应用数学丛书

复变函数论

杨维奇 编著

国防工业出版社

内容简介

本书前六章介绍复变函数的基本理论，其中包括调和测度、格林函数、次调和函数这样一些近代内容及凝聚原理和黎曼映照定理的证明，第六章中还包含作者的一些研究成果。后两章介绍复变函数在工程技术领域的应用。整个内容由浅入深，条理清晰，自成体系，只需具备微积分学的基础知识和一定的逻辑推理能力就可阅读。

本书可供理工科高年级大学生、研究生、教师和从事应用科学研究的工程技术人员参考。

应用数学丛书
复变函数论
杨维奇 编著
*
国防工业出版社出版、发行
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷
*
850×1168 1/32 印张$9^5/_8$ 252千字
1989年3月第一版 1989年3月第一次印刷 印数：0,001— 3,080册

ISBN 7-118-00289-5/O·17 定价：4.95元

应用数学丛书目录●

第一批目录

1. Z-变换与拉普拉斯变换	关肇直、王恩平	编著
2. 常微分方程及其应用	秦化淑、林玉国	编著
3. 实变函数论基础	胡钦训	编著
4. 正交函数及其应用	柳重堪	编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换	关肇直、陈文德	编著
6. 圆柱函数	刘颖	编著

第二批目录

7. 集合论	程极泰	编著
8. 图论	王朝瑞	编著
9. 概率论	狄昂照	编著
10. 矩阵理论	王耕禄、史荣昌	编著
11. 复变函数论	杨维奇	编著
12. 逼近论	徐利治 周蕴时 孙玉柏	编著
13. 矢量与张量分析	冯潮清 赵愉深 何浩法	编著
14. 模糊数学	汪培庄 刘锡荟	编著
15. 编码理论	肖国镇	编著
16. 应用泛函分析	柳重堪	编著

● 这是第一、二批的目录，以后将陆续分批刊登。

出 版 说 明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序

复变函数论是一门古老而富有生命力的学科。说它古老，是因为早在十九世纪，柯西、魏尔斯特拉斯、黎曼等人就已给这门学科奠定了理论基础。说它富有生命力，是因为它有广泛的应用；作为一个强有力的工具，复变函数的理论和方法不仅可用来解决微分方程、解析数论、概率统计、计算数学、微分几何、拓朴学等许多其他数学分支中所提出的问题，而且被广泛地应用于自然科学的许多领域，如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学、自动控制等等。本书的目的是阐述复变函数的基本理论及其在工程技术领域的应用。

在已经出版的复变与应用的书籍中，M. A. 拉甫伦捷夫和Б. A. 沙巴特的《复变函数论方法》是一本得到公认的好书。但从该书出版到现在已过去了三十多年。在这三十多年中，复变函数理论本身在不断发展，复变应用研究在不断深入，应当有更好的书问世。当作者提笔撰写本书时，面对这样高的要求，就感到力不从心勉为其难了。

本书前六章介绍复变函数的基本理论，后两章介绍复变函数在工程技术领域的应用。第一章介绍复数、平面点集、解析函数等基本概念和初等函数的性质；第二章介绍解析函数的积分理论，其中包括柯西定理的严格证明，柯西型积分的解析性，最大模原理与薛瓦尔兹引理；第三章介绍解析函数的级数展开理论、孤立奇点分类和解析开拓，同时也介绍了解析函数的一致收敛级数和序列的性质、凝聚原理和解析函数的正规族；第四章介绍留数理论及其应用，其中包括应用留数计算各种类型的定积分、幅角原理与应用、亚纯函数和整函数的部份分式和无穷乘积展开；第五章介绍共形映照的理论，其中包括黎曼映照定理的证明，我们以

