. Koiter 和 Prager 等在 1953 年提出与 Tresca 屈服条件关連的流动法則(这就是和 Tresca 屈服条件連起来用的应力-应变关系;因为它只能决定应变率分量之間的比値，文献中又用此名称). 前者还提出，如果把位势函数看成是由无穷多个加載平面組成的，而且每个平面都服从对应的流动法則，那么，滑移理論可从位势理論导出，实质上它是一个非綫性的增量理論. 在这样的情形下，人們还进行了唯一性定理和变分原理的研究[17]. 对解的唯一性所进行的討論表明，对理想塑性体而言，加載表面和流动法則必須是关連的;对强化材料而言，强化率必須大于一个临界値才能保証解的唯一性. 本书常常一方面用 Tresca 屈服条件，同时又用 Reuss 关系，这是不符合本书的位势理論的，也不合乎以上要求. 但是根据一些計算結果看来，这样做的結果却又比用 Tresca 的关連流动法則所得的結果好，因而是否就一定不可以这样做，还不能做定論. 总之，本书在这个問題上确实还存在問題，有待进一步研究，讀者在閱讀时宜加注意.

由于 Tresca 屈服条件在軸对称情形下比較簡单，自从提出和它关連的流动法則后，使解題計算的工作大大簡化. 近年来在厚壁筒、板、壳等問題方面得到很多簡单封閉的分析解. 但是因为对六角形加載表面的角点，流动法則是一个奇点，使人怀疑它可能对結果有較大影响. 另外，也还沒有見到用这种关系分析的結果和实驗結果进行全面的比較，因而这种解只能看作是形式上的解. 关于怎样看待这些解，目前最好还是应用“綫性化”的近似計算观点，那就是将 Tresca 六面体看成是 Mises 圓柱体的一个近似，同时按照位势理論也将流动法則作相应的改变. 初步計算表明，如果应力分量的变化范圍不大，而且对应的流动法則也是較接近的时候

(例如厚壁筒受內压的情形),是很好的近似. 如果应力包括角点,那么由于流动法則相差很多,近似就較差. 这时,用同一观点,我們也可以在加載点附近另用一个切平面来代替 Mises 圓,并将流动法則作相应的改变. 例如用十二边形的加載表面計算圓孔应力集中問題的結果就比用六边形加載表面的結果更接近于 Mises 圓的結果. 这也就等于說把 Mises 圓进行逐段綫性化,而在做法上一直遵循位势理論的要求. 另一方面,我們又要問,能否像本书这样把 Mises 加載面用 Tresca 加載面代替而仍用 Mises 圓原来的流动法則? 如前所述,很可能正是由于它避免了角点的奇异性质,反而給出較好的結果. 这一点应如何和解的唯一性要求統一起来,有待进一步研究解决.

(2) 提出了各种强化模型. 近年来,人們采用了各种不同的应力变化历史,对多种材料进行了加載表面变化的实驗研究,所得的結果是多种多样的,很难得出統一的結論. 現将有关的結果結合理論上提出的下述两类强化模型一起討論.

一类是等向强化和运动强化以及这两者的組合(图 3). 在运动强化模型中,加載表面的形状和大小都不变,它只在应力空間中随着塑性变形的数量作平移. 这种模型可以刻划 Bauschinger 效应. 根据这种强化模型算过一些問題,計算不很复杂,但沒有見到和实驗結果进行比較. 把它和等向强化模型組合起来还可使加載

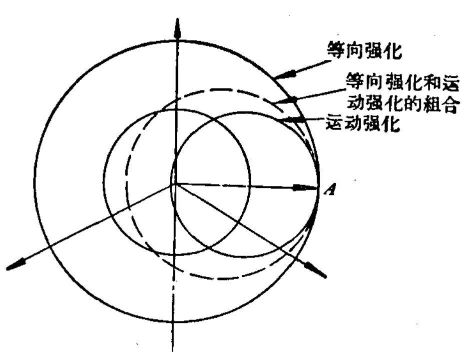

图 3 等向强化与运动强化及其組合

表面的形状和大小一起变化,以更好地接近实驗結果. 当然,計算起来就要复杂得多了. 这类强化模型有一个特点, 那就是在加載点附近的加載表面形状变化不多,不能反映产生尖角的实驗結果. 从一些資料来看,如果塑性变形不大,这类强化模型还較合理. 若将比例极限作为塑性的开始,实驗結果較接近于运动强化;若将永久变形为 0.2% 作为塑性的开始,則接近等向强化.因而在一般情形(除稳定性問題以外)下仍可以采用本书所讲的等向强化模型以便計算.

