现代控制理论

张洪钺　主编

（第一册）

线性系统理论

程鹏　编

北京航空學院出版社

现代控制理论

张洪钺　主编

（第一册）

线性系统理论

程　鹏　编著

北京航空学院出版社

内 容 简 介

本书比较全面地介绍了现代控制理论的基本内容，附有大量的例题和习题，切合工程实际，便于自学。全书分为四篇，第一篇线性系统理论，第二篇最优控制理论，第三篇最佳估计理论，第四篇系统辨识。分四册出版，每册一篇。

本书是第一册。主要介绍线性系统的可控性、可观测性和稳定，以及系统的标准形、实现、极点配置、解耦、观测器、动态补偿器等。

本书主要作为高等院校自动控制专业研究生课的教材，也可供从事自动控制工作的科技人员参考。

现代控制理论第一册
——线性系统理论
张洪钺 主编 程鹏 编
责任编辑 白文林
北京航空学院出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
昌平振兴胶印厂印装
印张：18 字数：454 千字
1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷 印数：6000 册
统一书号：15432·079 定价：3元
ISBN 7-81012-026-3/TP·004

前　言

目前，自动控制技术已广泛地应用于工农业生产，交通运输和国防建设。指导自动控制系统的分析和设计的控制理论也有了很大的发展。在四十和五十年代中发展起来的经典控制理论被成功地应用于单输入--单输出定常系统的分析和设计。在五十年代末、六十年代初，首先由航天、航空技术需要而发展起来的现代控制理论具有更广泛的适用性，它可用于多输入一多输出、定常或时变系统的分析和设计，它所讨论的问题也更复杂和深入。在系统的性能指标上，现代控制理论提出了最优的概念，因此产生了庞特里亚金的极大値原理，贝尔曼的动态规划以及二次型指标线性反馈控制等最优控制的理论。在对系统的描述上，现代控制理论应用了状态空间的概念，揭示了系统的内部特性以及和外部特性的关系，由此发现了可控性和可观测性这样的系统的基本特性，为系统的分析设计打下了深刻的理论基础。现代控制理论考虑了干扰所引起的系统状态的不确定性，提出了对状态进行最佳估计的理论和方法。建立系统的数学模型，根据模型进行最佳估计和控制是现代控制理论的一个重要特点，故此系统辨识和建模也就成了现代控制理论的一个重要内容。

在我国社会主义四个现代化的进程中，现代控制理论会起到它应有的作用。为了适应这种需要，我们编写了这本现代控制理论的教科书。本书由四篇组成，分四册出版，每册一篇。第一篇是线性系统理论，主要介绍了系统的可控性、可观测性和稳定性，以及系统的标准形、实现、极点配置、解耦、观测器、动态补偿器等。第二篇是最优控制理论，主要介绍了最优控制中的变分法、庞特里亚金的极大（小）原理、贝尔曼的动态规划以及二次型指标最优线性反馈控制等。第三篇是最佳估计理论，主要介绍了估计的方法，线性最优预测、滤波和平滑、滤波的稳定性、滤波的发散及其克服、非线性滤波、次优滤波以及随机最优控制等。第四篇是系统辨识，主要介绍了脉冲响应的辨识，各种类型的最小二乘法、辅助变量法、极大似然法、随机逼近法以及多变量系统的辨识、闭环系统的辨识和辨识试验中的一些问题。

本书为工科院校自动控制专业研究生教材，在取材和阐述方式上注意了工程性，附有大量例题和习题，推导也比较详细，便于自学。本书第一篇由程鹏编写，第二篇由孟宪仲编写，第三篇由陈新海编写，第四篇由胡干耀编写。主编张洪钺负责全书编写的组织讨论工作和统一审阅，修改定稿。徐缤昌、林道垣、王纪文、胡寿松、林其璥、沈正华、陈天良等对全书提出了不少宝贵的意见。全书最后由高为炳、邬学礼负责审查。对这些同志，作者谨表示深切的感谢。

由于水平所限，书中可能存在许多不妥和错误之处，敬請读者批评指正。

目　　录

第一篇　线性系统理论

第一篇　线性系统理论

第一章　线性系统的基本概念

系统分析研究的第一步是建立描述系统的数学方程。由于所解决的问题不同，所用的分析方法不同，描述同一系统的数学表达式往往有所不同。经典控制理论中的传递函数就是定常线性系统输入—输出关系的一种描述。而现代控制理论中状态变量的描述方法，不仅描述了系统输入—输出关系，还描述了系统内部的特性。

本章将从非常一般的装置出发，引入系统输入—输出描述和状态变量描述，并叙述两种描述之间的关系。一方面可以算是对本科阶段已经学过的內容进行复习和扩充，另一方面也是为今后系统的分析和研究作必要的准备。

§1—1　系统的輸入—輸出描述

系统的输入—输出描述给出了系统输入与输出之间的关系。在推导这一描述时，系统内部结构的信息是不知道的，唯一可接触的是系统的输入端与输出端。在这种情况下，可把系统看作是如图1—1所示的一个“黑箱”。显然，我们所能做的只是向该黑箱施加各种类型的输入并测量与之相应的输出。然后，从这些输入—输出对中获悉有关系统的重要特性。

