控制系统的自动设计

〔美〕C.W.梅里安第三 著

张乃光 译

国防工业出版社

控制系统的自动设计

〔美〕C.W.梅里安第三　著
张乃光　译　杨翠莲　校

国防工业出版社

内容简介

本书介绍连续控制系统自动设计的入门知识，着重讨论最优化的设计方法。全书共六章，第一章引论；第二章介绍多元函数极小化理论；第三章讨论在自动设计中特别有实用价值的一种搜索方法——梯度法；第四章介绍确定性的设计问题；第五章介绍随机设计问题；第六章讨论无限时间区间的设计问题。本书的附录提供了一个计算有关公式的计算机程序，这样就可运用计算机来完成自动设计。

读者对象为从事控制的研究人员，大学高年级学生及研究生。

Automated Design of Control Systems
C. W. MERRIAM III
Gordon and Breach Science Publishers 1974

控制系统的自动设计

〔美〕C. W. 梅里安第三　著
张乃光　译
杨翠莲　校

*

国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 12 1/4　310千字
1982年11月第一版　1982年11月第一次印刷　印数：0,001—7,000册
统一书号：15034·2385　定价：1.55元

前　言（摘译）

本书是作者在科奈尔（Cornell）大学讲授各种控制理论课程的一个产物。这些课程是典型的大学课程如数学及系统理论导论的后续课。作者认为读者已熟悉如下的内容，诸如：矢量形式线性常系数微分方程的解法、矩阵的性质、线性矢量空间的基本知识、各种变换、信号流程图及线性定常系统的稳定性理论。而且，作者还认为读者对反馈控制的目的、基本问题以及设计指标也有所了解。

本书的目的是向读者介绍连续控制系统自动设计的入门知识。自动设计需要事先有计划地选择设计指标，需要采用有效的及可靠的计算方法，还需要有系统实施时的一些实际可行的方法。当然，要达到完全自动设计，这一点尚未做到。可是，近年来在该领域中已经获得一些重要的进展，其中包括：传递函数矩阵的综合、不完全状态变量反馈、降低灵敏度、人的操作仿真以及随机稳定性理论等一些课题。

作者认为线性化及最优化方法是控制系统自动设计的最基本的和最有用的方法。进而，作者相信作为达到自动设计手段的这些方法在工程实践中将会很快地替代许多经典的设计方法。本书也完成了一个长期所忽视的要求，即在经典控制理论和高级的最优控制理论之间需要一个有系统的并且是紧密的过渡关系。这个过渡关系以微积分为基础，因而就自动设计内容的深度来看，可以放在四年级或五年级去讲授。

本书中定理-证明格式与众不同，力求向读者提供最明确的内容。可是一些理论结果完全都是根据自动设计的要求经实际考虑而提出和进行评价的。问题的提出和评价大部分都是在介绍了大

量合理的经过精心推敲的设计问题基础上进行的。作者还认为只有掌握了数字计算机的知识才能了解本书的内容，因为一些自动设计问题的完全解决，只能是将计算机应用于现实的设计研究上才能实现。为了使读者对本书的内容有进一步的理解和体会，在本书中收集了大量具有启发性的习题。

本书所介绍的内容为：参数最优化的解析设计方法、多元函数极小化理论、等式约束及不等式约束、搜索方法及其计算机实施、大型确定性设计问题、随机设计问题、求解二点边界值问题的计算方法，以及逼近理论和最优化理论的进展，这些问题都与控制系统自动设计有关。在本书的附录中还介绍了APL/360计算机程序库，对有关问题的计算机求解提供了有益的参考价值。

