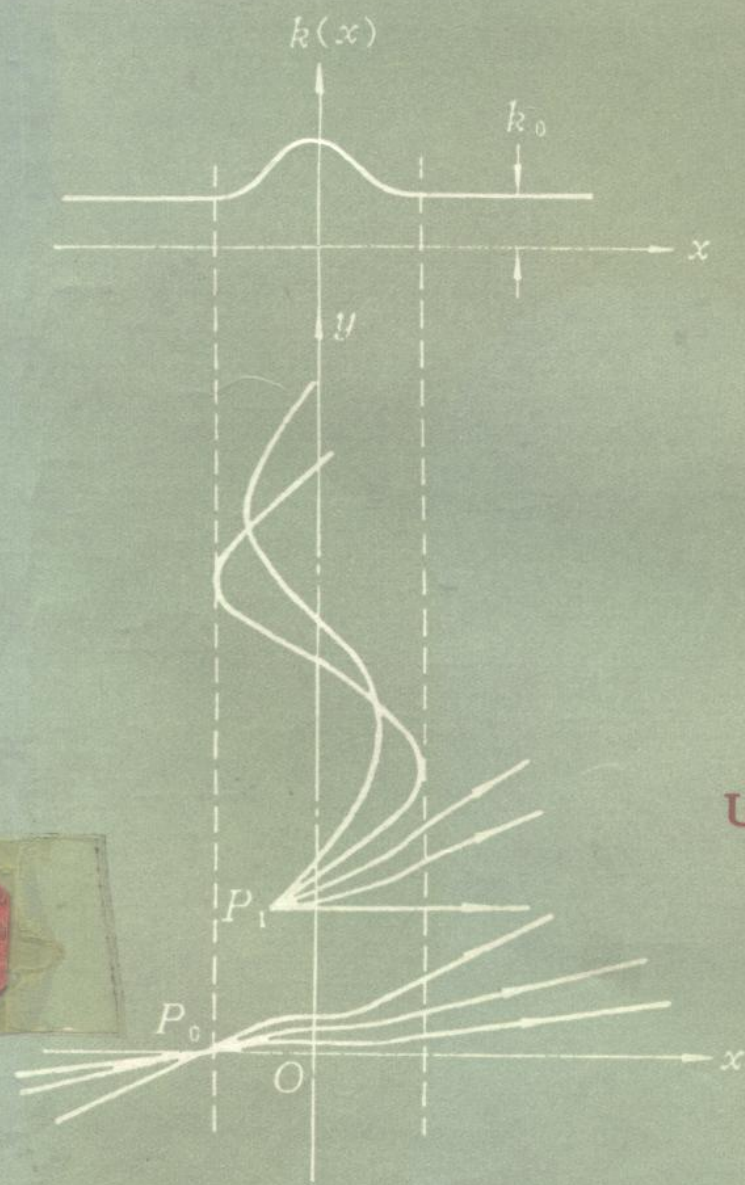
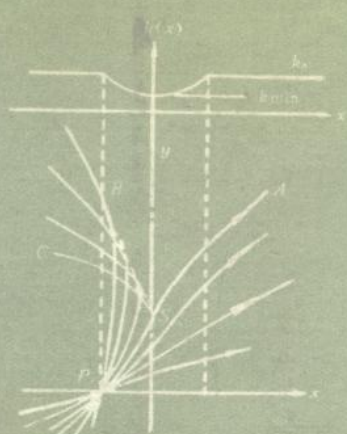


摄动理论

在船舶流体力学中的应用



刘应中 张乐文 编

SHANGHAI
JIAO TONG
UNIVERSITY PRESS

上海交通大学出版社

**摄动理论在
船舶流体力学中的应用**

刘应中 张乐文 编

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书重点介绍奇异摄动方法在水动力学、船舶流体力学、水波动力学诸方面的应用。全书共分7章，除第1章和第2章简要介绍了一些摄动法的基本概念和正则摄动方法外，依次叙述了变形坐标法、匹配渐近展开法、多重尺度法、WKB法和平均法。

本书强调理论联系实际，着重从应用角度论述摄动方法的基本概念和应用技巧；对各种不同的方法仅作形式解法的描述，不对它们作严格的验证。所举例子选自有关名著和各种近代文献，使读者不仅能深入理解摄动方法的具体应用，而且能了解有关学科的某些新近发展。

本书是为从事船舶流体力学工作的青年教师和研究生编写的一本入门书，也可作为船舶与海洋工程、土木、港工、水利、力学及应用数学专业的研究生和高年级本科生的教学参考书，也可供从事流体力学、水动力学、水波动力学、船舶流体力学和应用数学等方面教学和研究的教师和研究参考。

摄动理论在

船舶流体力学中的应用

出版：上海交通大学出版社

（淮海中路1984弄19号）

发行：新华书店上海发行所

印刷：江苏太仓印刷厂

开本：787×1092（毫米） 1/16

印张：12.75

字数：314000

版次：1991年6月 第一版

印次：1991年7月 第一次

印数：1—1000

科目：248—319

ISBN 7-313-00845-7/O·35

定 价：3.65 元

出版说明

根据国务院国发[1978]23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会(小组)是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年—1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会(小组)评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会(小组)复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位 and 广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