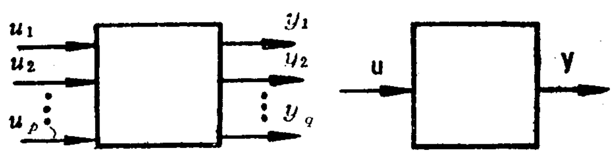

图1—1　有 p 个輸入端，q 个输出端的系统

我们先介绍一些符号，在图1—1中，有 p 个输入端，q 个输出端。u_1，u_2，…，u_p为输入，或用 $p\times1$ 列向量$\mathbf{u}=(u_1u_2\cdots u_p)^T$表示输入。$y_1$，$y_2$，…，$y_q$表示输出，同样，可用 $q\times1$ 列向量 $\mathbf{y}=(y_1y_2\cdots y_q)^T$表示输出。输入或输出有定义的时间区间为（$-\infty$，$+\infty$），用 $\mathbf{u}$ 或 $\mathbf{u}(\cdot)$表示定义在（$-\infty$，$+\infty$）的向量函数，而$\mathbf{u}(t)$则表示 $\mathbf{u}$ 在时间 t 的値。若 $\mathbf{u}$ 仅定义在 $[t_0,\ t_1)$，则表示为$\mathbf{u}_{[t_0,t_1)}$。

定义1—1　当且仅当 $p=q=1$ 时，系统称为单变量系统。否则称为多变量系统。

初始松弛的概念　若系统在t_1时刻的输出仅取决于在t_1时的输入，则称该系统为瞬时系统或无记忆系统。只由电阻组成的网络就是这样的系统。然而，更为普遍的系统不是瞬时系统，即系统在t_1时的输出不仅取决于t_1时的输入，而且也取决于t_1以前和(或)以后的输入。因此，当输入$\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}$加于系统时，我们如果不知道$t_0$以前的输入$\mathbf{u}_{(-\infty,t_0)}$，那是无法确定输出$\mathbf{y}_{[t_0,+\infty)}$的。换句话说，在这种情况下，输入$\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}$与$\mathbf{y}_{[t_0,+\infty)}$沒有唯一确定的关系。显然，这种沒有唯一确定关系的输入—输出对，对于决定系统重要特性是毫无用处的。因此

在推导输入一输出描述时，必须假定在加入输入之前系统是松弛的或是静止的，且输出仅仅唯一地由嗣后的输入所引起。如果从能量的概念来看，这种假定意味着，若系统在t_1时刻不存储任何能量，我们就说系统在t_1时刻是松弛的。在工程实践中，我们总可认为系统在$-\infty$时刻是不存储任何能量的，也就是说总可假定系统在$-\infty$时是松弛或静止的。这时若在$-\infty$时把输入$\mathbf{u}_{(-\infty,+\infty)}$加入系统，则与之相应的输出是唯一的，完全由输入$\mathbf{u}_{(-\infty,+\infty)}$所决定。我们称$-\infty$时松弛或静止的系统为初始松弛系统或简称为松弛系统。对于一个松弛系统，自然就有

$$\mathbf{y}=H\mathbf{u} \tag{1—1}$$

其中，H是某一算子，通过它由系统的输入唯一地规定了系统的输出。式（1—1）也可用下面等价的写法表示：

$$\mathbf{y}(t)=H\mathbf{u}_{(-\infty,+\infty)} \qquad \forall t\in(-\infty,\ +\infty) \tag{1—2}$$

线性　式（1—2）表示了一般的初始松弛系统，若对算子H的性质加上适当限制，就可以得到初始松弛的线性系统的表达形式。

定义1—2　一个松弛系统称为线性的，当且仅当对于任何输入$\mathbf{u}^1$和$\mathbf{u}^2$，以及任何实数α_1和α_2，有

$$H(\alpha_1\mathbf{u}^1+\alpha_2\mathbf{u}^2)=\alpha_1H\mathbf{u}^1+\alpha_2H\mathbf{u}^2 \tag{1—3}$$

否则称为非线性系统。

式（1—3）的条件又可写成：对于任何$\mathbf{u}^1$和$\mathbf{u}^2$及任何实数α有

$$H(\mathbf{u}^1+\mathbf{u}^2)=H\mathbf{u}^1+H\mathbf{u}^2 \tag{1—4}$$

$$H(\alpha\mathbf{u}^1)=\alpha H\mathbf{u}^1 \tag{1—5}$$

很容易证明条件（1—3）和条件（1—4）、（1—5）是等价的。式（1—4）称为可加性，而式（1—5）称为齐次性。可加性与齐次性合称叠加原理。在经典控制理论中，我们就已经用叠加原理是否成立来区分线性系统和非线性系统。

要特别指出的是，齐次性和可加性是两个彼此不可互相代替的概念，即具有齐次性的系统并不意味着可加性成立，现举例如下：

例1—1　设一单变量系统，对所有t，其输入输出之间有关系

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{u^2(t)}{u(t-1)} & 当u(t-1)\neq0\\[2mm] 0 & 当u(t-1)=0\end{cases}$$