另一类强化模型是从滑移理論演变而来的. 这时将加載表面看成是由包絡平面組成的, 每个平面都有对应的流动法則, 加載点推动和它接触的各个平面向外平移, 形成一个尖角 (图 4 中 OAA). 总的塑性变形由各个有关平面的貢献积累而得. 用这个模型进行計算比較复杂. 同样可加以推广使整个加載表面随着变形(如图 4 虛綫所示),但由于計算太复杂,就沒有多大意义了. 从一些資料看来,在塑性变形較大时,加載表面有接近于尖角的高曲率区,因而較接近于这种模型. 这种模型虽然不便于計算,却有很大的理論价值,它促成了关于偏离簡单加載的理論探討.

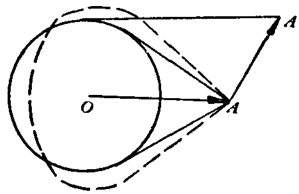

图 4

(3) 扩大了全量关系的适用范圍——偏离簡单加載. 以上討論的都是增量关系, 人們利用这些研究成果进行了全量关系适用范圍的探討. Sanders, Budiansky[18], Клюшников[19] 等人都提出了全量关系不但适用于簡单加載, 而且当加載历史在偏离簡单加載的一个相当大范圍內变化时也是适用的. 这就使人們加强了使用全量关系解强化問題的信心, 也解釋了为什么很多实驗結果即使在非簡单加載情形下也接近于用全量关系計算的結果. 伊留申[13, 16]从另一角度討論了复杂加載的情形, 并用实驗說明了偏离簡单加載的范圍. 虽然目前在定量方面的实驗結果还很少, 但看来用全量关系处理强化材料問題的有效范圍是可以相当大的.

李敏华[20] 用軸对称平面应力問題为例說明在大变形的簡单加載情形下也可应用全量关系. 我們在偏离簡单加載的情形下也做过一些計算,看来在大变形情形下前述結果也可以成立.

此外,在塑性应力-应变关系方面还有相当数量的工作是从各种金属变形机构的角度来进行考虑的. 例如从单晶体的性能推算多晶体的性能,从滑移和孿生机构考虑加載表面的变化等等[13]. 这方面的进展增长了我們对塑性变形机理的认識,有助于寻找合理的强化模型. 由于分析塑性动力学問題的需要,还进行了許多关于高应变率对屈服点和塑性性质的影响的实驗研究,目前还只限于一維应力状态[40]. 对于加載表面的变化,現在还只有一些形式上的推論. 因为需要在应力和应变以外同时考虑应力率和应变率,人們又把应力-应变关系改称为結构方程(constitutive equations). 近年来,在大变形情形下也做了不少形式上的推广和討論[12]. 本书作者还討論了这种情形下解的唯一性、稳定性和极值原理等問題. 由于高分子材料的广泛应用和金属学中的新发展,近年来对于由纤維加强的材料、各向异性材料的应力-应变关系的研究也多了起来.

2. 应力分析方面

在具体应用上述应力-应变关系时,无論是全量或增量的关系,都要用到材料在簡单加載情形下的强化規律(例如簡单拉伸曲綫),以决定各关系中的待定函数(例如本书第二章第5节公式(31)中的 H).

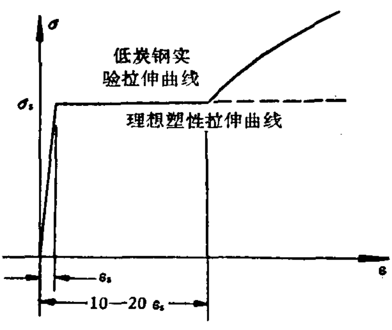

图5 理想塑性拉伸曲綫

为了簡化計算,常常用一些近似表达式代表这些强化規律. 用得最多的是彈性-理想塑性情形. 它可以很好地代表在鋼結构中最常用的低炭鋼材料的性状(見图5). 这种材料在应变超过彈性应变10—20倍时也不强化. 对这种材料,

加載表面保持不变，进行彈塑性阶段的应力和应变分析比較方便，理論也比較成熟，在[2, 3, 7, 8, 28]等书中都作了較詳細的介紹.

