最佳控制与观测

言 茂 松

最佳控制与观测

基本原理及其在电力系统中的应用

言 茂 松

清 华 大 学 电 力 系

1 9 7 8

最 佳 控 制 与 观 测

言 茂 松

*

清 华 大 学
1978 年 4 月第 一 版
1978 年 5 月第一次印刷

*

字数：209千字
印数：1000 册
定价：0.91 元

内容简介

现代控制理论是控制理论发展的一个新阶段，目前已经应用于空间技术，导航，电力系统，运输，生产过程控制，核子，通信等领域。

本书着重线性系统的最优控制理论，包括随机最佳控制，少数章节结合在电力系统中的应用。第一部分（一二章）是入门，第二部分（三四五章）是基本理论，第三部分（六七章）是工程应用专题，最后在第八章介绍了观测器及卡尔曼滤波技术在最优控制中的运用。

本书可供从事自动控制工作的工程技术人员，高等院校有关专业的师生参考。

前　　言

随着空间技术和电子计算机技术的发展，现代控制理论在六十年代开始形成并逐步完善起来，基本理论和工程应用的研究一直都很活跃，目前已经逐步为更多的自动控制科技和教学人员所理解，并开始应用到各个领域中去，例如制导，火箭发射，导弹，导航、电力系统，运输、生产过程控制、通讯等等。

现代控制理论的特点是采用状态空间分析，应用矩阵论和概率论等数学工具，在时域内对自动控制系统直接进行综合，使得控制理论达到了一个新的发展阶段。它特别适用于以电子计算机为工具对多输入——多输出高精度的系统，甚致是时变系统进行综合设计，使控制系统的设计面目为之一新。

本书的重点是线性系统，采用二次型性能指标，对非时变系统进行最佳控制（又称最优控制，极值控制）包括具有Kalman——Bucy滤波技术的随机最佳控制，这一部分是现代控制理论中比较基本，比较成熟，并且也是最具有工程应用价值的一部分，少数章节介绍了在电力系统中的应用，第一部分（第一二章）是入门，包括必要的数学准备，第二部分（第三四五章）是基本理论，第三部分（第六七章）是工程应用专题，包括在电力系统中的应用，最后（第八章）介绍了观测器和Kalman——Bucy滤波技术在最佳控制中的应用，即随机最佳控制问题，各章内容简介参见2—5节的介绍。

本书是为那些已经具备一定的经典控制理论知识但对现代

控制理论还不甚了解的读者编写的，可供从事自动控制工作的工程技术人员，高等院校师生参考。

本书力求比较循序渐进地介绍最佳控制与观测的基本原理和工程应用基础，但是在叙述上并不一味追求数学推理的严密和完整，为了不使上述初学读者和工程技术人员被大量的数学推证所淹没，这样处理或许是可取的，书后附有主要参考文献，可供进一步查阅。

本书部分内容曾在清华大学电力系发电教研组试讲过，本书的出版工作也曾得到清华大学电力系及发电教研组的支持，在此谨表谢意。清华大学精仪系王照林、电子系卢开澄两位同志校阅了部分底稿，并提出不少宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，难免有错误和缺点，恳请批评指正。

1977.11.

目　录

第一章　数学准备

假定读者对于经典控制理论、即调节原理已经有了一定的基础，现在要进一步掌握现代控制理论，主要是最佳控制与观测理论的基本原理和应用。现代控制理论所采用的数学工具主要是矩阵论，和概率论等方面的知识。可能有一些读者对于这些基本知识还不熟悉，这一章准备先作一扼要的介绍。为了突出最佳控制与观测的主题，本章不准备花费过多的篇幅。事实上这里只是一个有关正文数学基本知识的提要，并且不作推证。读者如果需要了解更多的话，可以查阅有关专著；而对于那些已经具备这方面数学知识的读者，这一章可以不阅读或者暂不阅读。

1-1　矩阵论

1.　矩阵和向量

一个 $m\times n$ 矩阵 A 是 mn 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 的集合体，写作 m 个行和 n 个列的阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})$$