目　　录

第一章　引论 …… 1

1.1　矢量-矩阵符号 …… 2

1.2　线性常系数状态方程 …… 9

1.3　传递函数 …… 11

1.4　性能积分 …… 15

1.5　具有确定性信号的例子 …… 19

1.6　具有随机信号的例子 …… 23

1.7　小结 …… 26

参考文献 …… 27

习题 …… 28

第二章　函数极小化及约束 …… 38

2.1　函数的极小 …… 38

2.2　相对极小的条件 …… 40

2.3　凸集及函数 …… 43

2.4　绝对极小的条件 …… 45

2.5　等式约束 …… 47

2.6　关于等式约束的拉格朗日乘子规则 …… 50

2.7　关于等式约束的拉格朗日函数 …… 52

2.8　等式约束的例子 …… 58

2.9　不等式约束 …… 60

2.10　小结 …… 68

参考文献 …… 69

习题 …… 69

第三章　梯度法 ……………………………………………………76

3.1　关于无约束极小的逐次逼近法……………………………76
3.2　关于单变量函数的梯度搜索法……………………………81
3.3　最速下降法……………………………………………………86
3.4　逐次代换法及牛顿-拉夫生法 ……………………………89
3.5　共轭方向的共轭梯度法……………………………………92
3.6　共轭方向的弗莱彻-鲍威尔法 ……………………………99
3.7　关于约束极小的逐次逼近法 ……………………………103
3.8　极小-极大法…………………………………………………109
3.9　小结 …………………………………………………………115
参考文献 ……………………………………………………117
习题 …………………………………………………………117

第四章　确定性的设计问题 ……………………………………123

4.1　必要条件的公式表达 ………………………………………124
4.2　求解 $XA+BX+C=0$ 的方法 ……………………………126
4.3　过剩极点指标及传递函数矩阵综合 ……………………135
4.4　设计指标的相容性及闭环稳定性 ………………………141
4.5　状态增广及极点删减指标 …………………………………151
4.6　传递函数矩阵综合实例 ……………………………………155
4.7　性能泛函的选择及最优增益控制 ………………………161
4.8　最优增益控制实例 …………………………………………166
4.9　线性最优控制 ………………………………………………173
4.10　小结…………………………………………………………185
参考文献 ……………………………………………………186
习题 …………………………………………………………187

第五章　随机设计问题 …………………………………………198

5.1　必要条件的公式表达 ………………………………………200
5.2　求解 $XA'+AX+D(B,X)+C=0$ 的方法 ………………202

5.3 人工操作控制器模型 ……210
5.4 手动控制实例 ……216
5.5 最优增益控制 ……221
5.6 最优增益控制实例 ……223
5.7 线性最优控制 ……228
5.8 最优线性滤波器及预测器 ……235
5.9 飞机跟踪实例 ……242
5.10 小结 ……248
参考文献 ……249
习题 ……250

第六章 有限时间设计问题 ……255

6.1 关于最优参数必要条件的公式表达 ……256
6.2 最优增益控制 ……262
6.3 最优驱动函数的必要条件的公式表达 ……265
6.4 最优时变增益控制 ……276
6.5 矩阵黎卡提方程的性质 ……279
6.6 最优驱动函数的计算方法 ……286
6.7 线性化的最优控制 ……298
6.8 具有最优参数及终端等式约束的最优驱动函数 ……302
6.9 具有最小最终时间及终端等式约束的最优驱动函数 ……312
6.10 小结 ……317
参考文献 ……319
习题 ……319

附录A ……329

A.1 惯例 ……329
A.2 说明 ……331
A.3 举例 ……345
A.4 小结 ……348
参考文献 ……382

第一章 引 论

自从第二次世界大战结束以来，控制系统最优化设计方法的进展得到了真正显著的发展。第一个进展〔1〕涉及到在具有固定结构的线性系统中参数的调节问题，这些参数最优化方法主要是解析的方法，在本章的最后要作简短的综述。第二个进展〔2,3〕涉及到具有自由结构的系统的脉冲响应最优化问题，脉冲响应最优化方法主要也是解析的方法，事实上它构成了有名的维纳〔4〕及李氏〔5〕滤波器最优化方法的一个新的应用。第三个进展涉及到反馈控制方程的最优化〔6〕，它的基础是贝尔曼的动态规划方法〔7〕，或者是邦特李耶金〔8〕提出的变分法的推广。采用数字计算机可以促使反馈控制系统最优化方法有巨大发展并发挥出在应用上的潜在能力。

然而，在目前，最优化方法在控制系统设计的广大领域中还未使用，而控制系统的设计仍是采用传统的经典的试凑方法。这种现象的出现是因为许多最优化问题还没有形成一套适应于现代计算方法的公式，并且最优化问题也没有和一些设计准则结合起来，诸如：传递函数矩阵的综合准则、不完全状态反馈准则和参数扰动灵敏度的准则等。