对于强化材料，如果也用上述近似（如图 6 中的虛綫 OAB）来計算物体內的应力和应变分布，其結果是不会好的．不过，由于这样計算很方便，用它来对物体的整体平均性质（如最大載荷）作初步估計还是有一定意义的.

要考虑强化效应，最簡单的近似是綫性强化，如图 6 中的 OCD．用这个近似解問題的很多，参看[2]．崔孝秉[21]利用全量关系考虑了如何利用綫性彈性（綫 OA）和理想塑料（綫 CE）的解，从中进行插入求出任意綫性强化的解．要进一步近似还可以用折綫强化（綫 $OCDE\cdots$），也就是用逐段綫性的近似.

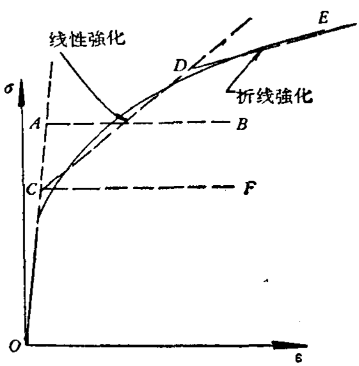

图 6　綫性强化

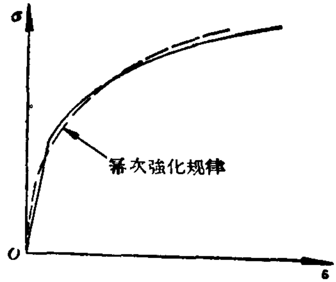

图 7　幂次强化

在用以上近似模型解問題时，最困难的是决定彈塑性交界面．如果将强化規律改用幂次曲綫表示（图 7），这样就可以不考虑彈塑性交界面，解問題就方便得多了．不过，这时在 $\epsilon=0$ 时楊氏模量为无穷大，因而在应变較小的区域，近似性較差；对于应变較大的問題，这个近似对鋁等强化材料是較好的．此外，还常用到 Ramberg-Osgood 强化規律：

$$\epsilon=\frac{\sigma}{E}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\sqrt{3}\,k}\right)^{2n}\right],$$

这里 n 是参数，k 是純剪的屈服应力．这个規律考虑到初始彈性

模量为E,同时也避免了彈塑性交界面的問題.

在具体分析强化材料的物体时，最方便的是用全量关系. 目前由于偏离簡单加載理論的发展，用全量关系处理問題的范圍大为扩大. 文献中出現了不少用全量关系解非簡单加載情形下的問題，并对所得的应力变化历史校核其是否滿足偏离簡单加載的条件[18]. 用全量关系进行应力分析的一般理論有依留申提出的彈性解方法[2]. 这是一个逐次逼近的方法，每次都解一个彈性力学問題. 近年来又提出了不少具体的近似解法,如級数解法,小参数解法,变分方法,把方程轉化为非綫性积分方程然后进行逐次积分的方法,松弛法等等;解过不少問題,如靜不定梁的分析,梁在弯曲时的剪应力效应,杆的扭轉,旋轉盘,圓孔的应力集中,厚壁筒,板,壳等等. 这方面还缺少全面的总結,讀者可以参看[11, 12, 22, 23]. 在大变形情形下也进行过不少工作，例如李敏华[14]处理了一系列軸对称平面应力問題,她在解題过程中很注意校核簡单加載条件.

由于現在的計算可以利用近代电子計算机技术，計算量的大小已不是主要問題，因而在計算强化材料的物体时又常常直接用实験的拉伸曲綫.

应用增量关系作彈塑性应力分析时，如果用 Mises 条件的等向强化模型，因为非綫性程度比較复杂，解算过的問題不多；已解的如厚壁筒和厚壁球的热应力問題[8, 24]，方杆的扭轉[13]，圓孔的应力集中等，这些都是应用电子計算机进行計算的. 自从提出与 Tresca 条件关連的流动法則以后，曾用它求得了一些簡单問題的封閉分析解,如厚壁筒,圓板弯曲,柱壳弯曲,圓錐形塑性流动問題等等,可参看[10, 12]. 如前所述，这些形式上的解还很少和实験結果进行比較. 同样,由于可以利用电子計算机,近年来关于在增量理論中应用逐次近似的計算方法也討論得較多[25, 26, 27].