较大的篇幅介绍实现各种典型区域之间的共形映照的方法；第六章先介绍一些重要的积分公式，然后研究调和函数和解析函数的各种边值问题，其中包括调和测度、格林函数、次调和函数这样一些近代内容，这一章中还包含作者的一些研究成果；第七章介绍复变函数论方法在二维场理论中的应用；第八章介绍共形映照的变分原理及其应用；对变分原理的证明和变分公式的导出本书作了较大的改进。

全书内容力求由浅入深，条理清晰，自成体系，只需具备微积分学的基础知识和一定的逻辑推理能力就可阅读。但作者不倾向于把每一步简单运算和每一个明显的推理都一一写出，那样做反到有害于读者；亲手算一算，想一想，有助于能力的提高，而提高能力要比增加知识重要得多。由于篇幅所限或为了突出主题，我们不得不略去了一些定理的证明。

希望本书能对广大的科技人员和高等学校理工科师生有所裨益。

目　录

第一章 复数与复函数

§1 复数及其几何表示

1. 复数及其运算

形如

$$z = x + iy \text{ 或 } z = x + yi$$

的数，称为**复数**，其中 x 和 y 是任意实数，i 满足 $i^2 = -1$，称为**虚单位**。实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

两复数**相等**，是指它们的实部和虚部分别相等，即

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$$

两复数的**加法**定义为

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

容易验证在此种加法定义下复数系构成一个加法群，即满足

（1）加法的封闭性。即若 z_1 及 z_2 是复数，则 $z_1 + z_2$ 也是复数。

（2）加法的结合律和交换律。即若 z_1，z_2，z_3 都是复数，则

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

（3）加法有零元素 $0 = 0 + i0$。即对于任一复数 z，均有

$$z + 0 = 0 + z = z$$

（4）任何复数都存在加法逆元素。即对于任一复数 z，必存在一个复数 $-z$ 使得

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

两复数的**乘法**定义为

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

同样容易验证，在此种乘法定义下非零复数全体构成一个乘法交换群，即满足

（5）乘法的封闭性。即若 z_1 及 z_2 是复数，则 z_1z_2 也是复数。

（6）乘法的结合律和交换律。即对任何复数 z_1，z_2，z_3 有

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),\quad z_1z_2=z_2z_1$$

（7）乘法有单位元素 $I=1+i0$。即对任何复数 z 有

$$z\cdot I=I\cdot z=z$$

（8）任何非零复数都存在乘法逆元素。即对任何复数 z，必存在一个复数 z^{-1} 使得

$$zz^{-1}=z^{-1}z=I$$

此外，复数的这两种运算还满足

（9）加法和乘法之间的分配律。即若 z_1，z_2，z_3 是复数，则

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

满足上述九条性质的数系称为数域。因此，复数系是一个数域，称为**复数域**。

熟悉代数知识的读者会发现，虚部为零的复数之全体同实数域同构，故复数 $x+i0$ 同实数 x 可以不加区别，特别地，复数域中的零元素和单位元素就是实数 0 和 1。因此复数是实数的扩充，实数是特殊的复数。实部为零的复数称为**纯虚数**。在复数域中不可能定出一种大小顺序，使得实数的大小关系和不等式运算律保持不变；因为由 $i<0$ 和 $i>0$ 都将导致 $-1>0$ 的结果。因此复数不能比较大小。