容易验证，这一输入一输出对满足齐次性，但不满足可加性。

同样，可加性一般也不隐含齐次性，因为（1—5）中的α要求是任何实数。具体地说，由（1—4）式可以推导出对任何有理数α有$H(\alpha\mathbf{u})=\alpha H\mathbf{u}$成立（见习题1—9），但一般不能导出$\alpha$是无理数时，式（1—5）也成立。

线性松弛系统的脉冲响应　首先我们引入δ函数或脉冲函数的概念，为此考虑图1—2所示的脉动函数$\delta_\Delta(t-t_1)$，即

$$\delta_\Delta(t-t_1)=\begin{cases}0 & t<t_1\\[1mm] \dfrac{1}{\Delta} & t_1\leqslant t<t_1+\Delta\\[1mm] 0 & t\geqslant t_1+\Delta\end{cases}$$

对于所有的△，$\delta_\Delta(t-t_1)$的面积总是1，它表明了脉动的强度。当△趋于零时，$\delta_\Delta(t-t_1)$的极限

$$\delta(t-t_1)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t-t_1)$$

称为脉冲函数，或称$Dirac$ δ函数，简称δ函数。δ函数最重要的性质是采样性，即对在t_1连续的任何函数$f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_1)dt=f(t_1) \tag{1—6}$$

利用脉冲函数的概念，就很容易导出单变量线性松弛系统的输入—输出描述。因为每一分段连续的输入$u(\cdot)$均可用一系列脉冲函数来近似，如图1—3所示，即

$$u\approx\sum_i u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta$$

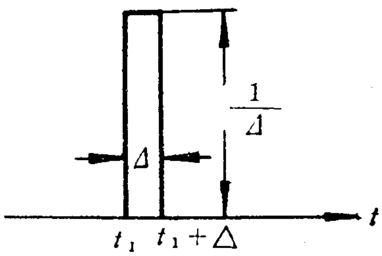

图1—2 脉动函数$\delta_\Delta(t-t_1)$

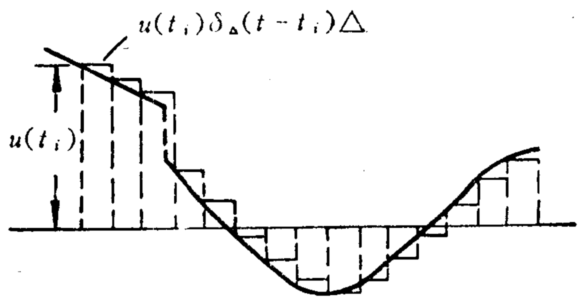

图1—3 用脉冲函数近似输入

因为系统是初始松弛的线性系统，故输出

$$y=Hu\approx\sum_i[H\delta_\Delta(t-t_i)]u(t_i)\Delta \tag{1—7}$$

当△趋于零时，(1—7)式成为

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty}[H\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau \tag{1—8}$$

若对所有的τ，$H\delta(t-\tau)$为已知，则对于任何输入，输出可由(1—8)求出。

$H\delta(t-\tau)$称为系统脉冲响应函数，它的物理意义是在时刻τ对松弛系统施加一个脉冲函数而得到的系统的输出。脉冲响应又可表示为下列双变量的函数

$$H\delta(t-\tau)=g(\cdot,\ \tau) \tag{1—9}$$

式(1—9)中$g(\cdot,\tau)$的变量τ表示δ函数加于系统的时刻，而第一个变量则为观测输出的时刻。利用式(1—9)可将(1—8)改写为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t,\ \tau)u(\tau)d\tau \tag{1—10}$$

即单变量线性松弛系统，其输入—输出关系完全由式(1—10)的卷积积分所描述。

若一个初始松弛的线性系统，具有p个输入端和q个输出端，则(1—10)式可相应地推广为

$$\mathbf{y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}(t,\ \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{1—11}$$

其中

$$G(t,\tau)=\begin{pmatrix} g_{11}(t,\tau) & g_{12}(t,\tau)\cdots g_{1p}(t,\tau) \\ g_{21}(t,\tau) & g_{22}(t,\tau)\cdots g_{2p}(t,\tau) \\ \vdots & \cdots \\ g_{q1}(t,\tau) & g_{q2}(t,\tau)\cdots g_{qp}(t,\tau) \end{pmatrix}$$

称为系统的脉冲响应矩阵。$G(t,\tau)$的元$g_{ij}(t,\tau)$的物理意义是，只在系统第j个输入端，于时刻τ加脉冲函数，其它输入端不加信号，这时，在系统第i个输出端引起的时刻t的响应。或者简单的说$g_{ij}(t,\tau)$是第i个输出端对第j个输入端的脉冲响应。

这里我们规定今后所研究的脉冲响应$G(t,\tau)$可含有一系列的δ函数，并且除了这些δ函数之外，$G(t,\tau)$的其余部分是τ和t $(t>\tau)$的分段连续函数。在这一假定下，如果输入是分段连续函数，则输出也是分段连续函数。因此，线性松弛系统可以看作一个线性算子，它将定义在$(-\infty,+\infty)$上的由所有分段连续函数组成的无限维空间映射到另一个无限维函数空间。

