经济应用数学丛书

线性代数

主编　陶长琪　刘晓青　钟友明

主审　王肇渝

华南理工大学出版社

经济应用数学丛书

线性代数

主编　陶长琪　刘晓青　钟友明
主审　王肇渝

华南理工大学出版社
·广州·

DV71/08

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陶长琪，刘晓青，钟友明主编.—广州：华南理工大学出版社，1998.7

ISBN 7-5623-1278-8

Ⅰ.线…

Ⅱ.①陶… ②刘… ③钟…

Ⅲ.线性代数

Ⅳ.O151

华南理工大学出版社出版发行

（广州五山　邮编 510641）

责任编辑　罗月花

各地新华书店经销

广州市新光明印刷厂印装

*

开本：850×1168　1/32　印张：12.25　字数：308千

1998年7月第1版　1998年7月第1次印刷

印数：1—4500册

定价：17.50元

前　言

本书是根据国家教委颁发的高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》大纲编写的．在编写过程中，我们遵循大纲的基本原则和指导思想，并根据编者多年教学实践的经验，注意到经济管理专业的特点，对内容精心选择，叙述上力求简明扼要，通俗易懂，便于学习者接受；内容上由浅人深，联系实际，兼顾发展，注意吸取本学科研究中的新成果，力求体现学科的系统性、科学性、实用性和先进性．本书可作为高等财经院校或理工院校经济管理专业的教材或教学参考用书，也可作为其他经济管理人员的自学用书．

本书由江西财经大学信息系组织教师编写．陶长琪、刘晓青、钟友明任主编，徐晔、刘满凤任副主编．陶长琪编写第一章、第二章第5节、第四章第1节以及自测题；刘晓青编写第三章；钟友明编写第二章第1～4节；徐晔编写第五章；刘满凤编写第四章第2～3节以及第六章．陶长琪对全书作了统一安排并最后修改定稿，王肇渝对全书进行了审定．

在本书的编写过程中，我们始终得到了江西财经大学信息系领导和同仁的支持，在此表示衷心感谢．

编　者

1998年1月

目　　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的基本概念，它是研究线性方程组解法和讨论矩阵性质的重要工具. 本章介绍的主要内容有：(1)逆序与行列式的定义；(2)用行列式性质求解行列式；(3)用克莱姆法则求线性方程组的解.

§1.1　排列与逆序

为了介绍 n 阶行列式定义，先学习排列与逆序的知识.

定义 1.1　把 n 个不同的元素排成一排，叫做这 n 个元素的全排列也叫做 n 元排列.

例如，1342 是一个四元排列，43521 是一个五元排列.

n 个不同元素的所有排列种数，通常用 p_n 表示，以下讨论 p_n 的计算公式.

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又以剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；……；直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法，于是

$$p_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3.2.1 = n!$$

例 1.1　由 1，2，3 三个自然数能组成多少三元排列？

解　我们知道 n 元排列总数为 $n!$，而此例中 n 为 3，故排列总数为 $3! = 6$，它们是：123，132，213，231，312，321.

从此例中可看出，除排列 123 中的各数是按自然顺序排列外，

在其他排列中都有较大的数排在较小的数前面，为此，有必要引入逆序和逆序数的概念.

定义 1.2 在一个 n 元排列中，若有一个较大数排列在一个较小数前面，就说这两个数构成一个逆序，一个 n 元排列中逆序的总数，称为它的逆序数.

一个 n 元排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)$.

按定义，一个 n 元排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 的逆序数计算方法是：先算出 j_n 前面比 j_n 大的数的个数 q_n，然后算出 j_{n-1} 前面比 j_{n-1} 大的数的个数 q_{n-1}，……，从后往前，用类似方法计算下去，直到算出 j_2 前面比 j_2 大的数的个数 q_2，这样就得到排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数 $q_n+q_{n-1}+\cdots+q_2$，即

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=q_n+q_{n-1}+\cdots+q_2$$

例 1.2 计算 4123 的逆序数.

解 由上述方法可得：$q_4=1$，$q_3=1$，$q_2=1$，故

$$\tau(4123)=1+1+1=3$$

例 1.3 计算排列 263145 的逆序数.

解 $q_6=1$，$q_5=1$，$q_4=3$，$q_3=1$，$q_2=0$，故

$$\tau(263145)=1+1+3+1+0=6$$

例 1.4 计算排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数.

解 $q_n=n-1$，$q_{n-1}=n-2$，…，$q_3=2$，$q_2=1$，故

$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots321)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

定义 1.3 逆序数为偶数或零的排列，称为偶排列；逆序数为奇数的排列，称为奇排列.

如：例 1.2 中的 4123 为奇排列，例 1.3 中的 263145 为偶排列.

定义 1.4 将一个排列中的某两个数的位置互换，其余数的

位置不变，这种变换称为对换.

如：排列 4123 中，将 1 和 2 互换，得一个新排列 4213，而 τ（4213）＝4，即排列 4213 为偶排列. 从此发现，对换对排列的奇偶性有影响，以下给出其有关定现.

定理 1.1 一个排列中任意两个元素对换，排列奇偶性改变.

证 先证相邻对换的情形. 设排列

$$\cdots ij \cdots \tag{1-1}$$

经过 ij 对换变成一新排列

$$\cdots ji \cdots \tag{1-2}$$

比较(1-1)与(1-2)可知：(1-1)与(1-2)两端的数相同，两数间没有逆序数变动，并且与 i，j 间也没有逆序数变动，故排列(1-1)与(1-2)逆序数的不同只取决于 i，j 的次序.