本书的目的是向读者介绍最优化方法。这些方法对于控制系统的自动设计具有特别密切的关系。在此特别强调解决这些问题时所采用的计算方法，同时鼓励读者要用计算机来求解一些具有代表性的设计问题。另外还提供了在控制中出现的自动设计准则和操作人员操作的仿真所需的一些预备知识。在自动设计一般性问题上采用这一有限制性的方法在教学上有许多优点。首先，从内容来说，只要求了解微积分运算和一般性的预备知识以及一般

大学生所具备的系统理论知识●。其次，采用本书所介绍的一些方法所解决的控制系统设计问题都是十分重要的。对于这类设计问题来说，在系统的工程实施中已经取得了一些实际的效果。第三个优点是由所有最优化问题的广义解释而得到的，它也可以充实本书所介绍的自动设计问题的公式。

1.1 矢量-矩阵符号

在本书中对代数方程和微分方程都采用矢量-矩阵符号。这种表示方法是与有关的计算方法紧密相联的，同时也便于用矢量空间的概念来解释许多重要的结果。下面扼要地总结一下在本书中所采用的一些符号约定。

垂直的一维数组称为列矢量，用小写字母$\boldsymbol{f}(t)$，$\boldsymbol{g}(t)$等来表示，也可以写成

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

或写成

$$\boldsymbol{f}=[f_i] \quad 具有 \dim \boldsymbol{f}=m \tag{1-2}$$

另外，二维数组称为矩阵，用大写字母$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$等来表示，也可以写成

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

写成或

$$\boldsymbol{F}=[f_{ij}] \quad 且有 \dim\boldsymbol{F}=m\times n \tag{1-4}$$

对于分块形式的矢量和矩阵采用类似的且完全一致的符号。特别是将矢量$\boldsymbol{f}$再分成几行，每一行称为分块矢量$\boldsymbol{f}_i$，因此

● 见参考文献[9，10]。

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix} \quad \text{具有} \ \dim \boldsymbol{f}_i = m_i \ \text{及} \ \dim \boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{k} m_i \tag{1-5}$$

此外，矩阵 $\boldsymbol{F}$ 再分成一些行和列的组，因此分块矩阵 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 定义为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11} & \boldsymbol{F}_{12} & \cdots & \boldsymbol{F}_{1l} \\ \boldsymbol{F}_{21} & \boldsymbol{F}_{22} & \cdots & \boldsymbol{F}_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{F}_{k1} & \boldsymbol{F}_{k2} & \cdots & \boldsymbol{F}_{kl} \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

具有

$$\dim \boldsymbol{F}_{ij} = m_i \times n_j \quad \text{及} \quad \dim \boldsymbol{F} = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{l} n_j\right)$$

采用这样的符号选择使得对于每一个 i，j 的 $\dim \boldsymbol{f}_i = 1$ 及 $\dim \boldsymbol{F}_{ij} = 1 \times 1$ 的特殊情况能恢复到矢量及矩阵的正规表示形式。

由 $\boldsymbol{F}$ 的行和列互相交换而形成的矩阵称为 $\boldsymbol{F}$ 的转置，且用 $\boldsymbol{F}'$ 表示，其中

$$\boldsymbol{F}'=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{m1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

与式（1-3）相对应。同样方法，与式（1-1）相对应，以 $\boldsymbol{f}'$ 表示的行矢量定义为

$$\boldsymbol{f}' = [f_1 \quad f_2 \ \cdots \ f_m] \tag{1-8}$$

经常出现的分块矩阵形式是用行或列来表示。当用列来分块时矩阵 $\boldsymbol{F}$ 常写成

$$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{f}_1 \quad \boldsymbol{f}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{f}_n] \tag{1-9}$$

当用行来分块时，也可写成

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1' \\ \boldsymbol{f}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_m' \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{F}' = [\boldsymbol{f}_1 \quad \boldsymbol{f}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{f}_m] \tag{1-10}$$

当 $m=n$ 时，矩阵称为方阵，而当 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'$ 时，方阵称为对称矩阵。

在本书中经常出现方阵 $\boldsymbol{F}$ 的行列式且记为 $\det\boldsymbol{F}$。行列式的一个重要性质是等价

$$\det\boldsymbol{F}=0\Longleftrightarrow\exists\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}\ni\boldsymbol{F}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}\tag{1-11}$$