2．复数在平面上的几何表示

一个复数 $z=x+iy$ 由一对有序实数（x，y）唯一确定。于是可用欧氏平面上的点（x，y）或矢量（x，y）表示复数 $z=x+iy$（图 1.1）。

每一点（x，y）表示一个复数 $z=x+iy$ 的欧氏平面称为**复平面**。由于 x 轴上的点对应实数，y 轴上的点对应纯虚数，

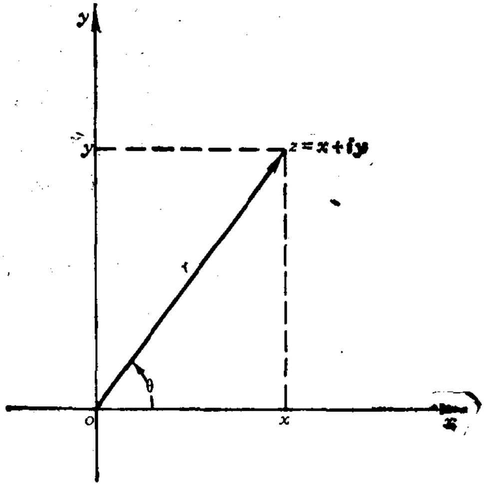

图 1.1

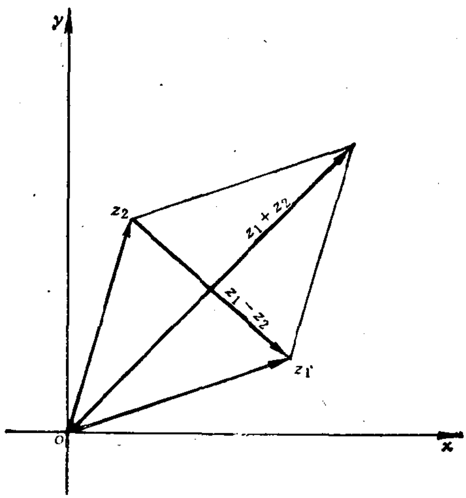

图 1.2

故称 x 轴为实轴，称 y 轴为虚轴。

用点和矢量表示复数，使我们在复变函数的研究中常可借助于几何直观，并且也为复变函数应用于解决实际问题创造了条件。

今后我们将把复数 $x+iy$ 和点（x，y）及矢量（x，y）视为同一物而不加区别。例如，“给定一个复数 z”同“给定复平面上一点 z”是一个意思等等。善于考察量与量关系的几何性质往往能使复杂问题变得简单，读者要特别注意这一点。

复数的矢量表示使复数加减法同矢量加减法一致，故可按平行四边形法则用作图法求两复数的和与差（图 1.2）。

矢量（x，y）的长度称为复数 $z=x+iy$ 的模或绝对值，记为 $|z|$，因而有

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$$

利用初等几何知识，从图 1.1 及 1.2 即得如下不等式

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|$$

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$$

可以看出 $|z_1-z_2|$ 就是点 z_1 与 z_2 间的距离，记为

$$\rho(z_1,\ z_2)=|z_1-z_2|$$

矢量（x，y）同实轴正向的夹角称为复数 z 的幅角，记为 $\mathrm{Arg}z$。显然任何非零复数的幅角都有定义，且可取无穷多个值，这些值彼此之间相差 2π 的整数倍；其中有一个值记作 $\arg z$，它满足

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi \tag{1.1}$$

称为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的主值或称为 z 的主幅角●。于是

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi(\,k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \tag{1.2}$$

当 $z=0$ 时，其幅角无定义。利用正切函数的定义，各象限中的复数的主幅角计算公式为：

● 也可以由不等式 $0\leqslant\arg z<2\pi$ 规定主幅角的值。此外，记号 $\arg z$ 有时用来表示 $\mathrm{Arg}\,z$ 的某个分支，这时它的取值范围可以是任何其他长度为 2π 的半开区间。

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{当 } x>0,\ y>0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi & \text{当 } x<0,\ y>0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi & \text{当 } x<0,\ y<0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{当 } x>0,\ y<0 \end{cases} \tag{1.3}$$

当 z 在坐标轴上，$\arg z$ 的值是显而易见的。

由直角坐标与极坐标的关系

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

得到复数的三角表示式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

此处 r 和 θ 分别是 z 的模 $|z|$ 和幅角 $\operatorname{Arg} z$。于是两个非零复数 z_1 和 z_2 相等的充要条件是 $|z_1|=|z_2|$，且 $\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2$。后一等式理解为两个集合相等。