因果性 若系统在时刻t的输出不取决于t之后的输入，而只取决于时刻t和在t之前的输入则称系统具有因果性。任何实际的物理系统都是具有因果性的。通俗地说任何实际物理过程，结果总不会在引起这种结果的原因发生之前产生。

对于有因果性的松弛系统，其输入和输出关系可以写成

$$y(t)=Hu_{(-\infty,t]} \qquad \forall t\in(-\infty,+\infty) \tag{1—12}$$

对于具有线性和因果性的松弛系统，根据$G(t,\tau)$的定义，$G(t,\tau)$中的每一个元都是时刻τ加于系统的δ函数输入所引起的输出，若系统具有因果性，则系统在加入输入之前的输出为零，即

$$G(t,\tau)=0 \qquad \forall t<\tau,\ \tau\in(-\infty,+\infty) \tag{1—13}$$

故具有线性和因果的松弛系统的输入—输出描述为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{1—14}$$

t_0时刻的松弛性 现在将前面所说的初始松弛的概念用于任意时刻t_0。

定义1—3 系统在时刻t_0称为松弛的，当且仅当输出$y_{[t_0,\infty)}$仅仅唯一地由$u_{[t_0,+\infty)}$所决定。

若已知系统在t_0时松弛，则其输入—输出关系可以写成

$$y_{[t_0,+\infty)}=Hu_{[t_0,+\infty)} \tag{1—15}$$

显然，若系统初始松弛，且$u_{(-\infty,t_0)}=0$，则系统在时刻t_0也是松弛的。但是对初始松弛系统，$u_{(-\infty,t_0)}=0$并非系统在t_0松弛的必要条件。

例1—2 考虑一个单位延迟系统。这种系统的输出就是把输入延迟了单位时间。即对所有的t，有$y(t)=u(t-1)$。虽然$u_{(-\infty,t_0-1)}\neq 0$，但只要$u_{(t_0-1,t_0)}=0$，则系统在$t_0$是松弛的。

对于线性系统而言，不难证明，系统在t_0松弛的充要条件是，对于所有的$t\geqslant t_0$，有$y(t)=Hu_{(-\infty,t_0)}=0$。也就是说，若$u_{(-\infty,t_0)}$对于$t_0$以后的输出无影响，则线性系统在$t_0$时刻是松弛的。在$t_0$时刻是松弛的线性系统，它的一种输入—输出描述可表示为

$$y(t)=\int_{t_0}^{\infty} G(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{1—16}$$

一个很自然的问题是，给定一个线性系统，如何判断该系统在t_0时是松弛的？前面虽然给出一个充要条件，但条件中要考察系统过去的历史情况，即$u_{(-\infty, t_0)}$对系统的影响。下面的定理给出的判断可以不必知道系统过去的历史。

定理1—1 由下式描述的系统

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

在t_0是松弛的，必要且只要$u_{[t_0,+\infty)}=0$ 隐含着$y_{[t_0,\infty)}=0$。

证明 必要性。若系统在t_0松弛，则对于$t\geqslant t_0$，输出$y(t)$为$\int_{t_0}^{\infty} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$，因此若$u_{[t_0,+\infty)}=0$，则有$y_{[t_0,\infty)}=0$。

充分性。因为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t_0} G(t,\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{\infty} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

对所有$t\epsilon(-\infty, +\infty)$均成立。在$u_{[t_0,\infty)}=0$时和$y_{[t_0,\infty)}=0$的假定条件下，可得

$$\int_{-\infty}^{t_0} G(t,\tau)u(\tau)d\tau=0 \qquad \forall t\geqslant t_0$$

即$u_{(-\infty, t_0)}$对输出$y(t)(t\geqslant t_0)$的影响为零，因此系统在t_0是松弛的。

定理1—1虽然给出了判断t_0时刻是否松弛的规则，但是在实用中想要从t_0到∞来观测输出仍然是不现实的，下面的推论将给出判断t_0松弛的一个实用条件。

推论1—1 若系统的脉冲响应阵$G(t,\tau)$可以分解成$G(t,\tau)=M(t)N(\tau)$，且$M(t)$中每一个元素在（$-\infty$，$+\infty$）上是解析的，则系统在t_0松弛的一个充分条件是对于某个固定的正数ε，$u_{[t_0, t_0+\varepsilon)}=0$意味着$y_{[t_0, t_0+\varepsilon)}=0$。

证明 若$u_{[t_0,+\infty)}=0$，则系统输出$y(t)$为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t_0} G(t,\tau)u(\tau)d\tau=M(t)\int_{-\infty}^{t_0} N(\tau)u(\tau)d\tau \quad \forall t\geqslant t_0$$

上式最后一个积分的结果是与t无关的常向量，故$M(t)$是解析的假定意味着$y(t)$在$[t_0, +\infty)$上是解析的，又因为$y_{[t_0, t_0+\varepsilon)}=0$，由解析开拓原理可知$y_{[t_0,+\infty)}=0$。至此我们证明了$u_{[t_0,+\infty)}=0$隐含着$y_{[t_0,+\infty)}=0$，由定理1—1可知系统在$t_0$是松弛的。