前 言

目前,非线性问题已经在各个领域里成为人们普遍关注的课题。而摄动法,尤其是奇异摄动法,是用来解决非线性问题所必需的一种有效工具。这种方法,从本质上说来,乃是一种解析或半解析的近似方法,它已经在解决各个领域的实际问题中得到了广泛应用。船舶流体力学就是这样的领域之一。

自 Peters 和 Stoker (1957)^[135] 用小参数法研究薄船和扁船的垂荡与纵摇运动以来,摄动法就被引进了船舶流体力学的领域中来。经过 Ursell (1962)^[136]、Newman (1961—1965)^{[137]—[139]}、Maruo(1967)^[140]等人的努力,把船舶作为经典细长体的理论取代了薄船在船舶运动问题中的地位。60年代末期,切片理论或新切片理论获得的成功,开创了理论预报实船运动的年代。与此同时,Newman^[48]和 Ogilvie^{[141]·[47]}、Adachi^{[50]·[51]}等都系统地总结了这方面的进展,并把它建立在匹配渐近展开方法的基础上。1969年 Ogilvie 和 Tuck^[142]提出了所谓合理的纵摇切片理论,Troesch^[143]则把它推广到水平面内运动的情形。1978年 Newman^{[52]·[53]}提出了统一的船舶的运动理论,由 Sclavanous^{[55]·[58]}加以实现。Maruo^[56] 1978年也提出过不同的细长体理论的改进。所有这些工作都采用了匹配渐近展开方法,在理论上比切片理论更完善,在实用上比切片理论更复杂。

兴波阻力的研究方面,从 Michell(1898)的薄船理论开始,经过近七十年的努力,人们总算认识到,引入自由面条件的非线性是改善理论的唯一途径。为了克服自由面上非线性条件带来的困难,人们应用各种奇异摄动方法作了尝试,多数获得了部分成功,其中包括匹配渐近展开的细长体理论^{[45]·[46]},坐标变形的薄船理论^{[79]·[80]·[81]},WKB的慢船理论^{[118]—[128]}等等。船舶操纵过程中的流体动力,由于粘性效应的重要性,难以应用摄动方法求解;但在某些特殊条件下,仍有不少尝试^{[68]—[74]}。

在我国,奇异摄动理论已受到广泛重视。但在造船界,熟悉和应用摄动理论的并不太多。本书的目的,就是为从事船舶流体力学工作的青年教师和研究生提供一本入门书。除了基本理论外,主要通过一些例子,部分地反映出摄动理论在船舶流体力学中应用的概貌,为他们进一步学习和掌握摄动理论,应用摄动理论解决自己面临的问题打下基础。

本书简略地叙述了正则摄动法(第2章),侧重介绍奇异摄动法。在奇异摄动法中主要选择了变形坐标法、匹配渐近展开法、多重尺度法、WKB方法和平均法。对每一种方法,主要通过例子来说明它们的应用,并未对它们作严格的验证。在选择例子时,优先选取船舶流体力学方面的应用题目,其次则是水动力学、特别是水波动力学方面的内容。编者的企图是使读者不仅能深入理解摄动方法的具体应用,而且能了解这些学科的某些新进展。

船舶工程教材委员会对本书进行了评审,并推荐出版。海军工程学院邱永寿教授受教材委员会委托审阅了书稿;许多同事、同行、朋友和学生在评阅或使用本书的过程中提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢。

编 者

1990.10

目 录

第1章 基本概念	1
1-1 渐近级数.....	1
1-2 量级与阶符.....	2
1-3 摄动问题与摄动理论.....	4
1-4 尺度化.....	5
1-5 正则摄动与奇异摄动	11
第2章 正则摄动法	12
2-1 正则摄动法的基本步骤	12
2-2 圆柱绕流的摄动	13
2-3 兴波问题的薄船近似	16
2-4 大直径圆柱体上的二阶波浪力	19
2-5 坐标展开	24
2-6 正则摄动方法的局限性	27
第3章 变形坐标法	35
3-1 参数摄动与坐标摄动	35
3-2 参数激励与 Mathieu 方程.....	36
3-3 Stokes 的有限振幅波	41
3-4 KdV 方程的周期行波解.....	43
3-5 Lighthill 方法	48
3-6 Guilloton 的兴波阻力理论.....	50
第4章 匹配渐近展开法	55
4-1 匹配渐近展开方法的基本思想	55
4-2 弱非线性阻尼条件下船舶在规则波中的横摇	58
4-3 对称薄翼的绕流	61
4-4 细长船体的兴波问题	66
4-5 细长船体的运动理论	69
4-6 圆柱体的短波辐射问题	75
4-7 浅水中细长船体的水动力	81
4-8 二维平板定常层流边界层理论	84
4-9 三重结构	93

第5章 多重尺度法	98
5-1 基本思想	98
5-2 两个简单例子.....	100
5-3 线性波浪在斜坡上的传播.....	105
5-4 一群 Stokes 二阶波	109
5-5 正弦波列的演化.....	113
5-6 Ogilvie-Baba 的慢船理论	121
5-7 船体运动产生的孤立波.....	126
5-8 非传播孤立波.....	132
第6章 WKB 方法	137
6-1 准经典近似解.....	137
6-2 转向点问题.....	139
6-3 Langer 变换与 Olver 的推广	142
6-4 海洋中的声场.....	146
6-5 几何光学近似.....	151
6-6 浅水波浪的变形.....	157
6-7 Keller 的慢船理论——射线理论	163
第7章 平均法	168
7-1 自由振动和强迫振动.....	168
7-2 超谐振动和次谐振动.....	171
7-3 高阶近似——KBM 技巧	174
7-4 一维的 Boussinesq 方程	177
7-5 平均变分法.....	181
7-6 Stokes 波的平均变分问题	185
参考文献	190