由于要处理更接近于眞实物体的情况，近年来考虑过不少非均匀介质和各向异性物体的塑性力学問題[12].

在应变較大的时候,例如在金属压力加工的問題中,还可以忽略彈性变形而考虑剛塑性的情形. 这时，图 5, 6 中的近似强化曲

綫应該沒有彈性阶段，綫 OA 段和应力軸重合. 在体內一部分应变較小的区域里，塑性变形受到周圍彈性区域的限制而停留在彈性应变的数量級，因而这里的塑性变形也要加以忽略成为剛性区. 用这个近似規律解問題常常要比彈塑性情形簡单得多，特别是理想塑性的情形. 根据以上分析，所求得的解在剛塑性交界面附近的区域是不好的；在应变較大的区域，理論解和实驗結果相比則比較接近. 近年来用这种近似在压力加工方面所做的工作参看[8].

剛塑性模型也用来解通常变形不大的結构力学問題. 固然，对这种問題在使用条件下，一般应該考虑彈塑性变形，不过，寻求結构在破坏时所承受的最大载荷（极限载荷）也是有意义的，而在破坏时变形一般是大大超过彈性变形的，因而也可以应用剛塑性的近似規律. 用彈塑性分析和剛塑性分析求得的結构破坏载荷是相同的，而后者要簡单得多，因而进行的工作也多得多，这就是以下介紹的极限分析問題.

3. 极限分析方面*

对于理想塑性的材料而言，如果物体內的塑性区域扩大到一定程度，外载将达到一个最大値，而变形却还可以不断增长. 这时我們称物体达到塑性极限状态，对应的载荷为塑性极限载荷（也称为物体的承载能力）. 这个状态可以作为物体完全丧失工作效能（破损）的标志，因而研究这个状态对于如何充分发揮材料的力学性能很有实际意义. 近十多年来得到了很大的发展.

在本书出版前，对桁架、連續梁、框架等鋼結构寻求塑性极限载荷的工作已进行过不少，并且也进行过較多的实驗[28, 29]. 当时在苏联和英国已将部分研究結果吸收在結构設計規范中，使材料的使用更合理，从而节省了鋼材. 在本书出版时，这方面的結果逐步推广到一般問題，得出了一般性定理[7]. 此后，在框架結构方面发展到用机构組合的一般方法求极限载荷，并且継續研究了强化、变形及軸向力、剪应力等次要因素对极限载荷的影响. 近年来还考虑到混凝土結构的极限分析. 在板和壳的情形，开始时进展不

* 关于这方面的总結概述，可以参看[28—31].

大，但在提出与 Tresca 条件相关联的流动法則后，使变形和应力之間的关系大为簡化，不但得到了圓板、圓柱壳在簡单載荷下的完整解，对其它結构的分析也得到很迅速的发展．目前，在平板方面进行过的分析和实驗工作較多，結果也比較滿意．在軸对称壳体方面也提出了許多簡化方案，能給出較接近的上下限．国內在这方面进行过不少工作．現在这方面继續进行的研究工作包括怎样提高下限，从上下限决定眞实解的簡化計算方案，处理非軸对称問題，以及大变形和强化效应对于极限載荷的影响等等．特別是因为塑性变形較大，經过大变形以后，膜力发揮了作用，可以使結构的极限載荷大大提高；在这方面的工作近况还有乐美峰、余同希关于理想剛塑性双鉸拱和圓环的有限变形問題的研究．錢令希等最近提出了[32]一个从上下限估計眞实解的簡单計算办法，引起了热烈的討論．

极限分析理論也用来分析剛塑性平面应变問題，如果滑移綫場只滿足应力方面的要求，則对应于极限載荷的下限；如果只滿足位移方面的要求，則对应于极限載荷的上限．两方面都滿足称为完全解，它对应于眞实的极限載荷．这些概念也推广到了土力学中的斜坡稳定理論，分析土壤的承載能力，雪崩等問題．

在极限分析方面还进行了安定状态(shakedown state)的研究，那就是在变載荷或重复載荷作用下研究极限状态的問題．如果物体在最初几次外載作用下发生了塑性变形以后，体內产生一种有利的殘余应力分布，使得物体在以后的外載变化范圍內总是保持在彈性阶段，这就叫物体的安定状态[30]（苏联譯作适应性状态）．如果外載是从零到最大値之間变化的*（例如一般建筑、桥梁上所承受的外載），就可以利用安定状态提高彈性的使用范圍．不过，对于轉动机械中遇到的循环性載荷，由于抗疲劳的考慮，塑性設計就沒有什么优越性了．