推论1—1的结果之所以重要，是因为对于任何满足推论1—1条件的系统，其松弛性可以由任何非零时间区间上观测输出来确定。若在该区间内系统的输出为零，则系统在该时刻是松弛的。以后我们将证明凡可由有理传递函数阵或线性常系数微分方程描述的系统，是满足推论1—1的条件的。因此推论1—1具有广泛的实用价值。

时不变性 首先介绍位移算子Q_α的概念，位移算子Q_α的作用效果如图1—4所示。经Q_α作用后的输出等于延迟了α秒的输入。用数学式子可表示为：

$$\bar{u}(t)=Q_\alpha u(t) \qquad \forall t \tag{1—17}$$

即对任意的t，有$\bar{u}(t)=u(t-\alpha)$或$\bar{u}(t+\alpha)=u(t)$成立。

定义1—4 松弛系统称为时不变的，当且仅当对于任何输入u和任何实数α，有

$$HQ_\alpha u=Q_\alpha Hu \tag{1—18}$$

成立。否则称为时变的。

关系式（1—18）的含义是，若输入位移α秒，输出波形除位移α秒之外保持不变。换句话说，不管在什么时刻把输入加于时不变松弛系统，输出波形总是相同的。对于线性松弛系统，若又具有时不变性，这时的脉冲响应函数仅仅取决于加脉冲时刻τ和观测时刻t之差，即$H\delta(\xi-\tau)=g(t-\tau,0)$。实际上，根据时不变性有：

$$Q_\alpha H\delta(\xi-\tau)=HQ_\alpha\delta(\xi-\tau)$$
$$=H\delta[\xi-(\tau+\alpha)]=g(t,\tau+\alpha)$$

由Q_α的定义，等式$Q_\alpha g(t,\tau)=g(t,\tau+\alpha)$意味着对于任何的$t$、$\tau$、$\alpha$都有$g(t,\tau)=g(t+\alpha,\tau+\alpha)$成立。如取$\alpha=-\tau$就可得

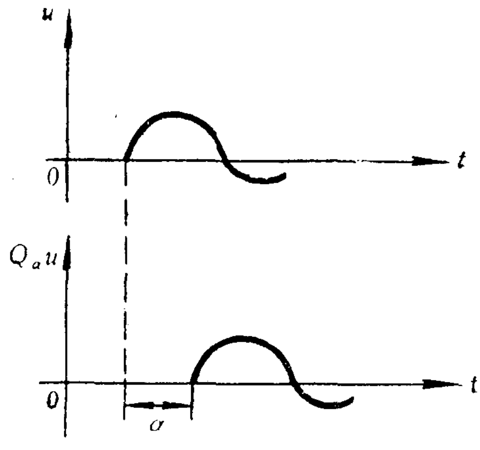

图1—4　位移算子的作用效果

$$g(t,\tau)=g(t-\tau,0)\qquad\forall t,\tau$$

为了方便起见，今后仍把$g(t-\tau,0)$记为$g(t-\tau)$。这一结论推广到多变量系统就是，对于所有的t和τ有

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{G}(t-\tau,0)=\mathbf{G}(t-\tau)$$

因而线性、时不变性、在t_0时刻松弛的因果系统，其输入—输出对满足

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{1—19}$$

在时不变的情况下，不失一般性，总可以选零作为初始时刻t_0，即$t_0=0$是开始研究系统或开始向系统提供输入$\mathbf{u}$的时刻，这时（1—19）式就变成下列卷积积分的形式：

$$\mathbf{y}(t)=\int_{0}^{t}\mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{1—20}$$

或

$$\mathbf{y}(t)=\int_{0}^{t}\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau \tag{1—21}$$

传递函数阵和它的极点多项式

将（1—20）式进行拉氏变换，并记

$$\mathbf{y}(s)=L[\mathbf{y}(t)]=\int_0^\infty \mathbf{y}(t)e^{-st}dt$$

由拉氏变换的卷积定理，可得

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \tag{1—22}$$

式中　$\mathbf{G}(s)=\int_0^\infty \mathbf{G}(t)e^{-st}dt$是脉冲响应阵的拉氏变换，称为系统的传递函数阵。

传递函数阵的元素不一定是s的有理函数，但在本教材中所讨论的传递函数阵，其元素都是s的有理函数，这样的传递函数阵称为有理函数矩阵。今后我们总假定$\mathbf{G}(s)$的每一个元都已经是既约形式，即每一个元的分子多项式和分母多项式没有非常数的公因式。推广经典控制原理中关于传递函数零点和极点的概念，可以定义有理传递函数阵$\mathbf{G}(s)$的零点和极

点。有理函数阵零点和极点的等价定义很多，为了尽可能不涉及多项式矩阵和多项式矩阵互质的概念，我们这里采用G(s)的不同子式来定义它的零点和极点。设G(s)是$q\times p$有理函数阵，且G(s)的秩为r。

定义1—5 G(s)所有不恒为零的各阶子式的首一最小公分母称为G(s)的极点多项式。极点多项式的零点称为G(s)的极点。

定义1—6 G(s)的所有r阶子式，在其分母取G(s)的极点多项式时，其分子的首一最大公因式称为G(s)的零点多项式。零点多项式的零点称为G(s)的零点。

定义中的“首一”表示一个多项式的最高幂次项的系数为1。定义1—5在第三章中还要用到。根据定义1—5和定义1—6，可直接计算G(s)的零点和极点。

例1—3 若

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & 0 & -\dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)}\\[2ex] \dfrac{-1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