一个 m 维的向量，或者更确切地说一个 m 维列向量是一个具有 1 列和 m 行的矩阵

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

一个 n 维行向量是具有 1 行和 n 列的矩阵。

2. 矩阵的相加、相减和标量与矩阵的相乘

两个矩阵具有相同行数和相同的列数才可以相加相减，或者分别用标量（一个数）相乘以后再相加相减，例如矩阵式

$$\mathbf{C}=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}=(c_{ij}) \tag{1—1}$$

定义为 $$c_{ij}=k_1a_{ij}+k_2b_{ij}$$

也就是两个矩阵相加就是相应元素的相加，从而矩阵加减是可交换的

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{1—2}$$

3. 矩阵与矩阵的相乘

考虑两个矩阵 A 和 B，A 是 $m\times p$ 矩阵，B 是 $p\times n$ 矩阵，即 A 的列数等于 B 的行数，则乘积 AB 是一个 $m\times n$ 矩阵，它定义为

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB} \tag{1—3}$$

即 $$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

例如 $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}$$

例如
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\5 & 2 & 10\\10 & 3 & 15\end{pmatrix}$$

例如
$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 21\\1 & 0\end{bmatrix}$$

由上面两个例子可以看到一般情况矩阵乘法是不能交换的，即 $AB \neq BA$，因此矩阵乘法必须保持矩阵的次序（左乘或者右乘）。

然而矩阵乘法是可结合的，即

$$D = ABC = (AB)C = A(BC) \tag{1—4}$$

$$(A+B)C = AC + BC \tag{1—5}$$

$$C(A+B) = CA + CB \tag{1—6}$$

一个 $p \times p$ 矩阵

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots\cdots & 0\\0 & 1 & \cdots\cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots\cdots & 1\end{pmatrix} \tag{1—7}$$

称作 p 阶单位阵，它有以下特性，当 A 为 $m \times p$ 矩阵时

$$AI = A \tag{1—8}$$

当 I 为 m 阶单位阵时

$$IA = A \tag{1—9}$$

当 A 和 B 是两个 $n \times n$ 的方阵， 则 AB 也是 $n \times n$ 方阵，并且可以证明

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \tag{1—10}$$

其中 $|\mathbf{A}|$ 是 $\mathbf{A}$ 的行列式。

4. 两个矩阵的直接和

令 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $m\times m$ 矩阵，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的直接合写作 $\mathbf{A}\dot{+}\mathbf{B}$，它是 $(n+m)\times(n+m)$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{1—11}$$

5. 转 置

假如 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\mathbf{A}$ 的转置写作 $\mathbf{A}'$，它是 $n\times m$ 矩阵，定义 $\mathbf{B}=\mathbf{A}'$，则

$$b_{ij} = a_{ji}$$

例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

可以证明以下几个重要关系

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \tag{1—12}$$

$$(\mathbf{ABC})' = \mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}' \tag{1—13}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \tag{1—14}$$

6. 奇异和非奇异方阵

假如 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 方阵，如果其行列式 $|\mathbf{A}|=0$ 则 $\mathbf{A}$ 是奇异的，反之是非奇异的。

7. 非奇异方阵的逆

令 A 是一方阵，假如 A 是非奇异的，那么存在一个唯一的矩阵 B 是 A 的逆，它有以下特性

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = I$$

A 的逆记作 $\mathbf{A}^{-1}$，可按以下程序计算求得：

① 构造方阵 A 的余因子及其方阵，余因子方阵的第 i 行 j 列的元素是一个矩阵的行列式，该矩阵是方阵 A 中排除 i 行 j 列后的矩阵，并且该元素再乘以 $(-1)^{i+j}$。

② 将上述余因子方阵转置，并称作伴随矩阵 $adj\mathbf{A}$。

③ 则 A 的逆等于

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \tag{1—15}$$

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$adj\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 17$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{adj\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}3 & 6 & -4\\ 7 & -3 & 2\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