其中当 $\boldsymbol{F}$ 是复数矩阵时 m 可以是一个复数矢量。在本书中出现的一些记号：$\Longleftrightarrow$代表"隐含着并被隐含着"、$\exists$代表"存在着"、$\ni$代表"使得"，但尽可能少用这些记号。对于 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}$ 的另外一个表达式当然是

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_j m_j=\boldsymbol{0}$$

因此 $\det\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ 等价于$\boldsymbol{F}$的行之间的线性相关。因为$\det\boldsymbol{F}=\det\boldsymbol{F}'$，即使当矩阵 $\boldsymbol{F}$ 不是对称时，$\boldsymbol{F}$ 的列之间的线性相关等价于 $\boldsymbol{F}$ 的行之间的线性相关。

行列式的另一重要性质是由下列关系导出：

$$(\mathrm{cof}\boldsymbol{F})'\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\mathrm{cof}\boldsymbol{F})'=(\det\boldsymbol{F})\boldsymbol{I}\tag{1-12}$$

其中 $\mathrm{cof}\boldsymbol{F}$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 的余因子矩阵。特别地，$\mathrm{cof}\boldsymbol{F}$ 的 ij 元素是 $\boldsymbol{F}$ 的 ij 余因子，且等于 $(-1)^{i+j}$ 乘上去掉 $\boldsymbol{F}$ 的第 i 行和第 j 列所形成的矩阵的行列式。矩阵 $\boldsymbol{I}$ 称为单位阵，即

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\tag{1-13}$$

具有主对角线元素为 1 和非对角线元素为零。$n\times n$ 单位阵有时用列分块成

$$\boldsymbol{I}=[\boldsymbol{i}_1\quad\boldsymbol{i}_2\cdots\boldsymbol{i}_n]$$

而列矢量 $\boldsymbol{i}_j$ 称为第 j 个标准基底矢量。矩阵 $\boldsymbol{F}$ 称为奇异阵，当且仅当 $\det\boldsymbol{F}=0$。非奇异阵 $\boldsymbol{F}$ 具有逆 $\boldsymbol{F}^{-1}$，它可由式（1-12）来验证

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{F}}\operatorname{cof}\boldsymbol{F}' \tag{1-14}$$

方阵 $\boldsymbol{F}$ 的特征值和特征矢量，通常分别表示成 $\lambda\{\boldsymbol{F}\}$ 和 $\boldsymbol{m}\{\boldsymbol{F}\}$，并且它们定义任何复标量 λ 和矢量 $\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{0}$，使有

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{m} \tag{1-15}$$

由于式（1-11），$\boldsymbol{F}$ 的特征值是 $\boldsymbol{F}$ 的特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})$ 的根。另外，$n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的特征值满足

$$\det\boldsymbol{F}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\{\boldsymbol{F}\} \tag{1-16}$$

及

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\{\boldsymbol{F}\} \tag{1-17}$$

其中 $\operatorname{tr}\boldsymbol{F}$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 的迹。

在本书的许多场合中经常要出现矢量积。特别对于实矢量 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的内积 $\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}$ 和外积 $\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'$，可以用标准矩阵乘法来一致地定义。出现内积的内容和矩阵的性质有关。例如，一个实对称矩阵 $\boldsymbol{F}$ 称为正半定，当且仅当

$$\boldsymbol{f}'\boldsymbol{F}\boldsymbol{f}\geqslant 0\ \forall\ \text{实}\ \boldsymbol{f} \tag{1-18}$$

其中记号 $\forall$ 表示“对于所有”的意思。实对称矩阵的所有特征值都是实数，同时正半定矩阵的所有特征值都是非负的。另外，一个实对称矩阵称为正定，当且仅当

$$\boldsymbol{f}'\boldsymbol{F}\boldsymbol{f}>0\ \forall\ \text{实}\ \boldsymbol{f}\neq\boldsymbol{0} \tag{1-19}$$

正半定矩阵是正定的，当且仅当它们是非奇异矩阵。

矢量和矩阵的范数也经常在本书中出现。定义在适当的矢量空间的标量函数 $\|\cdot\|$ 称为范数，当且仅当

（i）$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\|\boldsymbol{f}\|=0$ 及 $\boldsymbol{f}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\|\boldsymbol{f}\|>0$ （1-20）