利用欧拉公式（参看本章§5）：

$$e^{i\theta}=\cos\theta + i\sin\theta$$

得到复数的指数表示式

$$z = re^{i\theta}$$

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则由三角公式得到

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.4}$$

因此，两个复数乘积的模等于它们的模相乘，两个复数乘积的幅角等于它们的幅角相加。

将此结论应用于等式 $z_1=\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2(z_2\neq 0)$ 又得到：两个复数商的模等于它们的模的商，两个复数商的幅角等于它们的幅角之差。

于是复平面上以0，1，z_1为顶点的三角形同以0，z_2，z_1z_2为顶点的三角形相似，以0，z_1，z_2为顶点的三角形同以0，$\frac{z_1}{z_2}$，1为顶点的三角形相似，故可利用作图法求两复数的积和商（图1.3）。

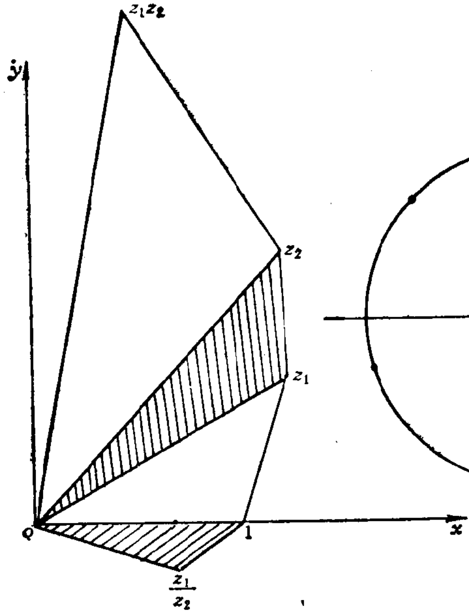

图 1.3

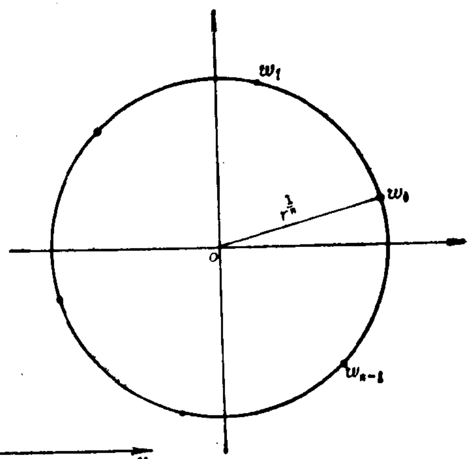

图 1.4

利用归纳法容易证明

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{1.5}$$

其中n是正整数。取$r=1$即得棣莫佛公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \tag{1.6}$$

现利用棣莫佛公式求方程$w^n=z$的根，即求复数z的n次根。设$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

由复数相等的充要条件得到

$$\rho=r^{\frac{1}{n}}\text{（算术根）。}$$

$$\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

故得到 n 个不同的根

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \tag{1.7}$$

$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$，它们恰好是以原点为心以 $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆周的 n 个等分点（图 1.4）。

复数 $x-iy$ 称为复数 $z=x+iy$ 的共轭复数，且记为 $\bar{z}$。$\bar{z}$ 是 z 关于实轴的对称点。容易验证下列一些常用的关系式：

$$\bar{\bar{z}}=z,\quad z\bar{z}=|z|^2,\quad |\bar{z}|=|z|$$

$$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad \mathrm{Im}z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm2\mathrm{Re}z_1\bar{z}_2$$

经常要用到关于圆周的对称点的概念。设 A 是圆外一点，过 A 点向圆周作两条切线，我们把连接两切点的线段的中点记为 B，并且称点 A 和点 B 是关于圆周的两个对称点。这是关于圆周的对称点的几何定义。