第1章 基本概念

1-1 渐近级数

在摄动理论与近似计算中,常常要涉及到渐近级数问题。以下我们先从实际例子着手。设

$$f(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} e^{x-t} dt, x > 0, t \text{ 为实数。}$$

此积分当 $x \geq \delta > 0$ 时是收敛的。这里感兴趣的是 $f(x)$ 在 $x \gg 1$ 时的行为。

分部积分,可得等式

$$\int_x^{\infty} t^{-n} e^{x-t} dt = x^{-n} - n \int_x^{\infty} t^{-n-1} e^{x-t} dt。$$

反复应用这个公式,给出

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} - \int_x^{\infty} t^{-2} e^{x-t} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2 \int_x^{\infty} t^{-3} e^{x-t} dt \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - 3! \int_x^{\infty} t^{-4} e^{x-t} dt \cdots = \sum_{m=1}^n u_m(x) + R_n(x), \end{aligned}$$

其中

$$u_m(x) = (-1)^{m-1} (m-1)! x^{-m};$$

$$R_n(x) = (-1)^n n! \int_x^{\infty} t^{-(n+1)} e^{x-t} dt。$$

对以上展开,有以下几点值得注意^[1]:

- (i) $u_{m+1}/u_m = -m/x$,所以对固定的 x 值,随项数 $n \rightarrow \infty$,级数和 $\sum_{m=1}^n u_m(x)$ 是发散的。
- (ii) 对固定的 m ,随 $x \rightarrow \infty$, $u_{m+1}/u_m \rightarrow 0$ 。
- (iii) 余项 R_n 的绝对值,当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$|R_n| \leq n! \int_x^{\infty} |t^{-(n+1)}| |e^{x-t}| dt,$$

而

$$t \geq x, \quad |t^{-(n+1)}| \leq |x^{-(n+1)}|,$$

所以

$$|R_n| \leq n! x^{-(n+1)} \int_x^{\infty} e^{x-t} dt = n! x^{-(n+1)} = |u_{n+1}|。$$

可见, $|R_n|$ 小于前面部分和的最后一项的绝对值。且当项数 n 固定而使 $x \rightarrow \infty$ 时, $|R_n| \rightarrow 0$ 。

(iv) 由于 $|R_n(x)| \leq n! x^{-(n+1)}$,对固定的 x ,它随 n 是增加的。所以欲求某一特定 x 值的 $f(x)$ 的最佳近似值,级数和 $\sum_{m=1}^n u_m$ 应在适当的 n 处截断,即 $f(x) \sim \sum_{m=1}^n u_m$ 并非项数取得越多越精确。

从上例中,可以看到这一展开的特性。它与一般的收敛级数不同。一般的收敛级数是考

考虑某 x 值, $n \rightarrow \infty$ 时余项是否趋于无穷小。而对上述展开, 我们的兴趣在于截取某一定的项数 n 后, 当 $x \rightarrow \infty$ 时余项是否趋于零。如果能保证余项趋于零, 则就得到了 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的渐近级数表达式。

应用部分积分只是求积分的渐近级数表达式的一种方法, 而且并不是总能成功。其它常用的方法有 Laplace 方法, 稳定相法 (Method of stationary phase) 和最陡下降法 (Method of steepest descents) 等, 请参见 Bender 和 Orszag (1978)^[2] 和 Nayfeh (1981)^[3] 的书。

根据上述例子, 现参照 [1] 对渐近级数作如下定义。一般来说, 设带小参数 ε 的定解问题的解可展开成

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^n \delta_m(\varepsilon) u_m(x) + R_n(x, \varepsilon), \quad (0 < \varepsilon \ll 1, x \in \Omega). \quad (1.1.1)$$

其中, $\{\delta_m(\varepsilon)\}$ 表示当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的渐近序列 (Asymptotic sequence), 满足: $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\delta_{m+1}(\varepsilon)/\delta_m(\varepsilon) \rightarrow 0$ 。 $R_n(x, \varepsilon)$ 称为余项。若对某个 n 满足:

$$|R_n(x, \varepsilon)| \leq M(x) \delta_{n+1}(\varepsilon) \quad (M(x) \text{ 为 } \Omega \text{ 内的连续函数})$$

时称 $\sum_{m=0}^n \delta_m(\varepsilon) u_m(x)$ 为解 $u(x, \varepsilon)$ 的 n 阶渐近近似式 (Asymptotic approximation)。若对任意的正整数 n , 上述有界条件都成立, 则称 $\sum_{m=0}^n \delta_m(\varepsilon) u_m(x)$ 为解 $u(x, \varepsilon)$ 的渐近展开式 (Asymptotic expansion)。而

$$u(x, \varepsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(\varepsilon) u_m(x) \quad (1.1.2)$$