（ii）$\|c\boldsymbol{f}\|=|c|\,\|\boldsymbol{f}\|$

以及

（iii）$\|\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\|\leqslant\|\boldsymbol{f}\|+\|\boldsymbol{g}\|$

对属于矢量空间的所有 f 和 g 都成立。记号⇒表示“隐含着”。定义在所有复矢量的空间 $\mathscr{C}^n$ 上具有 $\dim f=n$ 的范数的典型例子是

$$\|f\|_1=\sum_{i=1}^{n}|f_i|,\ \|f\|_2=(f^{\dagger}f)^{1/2},\ 及\|f\|_\infty=\max_i|f_i| \tag{1-21}$$

运算 $(\cdot)^{\dagger}$表示复共轭转置，它用复共轭 $(\cdot)^*$定义成

$$f^{\dagger}=(f^*)'=(f')^* \tag{1-22}$$

对实矢量 f 的范数$\|f\|_2$ 有时称为 f 的欧几里德长度，并表示成$|f|$。范数的代数性质通过定义

$$\|F\|=\inf\{c:\|Ff\|\leqslant c\,\|f\|\ \forall f\in\mathscr{C}^n\} \tag{1-23}$$

可引伸到矩阵，其中$\{c:\cdots\}$表示受到“…”约束的所有 c 的集合，而记号∈表示“属于”。在式（1-23）中出现的 inf 表示最大下界，如果采用最小上界，记为 sup，则可用等价定义

$$\|F\|=\sup\{\|Ff\|:\|f\|=1\ 及 f\in\mathscr{C}^n\} \tag{1-24}$$

来代替。对应于在式（1-21）中给出的矢量范数的例子，矩阵的范数分别是

$$\|F\|_1=\max_j\left(\sum_{i=1}^{m}|f_{ij}|\right),\ \|F\|_2=\lambda_{\max}^{1/2}\{F^{\dagger}F\}$$

以及 (1-25)

$$\|F\|_\infty=\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}|f_{ij}|\right)$$

当 $\dim F=m\times n$。记号 $\lambda_{\max}$ 用来表示正半定矩阵的最大特征值。在式（1-20）中给出的矢量的范数的三个数学性质，同样适合矩阵范数，并且还可以导出以下性质〔11〕：

$$\|FG\|\leqslant\|F\|\,\|G\| \tag{1-26}$$

因为通常是用方阵，所以矩阵的函数可类似于对应的标量的函数来定义。例如，多项式

$$p(x)=\sum_{k=0}^{l} p_k x^k \tag{1-27}$$

用来定义矩阵多项式

$$p(\boldsymbol{F})=\sum_{k=0}^{l} p_k \boldsymbol{F}^k \tag{1-28}$$

用类似的方式，无穷级数如

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \tag{1-29}$$

可用来定义矩阵指数

$$e^{Ft}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{F}^k t^k \tag{1-30}$$

在式（1-30）中出现的和，在 t 的每一个有限闭区间上一致收敛，并且还在每个有限 t 绝对收敛〔11〕。此外，矩阵函数常常具有许多与其对应的标量函数的一些性质，诸如

$$\frac{d}{dt}(e^{Ft})=\boldsymbol{F}(e^{Ft});\quad e^0=\boldsymbol{I} \tag{1-31}$$

及

$$(e^{Ft})^{-1}=e^{-Ft} \tag{1-32}$$

常数矩阵称为渐近稳定，当且仅当存在常数 Γ，$\gamma>0$ 使得

$$\|e^{Ft}\|\leqslant\Gamma e^{-\gamma t}\ \forall\ t\geqslant 0 \tag{1-33}$$

这个定义也是通过在式（1-31）和由 e^{ft} 满足的标量微分方程之间的相似性而得出的。然而，限制条件

$$e^{(F+G)t}=e^{Ft}e^{Gt}\ \forall\ t \Longleftrightarrow \boldsymbol{F}\text{ 和 }\boldsymbol{G}\text{ 可交换} \tag{1-34}$$