若点 A 和 B 所对应的复数为 z 和 ζ，圆心为 a，半径为 ρ，则矢量 $z-a$ 与 $\zeta-a$ 具有相同的幅角，并且长度的乘积等于半径的平方（见图 1.5），因而有

$$(\zeta-a)\overline{(z-a)}=\rho^2$$

$$\therefore\quad \zeta=\frac{\rho^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a \tag{1.8}$$

从点 z 到点 ζ 的变换称为关于圆周 $|z-a|=\rho$ 的对称变换，或称为关于该圆周的反演。

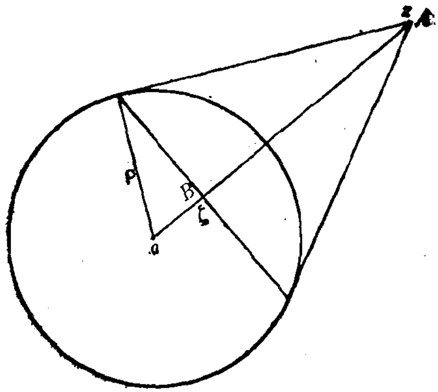

图 1.5

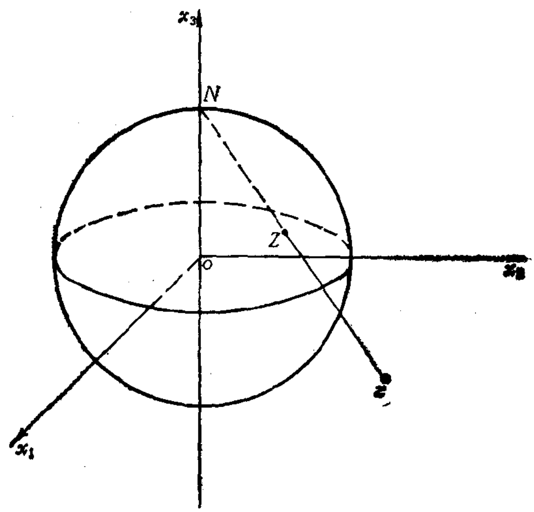

图 1.6

3. 黎曼球面与无穷远点

复数还有一种重要的几何表示法，称为复数的**球面表示**。

考虑三维欧氏空间中的单位球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$，并设它的球心与复平面上的原点重合，x_1 轴和 x_2 轴分别与复平面的 x 轴和 y 轴重合。称球面上的点 $N(0,\ 0,\ 1)$ 为**球极**或**北极**。过

点N及复平面上点z的直线同球面的另一交点Z称为点z在球面上的球极投影。命Z与z对应，这样就在球面上的点（N除外）与复平面上的点（即复数）之间建立了一一对应关系（图 1.6）。Z点的坐标（x_1，x_2，x_3）与复数z之间的关系式不难从图 1.6 所示的几何关系导出，即

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} \tag{1.9}$$

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\quad x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)},\quad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \tag{1.10}$$

在这种对应下，Z点越接近N，z点离原点越远（即$|z|$越大）。因此很自然地想到，可以给复平面添加一个理想的无穷远点，记作∞，以对应于N。加上无穷远点的复平面称为扩充复平面。于是球面上每一点都对应于一个复数，N点对应于反常复数∞。这样的球面称为黎曼球面或复球面。

对反常复数∞的运算规定如下：设z是复数，规定

$$\infty+z=z+\infty=\infty,\quad \infty-z=z-\infty=\infty$$

$$\infty\cdot z=z\cdot\infty=\infty\qquad(z\neq 0)$$

$$\frac{z}{0}=\infty\ (z\neq 0),\quad \frac{z}{\infty}=0$$

而对于

$$\infty\pm\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0}$$

则没有定义。

此外，规定∞的模为$|\infty|=+\infty$，其幅角不予规定。

有时要考虑两个复数z和z'的球极投影Z和Z'间的距离，称为z和z'的球极距离，记为$d(z,z')$。球极距离的公式为（证明从略）

$$d(z,z')=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}} \tag{1.11}$$

$$d(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \tag{1.12}$$