根据定义1—5，可以计算出G(s)的一阶子式的公分母为$(s+1)(s-1)(s-2)$，而G(s)的三个二阶子式分别为

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2},\quad \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

二阶子式的公分母为$(s+1)(s+2)^2$。因此$G(s)$的极点多项式为$(s+1)(s-1)(s+2)^2$，显然G(s)有四个极点，它们分别为-1、-2、-2和$+1$。另外三个二阶子式在分母取成极点多项式时分别为

$$\frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s-1(s+2)^2}、\frac{-(s-1)^2}{(s+1)(s-1)(s+2)^2}、\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-1)(s+2)^2}$$

它们分子的最大公因式为$(s-1)$，因此G(s)的零点多项式为$(s-1)$，G(s)有一个零点$s=1$。

§1—2 系統的状态变量描述

在现代控制理论中，采用状态变量对系统进行描述，为此先介绍状态变量的概念。

状态变量 系统的输入—输出描述仅在松弛的条件下才能采用。若系统在t_0时刻是非松弛的，输出$\mathbf{y}_{[t_0,+\infty)}$并不能单单由$\mathbf{u}_{[t_0,\infty)}$所决定，而且还取决于$t_0$时的初始条件。例如在$t_0$时刻对质点（系统）施加一个外力（输入），则在$t\geqslant t_0$时质点的运动（输出）并不能唯一地确定。但如果我们知道了在t_0时刻质点的位置和速度，那么在$t\geqslant t_0$时质点的运动就唯一地确定了。因此可以把质点在t_0时的位置和速度看作是一组信息量，它与施加于质点的外力（输入）一起，可唯一地确定质点的运动（输出）。这样性质的一组信息量称为该质点运动的一组状态变量。

定义1—7 系统在t_0时刻的状态变量是系统在t_0时的信息量，它与$\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}$一起，唯一地确定系统在所有$t\geqslant t_0$时的行为。

定义中的信息量可以看作系统以往活动情况的某种最简练的表示，但这种表示又是足够的全面，使得它足以和$u_{[t_0,+\infty)}$一起确定系统的输出和信息量本身的更新。在上述质点运动的例子中，信息量只取速度显然是不全面的；同样若取位置、速度、动量那也是不必要的，因为速度和动量并不独立。为了进一步说明状态变量的概念，考虑下面的例子。

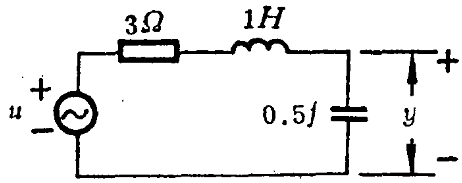

图1—5　二阶綫性网絡

例1—4　考虑如图1—5所示的网络

由复数阻抗的方法容易求出该网络的传递函数

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1}{LCS^2+RCS+1}=\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}$$

相应的脉冲响应函数为

$$g(t)=2e^{-t}-2e^{-2t}\qquad t\geqslant 0 \tag{1—23}$$

在t_0非松弛的情况下，输入—输出的关系式为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t-\tau)u(\tau)d\tau\qquad t\geqslant t_0$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t_0}g(t-\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}g(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1—24}$$

上式第一个积分可以看作输入$u_{(-\infty,t_0)}$对$t>t_0$时的输出产生的影响，而这种影响即是t_0以前的输入电压通过电容和电感在t_0存储了能量，这一存储的能量对$t>t_0$的输出发生了影响。实际上，将（1—23）代入（1—24）式的第一个积分，可得

$$\int_{-\infty}^{t_0}g(t-\tau)u(\tau)d\tau=2e^{-t}\int_{-\infty}^{t_0}e^{\tau}u(\tau)d\tau-2e^{-2t}\int_{-\infty}^{t_0}e^{2\tau}u(\tau)d\tau$$

$$=2e^{-t}c_1(t_0)-2e^{-2t}c_2(t_0) \tag{1—25}$$

式中

$$c_1(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0}e^{\tau}u(\tau)d\tau,\qquad c_2(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0}e^{2\tau}u(\tau)d\tau$$

如果$c_1(t_0)$和$c_2(t_0)$为已知，则由未知输入$u_{(-\infty,t_0)}$引起的在$t\geqslant t_0$后的输出就可完全确定。从式（1—24）和（1—25）可得

$$y(t)=2e^{-t}c_1(t_0)-2e^{-2t}c_2(t_0)+\int_{t_0}^{t}g(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{1—26}$$

对（1—26）式取关于t的导数，可得

$$\dot{y}(t)=-2e^{-t}c_1(t_0)+4e^{-2t}c_2(t_0)+g(0)u(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial g(t-\tau)}{\partial t}u(\tau)d\tau$$