可以证明

$$(\mathbf{A}^{-1})'=(\mathbf{A}')^{-1} \tag{1-16}$$

假如 $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ 是两个 $n\times n$ 非奇异方阵则

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^{-1}=(\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}) \tag{1-17}$$

8． 方阵的幂

设 m 为正整数，方阵 A 的 $\mathbf{A}^m$ 定义为 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$ 连乘 m 次，如果 m 为负整数，令 $m=-n$，这里 n 为正整数，则 $\mathbf{A}^m=(\mathbf{A}^{-1})^n$，进一步推论：

$\mathbf{A}^p\mathbf{A}^q=\mathbf{A}^{p+q}$，这里 p 和 q 是正的或者负的整数，此外 $(\mathbf{A}^p)^q=\mathbf{A}^{pq}$。

A 的多项式是一个矩阵，$p(\mathbf{A})=\sum_{i=0}^{r}a_i\mathbf{A}^i$，这里 a_i 是标量，任何两个同类矩阵多项式的乘积是可交换的，即 $p(\mathbf{A})q(\mathbf{A})=q(\mathbf{A})p(\mathbf{A})$，而且 $p(\mathbf{A})q^{-1}(\mathbf{A})=q^{-1}(\mathbf{A})p(\mathbf{A})$。

9． 方阵的指数函数

令 A 是一方阵，则可以构造下述无穷级数

$$I+\mathbf{A}+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3+\cdots\cdots$$

它是收敛的，因此可以定义方阵 A 的指数函数

$$e^{\mathbf{A}t}=I+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3+\cdots\cdots \tag{1-18}$$

因此 $e^{\mathbf{A}t}$ 是一个矩阵，它的展开式中的每一项都可以计算出来。

方阵指数有如下性质

$$e^{\mathbf{A}(t+\tau)}=e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau} \tag{1—19}$$

$$p(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}t}p(\mathbf{A}) \tag{1—20}$$

$$e^{-\mathbf{A}t}=(e^{\mathbf{A}t})^{-1} \tag{1—21}$$

注意，当 $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ 时

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}\neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$$

只有当 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ 时

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}=e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \tag{1—22}$$

10．矩阵的微分和积分

假如矩阵 $\mathbf{A}$ 的每一个元素 a_{ij} 是标量 t 的函数，则 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 就是由每个元素 a_{ij} 对 t 微分所组成的矩阵，记作

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right) \tag{1—23}$$

由此导出以下关系

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB})=\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}+\mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{1—24}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t})=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \tag{1—25}$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 的积分 $\int\mathbf{A}dt$ 就是每个元素 a_{ij} 对 t 积分所组

成的矩阵，记作

$$\int \mathbf{A}dt=\left(\int a_{ij}dt\right) \tag{1—26}$$

此外向量对标量的微分

$\frac{d\mathbf{X}}{dt}$是一个向量　　　　第 i 个元素是 $\frac{\partial x_i}{\partial t}$

标量对向量的微分

$\frac{dt}{d\mathbf{X}}$是一个向量　　　　第 i 个元素是$\frac{\partial t}{\partial x_i}$

标量对矩阵的微分

$\frac{dt}{d\mathbf{A}}$是一个矩阵　　　　第 ij 个元素是 $\frac{\partial t}{\partial a_{ij}}$

向量对向量的微分

$\frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{X}}$是一个矩阵　　　　第 ij 个元素是 $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$

11. 方阵的特征多项式和特征值

令 A 是 $n\times n$ 方阵，构造多项式 $|pI-\mathbf{A}|$，它就是方阵 A 的特征多项式，它是一个行列式，令它等于零，解之就可以求得的特征值 λ_i。

假如 A 的主对角线以外每一个元素都是零，则 A 是一对角线矩阵，可以记作

$$\mathbf{A}=diag[a_{11}\ \ a_{22}\cdots\cdots a_{nn}]$$

对角线上的元素仍然允许有 0 项，显然可以导出对角线上的元素就是方阵 A 的特征值。

还可以导出方阵 A 的行列式是所有特征值的乘积