在对应的标量函数情况下并不出现。

关于矢量-矩阵形式函数的符号约定在此完全用矢量来描述。特别是以 t 表示的参数矢量 $\boldsymbol{f}(t)$ 以矢量的导数出现，为

$$\dot{\boldsymbol{f}}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}\dfrac{df_1}{dt}\\ \dfrac{df_2}{dt}\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{1-35}$$

而矢量的积分为

$$\int_0^t \boldsymbol{f}(\xi)d\xi=\begin{bmatrix}\int_0^t f_1(\xi)d\xi\\ \int_0^t f_2(\xi)d\xi\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{1-36}$$

此外，单侧拉氏变换矢量在本书中也经常出现，并表示为

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(s)=\int_0^\infty \boldsymbol{f}(t)e^{-st}dt \tag{1-37}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1(s)\\ \boldsymbol{F}_2(s)\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{1-38}$$

以类似的方式，统计期望矢量可写成

$$E\{\boldsymbol{f}(t)\}=\begin{bmatrix}E\{\boldsymbol{f}_1(t)\}\\ E\{\boldsymbol{f}_2(t)\}\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{1-39}$$

其中$E\{\cdot\}$表示期望运算〔12〕。对于排成矩阵形式的函数的符号约定如$\boldsymbol{F}(t)$完全与在此介绍的关于矢量函数的情况相类似。

多元标量函数和矢量函数的偏导数在本书中也经常出现，并且偏导数通常用下标表示。例如，设f是可微标量函数$f(\boldsymbol{c})$具有$\dim\boldsymbol{c}=m$。则一次偏导数可写成

$$f_{c_i}=\frac{\partial f}{\partial c_i} \quad \text{或} \quad f_c=\left[\frac{\partial f}{\partial c_i}\right] \quad \text{具有}\ \dim f_c=m \tag{1-40}$$

而矢量f_c称为f关于$\boldsymbol{c}$的梯度。这个定义可推广到矩阵$\boldsymbol{C}$的标

量函数，具有 $\dim \boldsymbol{C}=m\times n$，如

$$f_c=\left[\frac{\partial f}{\partial c_{ij}}\right]\text{具有}\dim \boldsymbol{f}_c=m\times n \tag{1-41}$$

以同样方式，设 f 是二次可微的标量函数 f（c，$\boldsymbol{d}$）具有 $\dim \mathrm{c}=m$ 及 $\dim \boldsymbol{d}=n$。则二次偏导数可写成

$$f_{c_i d_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial c_i \partial d_j}\text{或}f_{cd}=f'_{dc}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial c_i \partial d_j}\right]\text{具有}\dim f_{cd}=m\times n \tag{1-42}$$

而矩阵 f_{cd} 称为 f 关于 **c** 和 $\boldsymbol{d}$ 的海赛（hessian）。这个符号也可以专门用于关于单矢量变量的海赛，如

$$f_{cc}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial c_i \partial c_j}\right] \tag{1-43}$$

因此 f_{cc} 可以是对称的。可微矢量函数 $\boldsymbol{f}(\mathbf{c})$的偏导数具有 $\dim \boldsymbol{f}=m$ 及 $\dim \mathbf{c}=n$ 也经常出现。$\boldsymbol{f}$ 关于 **c** 的雅可比（Jacobian）是矩阵 $\boldsymbol{f}_c$，定义为

$$f_c=\left[\frac{\partial f_i}{\partial c_j}\right]\text{具有}\dim \boldsymbol{f}_c=m\times n \tag{1-44}$$

在本书的其他章节中还采用一些另外的符号约定。可是，这些约定不那么标准化，因此在有关章节中再行规定。

1.2 线性常系数状态方程

本书的主要部分涉及到一些设计问题，通常可以用线性常系数方程来作为这些设计问题开环动特性的模型。可是，这些方程的驱动函数在有些问题中是确定性的，而在另一些问题中则是随机的。对于这两种类型的驱动函数，问题的公式表达是不同的，因此这些公式表达的简短介绍在此给出。

在确定性的驱动函数情形下，线性定常系统的开环动态状态方程可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{u};\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1-45}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 称为状态矢量而 $\boldsymbol{u}(t)$ 根据上下文内容称为控制矢量或驱动函数矢量。对许多问题也引出输出方程，通常写成