称作 $u(x, \varepsilon)$ 的渐近级数 (Asymptotic series)。若 $\delta_m(\varepsilon) = \varepsilon^m$, 则称 $u(x, \varepsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m(x)$ 为 $u(x, \varepsilon)$ 的渐近幂级数。若对每个 n , 余项在 Ω 内一致有界, 即满足

$$|R_n(x, \varepsilon)| \leq M \delta_{n+1}(x), \quad (x \in \Omega, M \text{ 与 } x \text{ 无关}),$$

则称 $u(x, \varepsilon) \sim \sum_{m=0}^n \delta_m(\varepsilon) u_m(x)$ 为解 $u(x, \varepsilon)$ 的一致有效渐近展开式。

要把待定的定解问题的解 $u(x, \varepsilon)$ 作渐近展开, 就需要猜测合适的渐近序列。最简单的可能性是: 渐近序列由整数幂函数 ε^n 构成, 也可能是分数幂函数, 甚至是含对数项的情形, 如:

$$\begin{aligned} &1, \varepsilon^{1/2}, \varepsilon, \varepsilon^{3/2}, \dots, \\ &1, \varepsilon, \varepsilon^2 \log \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \log \varepsilon, \varepsilon^3, \dots \end{aligned}$$

自然产生了这样一个问题: 怎样才能确信自己猜到了一个合适的渐近序列呢? 这里并无一般的规律可循。通常的感觉是: 若求解过程进展顺利, 所有的项能相互匹配, 所有的定解条件都能满足, 而不出现数学上或物理上矛盾的情形, 则渐近序列的选择显然是恰当的。否则, 就需重新审查所设定的渐近序列的形式。最坏的情况是, 始终找不到合适的渐近序列, 求解过程失败。

下面的经验, 可供借鉴^[4]:

- (1) 如果某项猜多了, 就会得到关于其系数的齐次问题。若有唯一解, 其解等于零;
- (2) 在遇到困难时, 随时考虑到有对数项存在的可能性;
- (3) 让渐近序列待定, 在求解过程中逐项加以确定。如果可能, 这当然是最可靠的办法。

1-2 量级与阶符 (order symbols)

如果数 A 满足

$$3 \cdot 10^{n-1} < A \leq 3 \cdot 10^n,$$

n 是整数,那么就可说数 A 的量级为 $10^{n[6]}$ 。

在某个区间上定义的一个函数 f 在数值上的量级指的是一个数 M 的量级,这个数 M 是 $|f|$ 在给定区间上的最大值。

O 和 o 称为阶符。假定在集合 S 上给定两个函数 $f(\varepsilon)$ 和 $\varphi(\varepsilon), \varepsilon \in S$ 。关系式

$$f(\varepsilon) = O(\varphi(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow a, \varepsilon \in S$$

表示,存在常数 $M > 0$ 及点 a 的邻域 U 使得

$$|f(\varepsilon)| \leq M |\varphi(\varepsilon)|, \varepsilon \in U \cap S.$$

例如,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= O(\varepsilon), & \sin \varepsilon^2 &= O(\varepsilon^2); \\ \sin 7\varepsilon &= O(\varepsilon), & \sin 2\varepsilon - 2\varepsilon &= O(\varepsilon^2); \\ \cos \varepsilon &= O(1), & 1 - \cos \varepsilon &= O(\varepsilon^2); \\ \operatorname{sh} \varepsilon &= O(\varepsilon), & \operatorname{ch} \varepsilon &= O(1); \\ \operatorname{th} \varepsilon &= O(\varepsilon), & \operatorname{coth} \varepsilon &= O(\varepsilon^{-1}); \\ \tan \varepsilon &= O(\varepsilon), & \cot \varepsilon &= O(\varepsilon^{-1}). \end{aligned}$$

若函数 f 和 φ 不仅是 ε 而且也是变量 x 的函数,即 $f = f(x, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$ 。若存在与无关的正数 M 以及点 a 的邻域 U , 使得

$$|f(x, \varepsilon)| \leq M |\varphi(x, \varepsilon)|, \varepsilon \in U \cap S,$$

则可写

$$f(x, \varepsilon) = O[\varphi(x, \varepsilon)], \varepsilon \rightarrow a, \varepsilon \in S.$$

若常数 M 和 a 的邻域都与 x 无关,则称上述关系为关于 x 一致成立;否则称为非一致成立。

例如,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sin(x + \varepsilon) &= O(1) = O(\sin x) && \text{一致成立;} \\ e^{-\varepsilon x} - 1 &= O(\varepsilon) && \text{非一致成立,} \\ \sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x} &= O(\varepsilon) && \text{非一致成立.} \end{aligned}$$

关系式

$$f(\varepsilon) = o(\varphi(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow a, \varepsilon \in S$$

表示,对任意一个与 ε 无关的正数 δ ,存在点 a 的邻域 U_δ 使得

$$|f(\varepsilon)| \leq \delta |\varphi(\varepsilon)|, \varepsilon \in U_\delta \cap S.$$

例如,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= o(1), & \sin \varepsilon^2 &= o(\varepsilon); \\ \cos \varepsilon &= o(\varepsilon^{-1/2}), & 1 - \cos \varepsilon &= o(\varepsilon); \\ \operatorname{coth} \varepsilon &= o(\varepsilon^{-3/2}), & \operatorname{cote} \varepsilon &= o[\varepsilon^{-(n+1)/n}] \quad (n > 0); \\ \exp(-\varepsilon^{-1}) &= o(\varepsilon^n) && \text{(对一切 } n). \end{aligned}$$