在进行极限載荷分析的基础上，人們考慮怎样根据給定的外載进行塑性的最輕設計[28, 30, 31]．現在的最輕設計大多数还是事

* 更一般地說，只要外載的正最大値和負最大値不同，就可以利用安定状态．

先决定了結构的形状，根据极限状态的分析使材料的分布最合理、最經济．对于框架結构而言，在固定外載的情形可以化为綫性規划問題，在数学上沒有什么困难．現在研究移动和变动載荷下的最輕設計以及怎样选擇結构形状的問題．

順便在这里提一下結构的塑性稳定性問題．当受压部件先进入塑性阶段然后才失稳，就形成塑性失稳問題．由于这时結构在受到扰动后发生永久变形，并不回到原有状态，因而失稳准則和彈性失稳时所用的經典分歧点准則有所不同[31,33]．自从 Shanley 提出不卸載理論以后，在板和壳的情形也多数按照它来进行計算．在工程实用上，常常用結构所能承受的最大載荷（特别是壳）作为失稳値．按全量关系計算的結果一般和实驗結果比較接近，足够工程上应用．如按照增量关系計算，看来需要考虑初缺陷，并且还要用較复杂的强化模型．現在这还是在继續研究的重要問題．

4．塑性动力学問題

由于在抗御爆炸时要保証結构的安全和經济，主要应該利用材料的塑性变形性质．另一方面，在利用爆炸进行成形工艺或隧洞开挖时，也主要牵涉到材料的塑性和破坏性质，因而塑性动力学的研究成为近年来十分活跃的問題．

塑性动力学的研究大致可以分为二个方面．当外載作用时間較短而物体尺寸較大时，需要考虑塑性应力波的傳播．例如当在地面上受到强烈压力波的作用而要考虑地下建筑所受到的載荷时，就需要进行塑性波的傳播和反射的研究．由于問題还牵涉到材料在高应变率条件下屈服应力和塑性性质的变化，处理起来十分复杂，目前主要还是研究一維杆內的傳播問題以及球对称問題，詳細情形可見总結[34,35]．

当外載作用时間比纵波在物体內傳播的时間长得較多时，可以不考虑波的傳播，而只在分析物体的塑性变形时考虑慣性項的作用．这就是結构的塑性动力分析，王仁对結构在冲击載荷下的塑性分析作了一个总結，其中論述了結构怎样通过塑性变形消耗外載所傳入的能量．

此外，研究材料在高应变率条件下的塑性性质方面的工作也很多，可参看[34, 36, 37]及所附文献.

以上对近年来塑性力学进展的几个主要方面作了很概括的介紹，主要是提供一些国内容易查到的資料，希望对讀者有所帮助. 塑性力学的发展十分迅速，面也很广，有許多問題，如热应力、土力学等都沒有涉及，讀者还需要自己去查資料. 从总的情形看来，除了在应力-应变关系方面做了較多实驗研究以外，在应力分析等其它方面还是形式上的解多，和实驗結果进行全面比較的少，以致有很多工作的实际意义很不清楚. 讀者在参閱这些資料时还应該特别加以注意.

参加本书翻譯工作的还有教研室中董鉄宝、黃文彬以及来校进修的莊懋年、李旭等，譯文虽經本人和熊祝华同志全面校改，不当之处恐尙难免，还望讀者指正.

王　仁

北京大学固体力学教研室

1965 年 10 月

参考文献

[1] B. B. 索科罗夫斯基，“塑性力学”(1950)，王振常譯，建筑工程出版社(1957).

[2] A. A. 依留申，“塑性”(1948)，王振常譯，建筑工程出版社(1958).

[3] A. M. 卡恰諾夫，“塑性理論基础”(1956)，唐照千、周承倜譯，人民教育出版社(1959).

[4] E. П. 翁克索夫，“塑性的工程理論”(1959)，秦开宗譯，科学出版社(1963).

[5] O. 霍夫曼，G. 沙克斯，“工程塑性理論基础”(1953)，乔端、孙梁譯，中国工业出版社(1964).

[6] A. A. 依留申，B. C. 連斯基，“材料力学”(1959)，熊祝华、屈家溢譯，人民教育出版社(1963).