由式（1—23）可知$g(0)=0$，将上式中t换为t_0可得

$$\dot{y}(t_0)=-2e^{-t_0}c_1(t_0)+4e^{-2t_0}c_2(t_0) \tag{1—27}$$

将式（1—26）中的t代以t_0可得

$$y(t_0)=2e^{-t_0}c_1(t_0)-2e^{2t_0}c_2(t_0) \tag{1—28}$$

式（1—27）和（1—28）给出了$c_1(t_0)$、$c_2(t_0)$与$y(t_0)$、$\dot{y}(t_0)$的关系。为了表现系统t_0时非松弛的情况，这里需在t_0时补充的信息量完全可以取$c_1(t_0)$、$c_2(t_0)$。从$c_1(t_0)$及$c_2(t_0)$的表达式中可以看出它们的确概括了t_0以前的输入在t_0时的影响。由于式(1—27)和(1—28)，所以在t_0时补充的信息量也可以取$y(t_0)$和$\dot{y}(t_0)$，亦即状态变量可以取为y、$\dot{y}$，这和通常电工学的知识是一致的。众所周知，对于这个网络，若流经电感的初始电流以及电容两端的初始电压为已知，则在任何驱动电压下，网络的动态行为就完全可以确定。而y就是电容上的电压，而$\dot{y}$是和流经电感上电流成比例的量。

例1—5 单位时间延迟系统，是对所有t其输出$y(t)$等于$u(t-1)$的装置。对于这一系统，为了唯一地由$u_{[t_0,\infty)}$确定$y_{[t_0,\infty)}$，需要知道$u_{[t_0-1,t_0)}$的信息。因此这一信息$u_{[t_0-1,t_0)}$就可作为系统在t_0时刻的状态。这个例子和例1—4不同，这里t_0时的状态由无限个数所组成。

例1—6 电枢控制直流电动机的模型如图1—6所示，R_a和L_a表示电枢回路的电阻和电感。激磁电流i_f为常数。电机驱动的负载具有惯量J和阻尼f。输入电压u加于电枢两端，电机传轴的角位移θ是所需要的输出量。

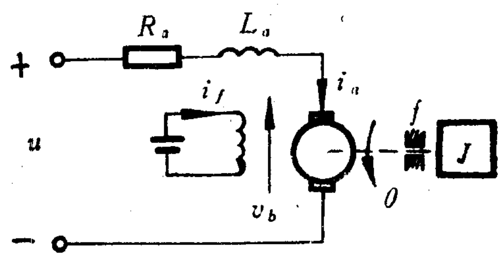

图1—6 电枢控制的直流电动机

电动机的驱动力矩T_m是激磁电流i_f产生的磁通和电枢电流i_a的函数。因i_f假定为常数，故在无饱和的假定下，驱动力矩为

$$T_m = K_m i_a \tag{1—29}$$

其中，K_m是电机常数。电机的力矩平衡方程为

$$T_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} \tag{1—30}$$

电枢电流与输入电压之间有如下关系：

$$u(t) = R_a i_a + L_a\frac{di_a}{dt} + V_b(t) \tag{1—31}$$

其中$V_b(t)$为反电势，它正比于电机转速。设反电势系数为K_b，则有

$$V_b(t) = K_b\frac{d\theta}{dt} \tag{1—32}$$

为了描述上述电动机模型内部的电学过程和力学运动过程，可以选择流经电感的电流i_a、电机输出轴的角位移θ和角速度$\dot{\theta}$作为状态变量，即如果知道了t_0时刻的上述三个量，该电动机模型的运动就可完全由驱动电压所唯一决定。

通过上面三个例子的叙述，可以简单地归纳出下列几点：第一，状态变量的选择不是唯一的，对于图1—5所示的网络，可以选流经电感的电流和电容上的电压作为状态变量，也可以选$y(t)$和$\dot{y}(t)$或$c_1(t)$和$c_2(t)$作为状态变量。第二，状态变量可以选为具有明显物理意义的量，在图1—6的电动机模型中，电枢电流、输出轴的角位移及角速度都是具有明显物理意义的量，前者是电学中的物理量，后者是力学中的物理量。状态变量也可以根据数学描述的需要，选择从物理意义上难以直接解释的量。第三，如果用能量的概念，我们可以把系统的运动过程看作是能量的变换过程。因此状态变量的数目等于且仅仅等于系统中包含独立

贮能元件的数目。在例1—6中有电能贮存元件电感，以及机械能（位能和动能）的贮存元件电机转动轴，电机转子连同负载。第四、状态变量的数目可以是有限个，如例1—4和例1—6；也可以和例1—5一样，状态变量的数目是无限个。在本书中，我们仅研究状态变量数目是有限个数的情况。这时，若将系统每一个状态变量作为分量，可将系统的状态变量集合成有限维列向量 x，我们称 x 为系统的状态向量。因为状态变量通常取实数值，所以状态向量取值的线性空间通常是熟知的有限维实向量空间，称为状态空间。

动态方程 引入系统的状态变量之后，我们可以得到描述系统输入、输出和状态之间关系的方程组，这个方程组称为系统的动态方程。在状态变量的定义中曾经指出状态变量的更新问题，也就是说状态变量是其自身和输入变量的泛函，状态变量是通过一组时间函数与输入变量、状态的过去特性联系起来的，这种最简单的泛函关系就是积分，即状态向量的表达式为

$$\mathbf{x}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)dt$$

其中函数向量f确定了系统特性，上式表明状态向量满足下列向量微分方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t) \qquad (1—33a)$$