设 $f = f(x, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$ 。对任一与 ε 无关的正数 δ ,存在点 a 的邻域 U_δ 使得

$$|f(x, \varepsilon)| \leq \delta |\varphi(x, \varepsilon)|, \varepsilon \in U_\delta \cap S.$$

则可写

$$f(x, \varepsilon) = o[\varphi(x, \varepsilon)], \varepsilon \rightarrow a, \varepsilon \in S.$$

若正数 δ 和 a 的邻域 U_δ 都与 x 无关,则称此关系关于 x 一致成立;否则称为非一致成

立。

例如,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sin(x + \varepsilon) &= o(\varepsilon^{-1/3}) && \text{一致成立;} \\ e^{-\varepsilon x} - 1 &= o(\varepsilon^{1/2}) && \text{非一致成立;} \\ \sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x} &= o(\varepsilon^{3/4}) && \text{非一致成立。} \end{aligned}$$

关于阶符更详细的性质,请参见 Erdelyi(1956)^[6] 或苏煜城(1983)^[7]的著作。

1-3 摄动问题与摄动理论

在数学和物理问题中,经常会遇到含有小(或大)参数 ε 的问题。小参数可以包含在方程或定解条件中。通常称这一类含小参数 ε 的数学问题为摄动问题。摄动理论研究的正是这类摄动问题的解法。这种解法的要点乃是把解作某种渐近展开,代入方程和定解条件中去,然后进行量级的比较,从而把一个困难的问题分解为一系列相对简单的问题。如果前面很少几步就能把解的主要性质揭示出来,摄动理论就特别有效。下面举一个简单的例子说明摄动理论求解问题的思路^[2]。

求下列三次多项式根的近似值:

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0. \quad (1.3.1)$$

这不是一个摄动问题,因为方程中并不含有小参数。但是我们可以考察含小参数 ε 的多项式方程

$$x^3 - (4 + \varepsilon)x + 2\varepsilon = 0, \quad (1.3.2)$$

当 $\varepsilon = 0.001$ 时,此方程还原为式(1.3.1)。这两个方程的差别是,式(1.3.1)是单个方程,式(1.3.2)是以 ε 为参数的方程族。对式(1.3.2),可以认为其根是 ε 的函数,从而可试设为 ε 的幂级数:

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n. \quad (1.3.3)$$

在式(1.3.2)中令 $\varepsilon = 0$ 并解退化方程(reduced equation):

$$x^3 - 4x = 0, \quad (1.3.4)$$

可得级数(1.3.3)的第一项,即零阶摄动解

$$x(0) = a_0 = -2, 0, 2. \quad (1.3.5)$$

要获得高阶近似,可将式(1.3.3)写作

$$x_1 = -2 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

并代入式(1.3.2)。略去 ε^3 以上的项后,得到

$$(-8 + 8) + \varepsilon(12a_1 + 2 - 4a_1 + 2) + \varepsilon^2(12a_2 - 6a_1^2 - 4a_2 - a_1) = O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

由于 ε 是一个变数, ε 各级幂的系数应该分别等于零,于是得到决定系数 a_1, a_2, \dots 的方程序列:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: & \quad 8a_1 + 4 = 0; \\ \varepsilon^2: & \quad 8a_2 - 6a_1^2 - a_1 = 0; \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

这些方程的解为

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{8}, \dots$$

从而根 x_1 的摄动展开为

$$x_1 = -2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots$$

同样步骤给出

$$x_2 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \dots;$$

$$x_3 = 2 + 0 \cdot \varepsilon^2 + \dots$$

令 $\varepsilon = 0.001$, 就得到了原方程(1.3.1)的三个根的近似值。

这个例子表明了进行摄动分析的三个基本步骤:

- (1) 引入小参数 ε , 将原问题化为一个摄动问题;
- (2) 将解作某种形式的摄动展开, 代入定解问题后, 求解派生出来的一系列较简单的定解问题;
- (3) 就 ε 的适当数值对摄动展开求和, 得到原问题的解。

本书主要讨论第二步骤。

第三步骤可能很容易, 也可能很难。如果摄动级数是收敛的, 其和就是所要求的答案。如果级数收敛很慢或者本质上是发散的, 当 ε 很小时, 只取前面很少几项, 往往是一项、二项或者三项就能获得一个很好的近似; 当 ε 不是太小时, 要想从一个收敛缓慢或不收敛的级数得到满意的近似结果, 就需要采取特殊的技巧。这部分内容可在文献[2]或[8]中找到。

1-4 尺度化 (scaling)

这里举几个例子说明上节提到的摄动分析的第一步骤。

[例 1] 抛射问题^[5]

考虑质量为 m 的物体, 从地球表面以初速 V 向上抛。设 R 为地球半径, $Z(\tau)$ 为时间 τ 时物体离开地球表面的径向距离。如果略去空气阻力, 根据牛顿第二定律和万有引力定理, 可得控制方程和初始条件如下:

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} = -\frac{gR^2}{(Z+R)^2}; \quad (1.4.1)$$

$$Z(0) = 0, \quad \frac{dZ}{d\tau}(0) = V \quad (1.4.2)$$

式中 g 是重力加速度。如果初速度 V 是小量, 必然导致抛射高度 Z 也是小量。但是, 所谓小是相对的, 如何把它精确化并引入定解问题呢? 常用的办法是将定解问题无量纲化。令

$$x = \frac{Z}{R}, \quad t = \frac{V\tau}{R}。$$

经过简单运算, 定解问题化为

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = -(1+x)^{-2},$$

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad (1.4.3)$$

式中 $\varepsilon = \frac{V^2}{gR}$ 。对于小的初速度而言, 可以取作小参数。这时小参数 ε 出现在控制方程中。

如果选择

$$x = \frac{Z}{R}, \quad t = \tau \sqrt{\frac{g}{R}},$$

原定解问题变成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(1+x)^{-2}, \quad (1.4.4)$$

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4.5)$$

同样得到了无量纲化的控制方程和定解条件, 这时小参数 $\varepsilon = \frac{V^2}{gR}$ 出现在起始条件中。当然

还可以选择

$$x = \frac{Zg}{V^2}, \quad t = \frac{g\tau}{V}, \quad (1.4.6)$$

这时无量纲化的定解问题是

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(1+\varepsilon x)^{-2},$$
$$x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1. \quad (1.4.7)$$

小参数仍然是 $\varepsilon = \frac{V^2}{gR}$ 。

这个例子说明:

(1) 无量纲化能够将定解问题化为摄动问题。而这是摄动分析的第一步, 是用摄动理论求解方程的前提。

(2) 用来无量纲化的特征量的选择不是唯一的, 所得定解问题的无量纲形式也各不相同。如果特征量选择不当, 会造成方程无解甚至矛盾。比如, 式 (1.4.3) 中略去含 ε 的项 $\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2}$, 所得退化方程 $(1+x)^{-2} = 0$ 不会给出满足定解条件 $x(0) = 0$ 和 $\frac{dx}{dt}(0) = 1$ 的解。原因

是: 按题意, ε 固然是小量, 但 x 和 t 在讨论的范围内也是小量, 而 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 并非都很小, 以致 $\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2}$ 可能与 $(1+x)^{-2}$ 同阶。若式 (1.4.5) 中略去 ε , 上抛速度变成零了, 也不会得到合理的结果, 原因也是由于特征量选择不当。按式 (1.4.6) 那样选择无量纲量比较合理。 $\frac{V^2}{g}$ 大致

上就是物体上抛的最大高度(可能差常数因子 2), 因此无量纲距离 x 在所讨论的空间范围内是在 $(0, 1)$ 之间变化, 或者说它的量级是 1, 即 $x = O(1)$ 。 $\frac{V}{g}$ 基本上就是物体达到顶点的时间, 从而 t 的量级也是 1, 即 $t = O(1)$ 。这样一来, $\frac{d^2x}{dt^2}$ 的量级也是 1, 和式 (1.4.7) 右端的首项 (即

最大项) 的量级就一致了。而 εx 在所讨论的范围内确是个小量。

所谓尺度化, 是这样一种无量纲化, 它使得每一项的相对大小由该项前的无量纲常数因子来表征, 而该项中的无量纲变量的量级为 1。显然, 无量纲常数因子若是小量或大量, 通过尺

度化,小参数就引进定解问题了。

[例 2] 边界层方程式

为便于说明起见,考虑沿平板的二维不可压缩层流问题。取 x' 轴沿平板,与壁面垂直的方向为 y' 轴,原点位于平板前端。对于这样坐标系内的层流流动,定解问题为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} \right), \\ u = v = 0, \quad y' = 0, 0 \leq x' \leq L \text{ 处}; \\ u \rightarrow U_0, v \rightarrow 0, \quad x' \rightarrow -\infty \text{ 或 } y' \rightarrow \infty \text{ 处}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.8)$$

式中 (u, v) 是 (x, y) 方向的速度分量, p 是压强, ρ 是流体密度, ν 是运动粘性系数, L 是板长。

为使定解问题无量纲化,引入以下无量纲量:

$$\begin{aligned} (x', y') &= (x, y)/L, \quad (u', v') = (u, v)/U_0 \\ p' &= p/(\rho u_0^2), \quad t' = tU_0/L, \quad Re = U_0L/\nu. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{U_0}{L} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y'},$$

式(1.4.8)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0; \\ \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right), \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right), \\ u' = v' = 0, \quad y' = 0, 0 \leq x' \leq 1 \text{ 处}; \\ u' \rightarrow 1, v' \rightarrow 0, \quad x' \rightarrow -\infty \text{ 或 } y' \rightarrow \infty \text{ 处}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.9)$$

Re 称为 Reynolds 数。由于水和空气的 ν 具有 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 的量级:对一般工程中感兴趣的 U_0 和 L 的大小, Re 是个大量,从而小参数可取 $\varepsilon = 1/Re$ 。

当 $\varepsilon = 0$,退化问题的控制方程化为 Euler 方程,原有的二阶导数项消失了。Euler 方程是无粘性流体所遵守的规律,它允许沿壁面的流体有滑动,即 $y' = 0 (0 \leq x' \leq 1)$ 时 $u' \neq 0$ 。从数学的观点看,少了二阶导数项的 Euler 方程, $y' = 0 (0 \leq x' \leq 1)$ 时 $u' = 0$ 的条件是多余的,使定解问题不恒定。