[7] W. 普拉格，P. G. 霍奇，“理想塑性固体理論”(1951)，陈森譯，科学出版社(1964).

[8] W. 約翰逊，P. B. 麦勒，“塑性理論——机械工程适用”(1962)，王則明譯，上海科学技术出版社(1965).

[9] 赵祖武編，“塑性理論基础”，人民教育出版社(1963).

[10] W. Prager，“塑性理論——近代成就的概述”(1955)，力学譯丛第二輯(1963)，40—60.

[11] A. A. 依留申，“塑性理論的一些現代問題”，力学学报，**2**, 3(1958)，207—218.

[12] W. Olszak, Z. Mroz, P. Perzyna，“塑性理論发展中的近代趋向”，Pergamon

Press (1963) (英文,俄文).
[13] E. H. Lee, P. S. Symonds, "塑性力学——第二次海軍結构力学討論会文集", Pergamon Press (1960) (英文).
[14] 李敏华、王仁, "塑性应力应变关系理論的文献总結", 力学学报, **2**, 2 (1958), 167—180.
[15] P. M. Naghdi, "塑性和热塑性的应力-应变关系", 力学譯丛, 1964 年第 1 期, 40—66.
[16] A. A. 伊留申, B. C. 連斯基, "复杂加載时材料的变形規律", 力学学报, **3**, 3 (1959), 191—206.
[17] W. T. Koiter, "彈塑性固体的一般理論", Progress in Solid Mech., **I** (1960), 165—221 (英文).
[18] B. Budiansky, "塑性形变理論的重新估价", *J. Appl. Mech.*, **26** (1959), 259—264 (英文, 有俄譯文: *Механика*, 1960, 2).
[19] В. Д. Клюшников, "塑性理論的新概念和形变理論", *П. М. М.*, **XXIII**, 4 (1959), 723—731 (俄文).
[20] 李敏华, "硬化材料的軸对称塑性平面应力問題的研究", 科学出版社 (1960).
[21] 崔孝秉, "插入法求强化彈塑性解", 力学学报, **8**, 1 (1965), 46—50.
[22] Ю. П. Лепик, "彈塑性与剛塑性板与壳的平衡", *Инж. Жур.*, **4** (1964), 600—616.
[23] A. Mandelson, S. S. Manson, "塑性变形問題在彈塑性阶段的实用解法", NASA, TR R-28 (1959) (英文).
[24] 黄竞存 (C. T. Hwang), "彈性/强化球体的热应力", *J. Appl. Mech.*, **27** (1960), 629—634 (英文).
[25] И. А. Биргер, "塑性流动理論中的彈性解法", *Изв. АН СССР, Мех. и Маш.*, **2** (1964), 116—118 (俄文).
[26] В. Д. Клюшников, "塑性流动理論中的彈性解法", *П. М. Т. Ф.*, 1965, в. 1, 133—135 (俄文).
[27] P. V. Marcal, "解彈塑性問題的一个剛度方法", *Inter. J. Mech. Sci.*, **7** (1965), 229—238 (英文).
[28] J. F. Baker, M. R. Horne, J. Heyman, "鋼构架 II, 塑性形态和設計", Cambridge Univ. Press (1956) (英文).
[29] A. P. 尔然尼采, "考虑材料塑性的結构計算" (1954), 赵超燮譯, 建筑工程出版社 (1958).
[30] P. G. 霍奇, "結构的塑性分析", McGraw-Hill (1959) (英文).
[31] 力学譯丛, 第四輯 (1963).
[32] 錢令希、钟万勰, "論固体力学中的极限分析并建議一个一般变分原理", 力学学报, **6**, 4 (1963), 287—303 及 **8**, 1 (1965), 63—76.
[33] A. C. Вольмир, "論壳体稳定性的准則", 力学譯丛, 1965 年第 2 期, 1—7.
[34] J. W. Craggs, "塑性波", Progress in Solid Mech., **II** (1961), 143—195.
[35] H. 考尔斯基, "固体中的应力波", 第二部分 (1953), 王仁等譯, 科学出版社 (1958).
[36] W. Goldsmith, "撞击——固体的碰撞", 力学譯丛, 1965 年第 3 期, 1—14.
[37] 張作梅、赵士达, "不同温度、速度条件下, G3, 1Cr 13 鋼、鋁、鉛等塑性变形抗力的研究", 金属学报, **6**, 2 (1963), 131—145.