如果再确定由输入向量与状态向量求出输出向量 y 的关系式

$$\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t) \qquad (1—33b)$$

这样，一个系统的动态模型就算完全了。

目前都把式（1—33a、b）所表示的描述形式取作状态空间模型的标准形式，并称为系统的动态方程式。为使（1—33）真正成为系统的动态方程式，还必须假定对于任何初态 $\mathbf{x}(t_0)$和任何给定的允许控制$\mathbf{u}(t)$，方程有唯一解。对于给定 u 和给定的初态，方程有唯一解的一个充分条件是f_i和$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$（$i$，$j=1$，2，…，$n$）是时间的连续函数。若（1—33）存在唯一解，则可证明它能用$\mathbf{x}(t_0)$和$\mathbf{u}_{[t_0,t)}$表出。正如所期望的一样，$\mathbf{x}(t_0)$当然就是t_0时的状态。方程（1—33a）决定了状态的行为，故称为状态方程，方程（1—33b）给出输出，故称输出方程。

若（1—33）中的f、g是x和u的线性函数，则称（1—33）为线性动态方程，它们的具体形式为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

其中 $\mathbf{A}(t)$、$\mathbf{B}(t)$、$\mathbf{C}(t)$和$\mathbf{D}(t)$分别为$n\times n$、$n\times p$、$q\times n$和$q\times p$的矩阵。因此n维线性动态方程有形式：

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad （状态方程） \qquad (1—34a)$$
$$\mathbf{y}=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}+\mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad （输出方程） \qquad (1—34b)$$

式（1—34）有唯一解的一个充分条件是$\mathbf{A}(\cdot)$的每一元素均为定义在（$-\infty$，∞）上的t的连续函数。为了方便，假定$\mathbf{B}(t)$、$\mathbf{C}(t)$和$\mathbf{D}(t)$的元素也在（$-\infty$，$+\infty$）上连续。(1—34)的方程称为线性时变动态方程，$\mathbf{A}(t)$称为系统矩阵，$\mathbf{B}(t)$和$\mathbf{C}(t)$分别称为控制分布矩阵和量测矩阵，$\mathbf{D}(t)$表示输入和输出的直接耦合关系，称为前馈矩阵。方程（1—34）又可以

用图 1 — 7 中的框图来表示。

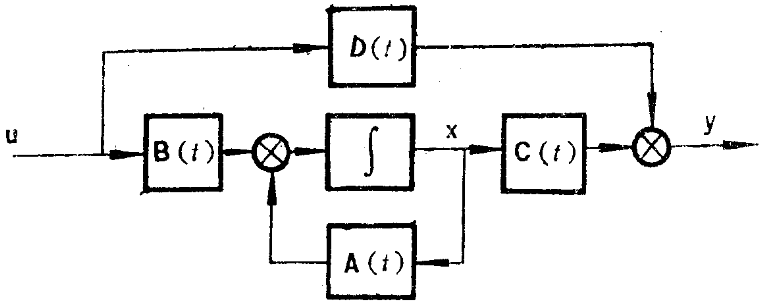

图1—7　线性时变动态方程的框图

若矩阵 A 、B 、C 和 D 不随时间变化，则方程称为线性时不变动态方程。n 维线性时不变动态方程的一般形式为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du \qquad (1—35)$$

式中　A 、B 、C 和 D 分别为 $n \times n$ 、$n \times p$ 、$q \times n$ 和 $q \times p$ 的实常量矩阵。在时不变的情况下，方程的特性不随时间而变，因此不失一般性可选初始时间为零，从而时间区间可选为$[0, \infty)$。

建立线性动态方程的例题

例1—7　设有一倒摆安装在马达传动车上，如图1—8所示。这实际上是一个空间起飞助推器的姿态控制模型。图中M为传动车的质量，l 为摆长，m为摆的质量，u 为控制力。假定摆只在图 1 — 8 所示的平面上运动。若取系统的坐标为 x 及 θ ，则这个系统的动力学方程如下：

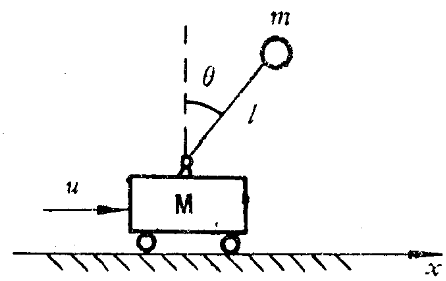

图1—8　倒摆装置示意图

$$ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta = mg\sin\theta$$
$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = u$$

这是一组非线性方程，注意到 θ 很小时有

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

忽略掉方程中的高阶小量，可得线性化方程：

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = mg\theta$$

取 x 、$\dot{x}$、θ 、$\dot{\theta}$ 为系统的状态变量，并引入状态向量 $\mathbf{x} = (x_1 x_2 x_3 x_4)^T = (x\ \dot{x}\ \theta\ \dot{\theta})^T$，可将上述线性化方程表示为