为解决这个矛盾,Prandtl 于 1904 年首次提出了边界层(boundary layer)的概念,即:不管 Re 有多大,至少在壁面附近的一层流体内,必须把流体当作粘性流体来处理。这层粘性流体保证了固体壁上无滑移条件的满足,而在层外的边缘上流体速度趋近于外面无粘流中的数值。这个流体层就被称为边界层。 Re 越大,边界层越薄,层内横向速度梯度 $\partial u/\partial y$ 将越大,而法向速度 v 会越小。层内的流动应由粘性力、惯性力和压力三者的平衡来决定。边界层外的区域称为主流(main stream)区。那里粘性的作用可以不予考虑,流动由 Euler 方程或势流所制约。

基于上述考虑,在边界层内应引用以下无量纲量:

$$y' = \bar{y} / \sqrt{Re}, \quad v' = \bar{v} / \sqrt{Re} \quad (1.4.10)$$

于是,在边界层内式(1.4.9)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t'} + u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x'} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial p'}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x'^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}, \\ u' = \bar{v} &= 0, \quad \bar{y} = 0, 0 \leq x' \leq 1, \\ u' &= U'(x', t'), \quad \bar{y} \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} (1.4.11)$$

在式(1.4.11)中令 $\varepsilon = 1/Re \rightarrow 0$, 所得退化方程就是 Prandtl 的边界层方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \bar{y}^2}, \\ 0 &= -\frac{\partial p'}{\partial \bar{y}}, \\ u' = \bar{v} &= 0, \quad \bar{y} = 0, 0 \leq x' \leq 1, \\ u' &= U'(x', t'), \quad \bar{y} \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} (1.4.12)$$

变换式(1.4.10)的物理含意是:对量级为1的法向距离 \bar{y} 和速度 \bar{v} , y' 限于很薄的边界层内, v' 保持很小。从数学的眼光来看, $\bar{y} = y' \sqrt{Re}$ 使 x 方向的动量方程中保留了体现粘性作用的二阶系数项,而整个变换式(1.4.10)使连续方程保持了原来的形式。外边界条件 $\bar{y} \rightarrow \infty$ 是由于对固定的 y' 而 $\sqrt{Re} \rightarrow \infty$ 的缘故。那里 $U'(x', t')$ 是边界层外缘处外部无粘流在 $y' \rightarrow 0$ 时的纵向速度值。一个显然的结果是,在边界层内压强 p' 沿厚度方向不变。

这个例子说明:

(1) 引入小(或大)参数有一定的技巧性,需要对物理问题有相当的了解,凭借经验和直觉,才能顺利地达到目的。

(2) 同一个定解问题,视问题性质的不同,在不同的区域可选择不同的无量纲参数,得到不同的定解问题,而后将它们匹配(match)起来。

Prandtl 处理边界层的思想,已被发展成为一类奇异摄动问题的解法。在苏联有边界层校正法(method of boundary layer correction)^[7];在欧美则有匹配渐近展开法(method of matched asymptotic expansions)。关于后者,将在第4章专门讨论。

【例3】水波问题

设水深为 $H = \text{常数}$ 的海洋中有波浪传播。波幅为 A , 水平方向的特征长度为 L 。坐标平面 xOy 位于静止水面上, z 轴铅直向上。由流体力学知道^{[9]、[10]}, 速度势 $\phi(x, y, z, t)$ 满足:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{在流体域内}). \quad (1.4.13)$$

自由面 $z = \eta(x, y, t)$ 上的动力学边界条件是

$$g\eta(x, y, t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, \eta, t) + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0, \quad (z = \eta(x, y, t) \text{ 上}); \quad (1.4.14)$$

自由面上的运动学条件是

$$\eta_t(x, y, t) + \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \phi_z = 0, \quad (z = \eta(x, y, t) \text{ 上}); \quad (1.4.15)$$

海底 $z = -H$ 上的边界条件是

$$\phi_z = 0, \quad (z = -H). \quad (1.4.16)$$

选择无量纲变量

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)/L, \quad \bar{z} = z/H, \quad \bar{t} = gt/c,$$

$$\bar{\eta} = \eta/A, \quad \bar{\phi} = \phi/(cA),$$

其中 c 是某个特征速度。容易看出,适当选择 c 之后,可使各无量纲参数在所讨论的问题中的量级都是 1。将它们代入原方程和定解条件,并省略横线,得

$$\frac{H^2}{L^2} (\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} = 0 \quad (\text{在流体域内}),$$

$$\eta_t + \phi_t + \frac{1}{2} \left\{ \frac{H^2}{L^2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) + \phi_z^2 \right\} \frac{c^2}{gH} \frac{A}{H} = 0 \quad \left(z = \frac{A}{H} \eta \text{ 上} \right),$$

$$\eta_t - \frac{c^2}{gH} \phi_z + \frac{c^2}{gH} \frac{A}{H} \left(\frac{H}{L} \right)^2 (\phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y) = 0 \quad \left(z = \frac{A}{H} \eta \text{ 上} \right),$$

$$\phi_z = 0 \quad (z = -1 \text{ 上}).$$

大家知道,若取特征速度 c 正比于波速,而波速在波浪问题中不是一个独立参数,它取决于波长和水深,一般说来,还与波幅有关。这样,作为独立的无量纲常值参数出现在定解问题中只有两个: A/H 和 H/L 。

(1) 若波浪是微幅的,而水深与波长同阶。这时可取

$$\varepsilon = A/H, \quad H = L, \quad c^2 = gH.$$

相应的定解问题是

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y, z, t) &= 0 && (\text{在流体域内}); \\ \eta + \phi_t + \frac{1}{2} \varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \phi &= 0 && (z = \varepsilon \eta \text{ 上}); \\ \eta_t - \phi_z + \varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla \eta &= 0 && (z = \varepsilon \eta \text{ 上}); \\ \phi_z &= 0 && (z = -1 \text{ 上}). \end{aligned} \right\} \quad (1.4.17)$$

令 $\varepsilon = 0$, 退化问题又称零级近似就是通常所说的线性 Airy 波浪理论。在线性理论中,波速 $c^2 = gL \frac{1}{2\pi} \text{th} \left(\frac{2\pi H}{L} \right)$, 这就是为什么前面选择特征速度 $c^2 = gH = gL$ 的原因。

由这个定解问题采用摄动方法获得的波浪称为 Stokes 波,参见本书第 3 章。

(2) 对浅水波,取小参数 $\varepsilon = H/L$ 。这时可选择特征速度 $c = \sqrt{gH}/\varepsilon$, 因为这时对非线性问题, \sqrt{gH} 不再是一个极限速度。例如超临界情况下 $c/\sqrt{gH} > 1$ 。然而,波幅却可与水深同阶。不妨取 $A = H$ 。于是无量纲的定解问题成为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 (\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} &= 0 && (\text{流体域内}); \\ \varepsilon^2 (\eta + \phi_t) + \frac{1}{2} \{ \varepsilon^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) + \phi_z^2 \} &= 0 && (z = \eta(x, y, t) \text{ 上}); \\ \varepsilon^2 (\eta_t + \nabla \phi \cdot \nabla \eta) - \phi_z &= 0 && (z = \eta(x, y, t) \text{ 上}); \\ \phi_z &= 0 && (z = -1). \end{aligned} \right\}$$

其零级近似是

$$\phi_0 = \phi_0(x, y, t) \quad (1.4.18)$$

为了导出 $\phi_0(x, y, t)$ 应满足的方程, 可设

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0(x, y, t) + \varepsilon^2 \phi_1(x, y, z, t) + \dots, \\ \eta &= \eta_0(x, y, t) + \varepsilon^2 \eta_1(x, y, t) + \dots. \end{aligned}$$

由控制方程和海底条件, 知

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(1+z)^2(\phi_{0xx} + \phi_{0yy}), \quad (1.4.19)$$

$$\phi = \phi_0(x, y, t) - \frac{1}{2}\varepsilon^2(1+z)^2(\phi_{0xx} + \phi_{0yy}) + \dots,$$

将此结果代入自由面动力学条件, 并令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$\eta_0 + \phi_{0z} + \frac{1}{2}(\phi_{0x}^2 + \phi_{0y}^2) = 0. \quad (1.4.20)$$

同样, 由自由面运动学条件, 得

$$\eta_{0t} + \nabla \phi_0 \cdot \nabla \eta_0 + (1 + \eta_0)(\phi_{0xx} + \phi_{0yy}) = 0. \quad (1.4.21)$$

这是熟知的浅水方程, 又称长波的 Airy 理论^[11]。

这个例子同样说明: 采用无量纲化的方法能在定解问题中引入小参数, 便于用摄动理论求解。但是无量纲化参数的选择, 是需要经验和技巧的。同时还说明, 不同的无量纲化, 都可能得到合理的结果, 但适用的情况不同。

如果选择

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)/L, \quad \bar{z} = z/H, \quad \bar{t} = \frac{\sqrt{gH}t}{L},$$

$$\bar{\eta} = \eta/A, \quad \bar{\phi} = \frac{gH\phi}{gLA},$$

并引入符号

$$\beta^2 = H^2/L^2, \quad \alpha = A/H,$$

则无量纲的定解问题为^[11]

$$\left. \begin{aligned} \beta^2(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} &= 0 && (\text{流体域内}), \\ \eta + \phi_z + \frac{1}{2}\alpha(\phi_x^2 + \phi_y^2) + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta^2}\phi_z^2 &= 0 && (z = \alpha\eta \text{ 上}); \\ \eta_t + \alpha\nabla\phi \cdot \nabla\eta - \frac{1}{\beta^2}\phi_z &= 0 && (z = \alpha\eta \text{ 上}); \\ \phi_z &= 0 && (z = -1 \text{ 上}). \end{aligned} \right\} \quad (1.4.22)$$

它把前面的两种情况都包含在内了。若取 $\beta = 1, \alpha = \varepsilon$, 就得到有限水深微幅波的情形; 若取 $\beta = \varepsilon, \alpha = 1$, 就蜕化为浅水波的情形。这个例子说明, 一个定解问题可以包含不止一个小参数。

当然, 有些问题不大会通过无量纲化引入小参数而得到合理的定解问题; 也有一些作者不喜欢采用这种办法, 而宁愿对定解问题的各项进行直观的量级分析。这在船舶流体力学的文献中相当常见, 宜予以注意。