当 $i<j$ 时，排列(1-2)比排列(1-1)增加了一个逆序；当 $i>j$ 时，排列(1-2)比排列(1-1)减少了一个逆序. 总之，由排列(1-1)到排列(1-2)，逆序无论增加一个还是减少一个，都改变了原排列的奇偶性.

再证一般对换的情形. 设排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{1-3}$$

对换(1-3)中的 ij 两数得一新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1-4}$$

不难看出，上述时换可看成排列(1-3)经过若干次相邻两数对换所得到，即将排列(1-3)中的 i 与 k_1 对换，再与 k_2 对换……，直到与 k_s 对换得到排列

$$\cdots k_1k_2k_3\cdots k_sij\cdots \tag{1-5}$$

然后将排列(1-5)中的 j 与 i 对换，再与 k_s 对换……，直到与 k_1 对换得到排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1-4}$$

我们知道，由排列(1-3)到排列(1-5)经过 s 次相邻两数对换，

由排列(1-5)到排列(1-4)经过 $s+1$ 次相邻两数对换，故排列(1-3)经过总共 $2s+1$ 次即奇数次相邻两数对换得到排列(1-4)，因一次相邻两数对换改变排列的奇偶性，因此排列(1-3)与(1-4)的奇偶性必然相反，即原排列的奇偶性改变了.

定理 1.2 所有 $n!$ 个 n 元排列中($n\geqslant 2$)，奇偶排列各占一半，均为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证 假若有 m 个奇排列，k 个偶排列，则 $m+k=n!$. 任取一个奇排列 A：$j_1j_2\cdots j_n$，由定理 1.1，把 j_1 与 j_2 互换所得排列 B：$j_2j_1\cdots j_n$ 是一个偶排列. 因此，用这种方法，每一个奇排列对应一个偶排列，而且，不同的奇排列不能对应相同偶排列，故奇排列的个数不会大于偶排列的个数，即 $m\leqslant k$，同理可证 $k\leqslant m$，故 $k=m=\frac{n!}{2}$.

例 1.5 由 1，2，3 三个数组成的排列中，哪些为奇排列，哪些为偶排列？

解 $\tau(132)=1+0=1$，$\tau(213)=0+1=1$，$\tau(321)=2+1=3$ 故奇排列为 132，213，321.

$\tau(123)=0+0=0$，$\tau(231)=2+0=2$，$\tau(312)=1+1=2$ 故偶排列为 123，231，312.

习题 1.1

1. 求下列排列的逆序数：

(1) 365142

(2) 518324967

(3) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$

(4) $(2n)(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots(n-1)n$

2. 求 i，j 使：(1)$25i4j1$ 为偶排列；(2)$8i351j27$ 为奇排列.

3. 若 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 s，则排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数为多少？

§1.2 二阶与三阶行列式

为了引入 n 阶行列式定义，先从二、三阶行列式展开着手，研究其展开的结构规律，然后推广到 n 阶行列式.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-6}$$

对(1-6)用加减消元法计算，若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则得该方程的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-6$'$}$$

这就是二元线性方程组(1-6)的求解公式，但记忆很不方便，因而有必要引进新的符号来表示这个结果，这就是行列式的起源. 令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

此式叫做二阶行列式，则式(1-6)$'$就可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

二阶行列式含有两行、两列，横写的称行，竖写的称列. 行

列式中的数又叫做行列式的元，a_{ij}就是第 i 行第 j 列上的元. 二阶行列式是这样两项的代数和：一项是从左上角到右下角的对角线(又称为行列式的主对角线)上两个元的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线(又称为行列式的次对角线)上两个元的乘积，取负号. 代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为二阶行列式的展开式，其实质是一个数，称为行列式的值. 展开式中的两项可用“对角线法则”来记忆(如图 1-1)，实线连结的两个元素的乘积取正号，虚线连结的两个元素的乘积取负号.

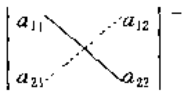

图 1-1

这样，当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组(1-6)的解记为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

其中 D 称为方程组(1-6)的系数行列式，而 D_1、D_2 分别为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

D_1 是用方程组(1-6)中的常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 而得，D_2 是用方程组(1-6)中的常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22}而得到.

例 1.6 解线性方程组

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\times(-1)-2\times 2=-5\neq 0$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}10 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}=10\times(-1)-2\times 5=-20$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 10\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\times 5-2\times 10=-15$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=4 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=3 \end{cases}$$

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-7}$$

用消元法求解，当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}$$

上式就是三元线性方程组的求解公式，为方便记忆，令

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式,其值为一个数.它的展开式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 中的 6 项可按 "对角线法则" 来记忆(如图 1-2),实线上三个元素相乘取正号,虚线上的三个元素相乘取负号.

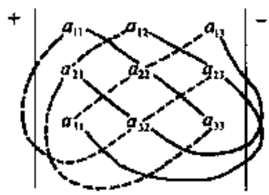

图 1-2

所以　当 $D\neq 0$ 时,方程组(1-7)的解可记为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1-7)的系数行列式,它是由方程组(1-7)未知数的系

数按原来位置排成的，且

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

D_1、D_2、D_3 是用方程组(1-7)中的常数项 b_1、b_2、b_3 分别代替 D 中的 x_1、x_2、x_3 的系数所构成的行列式.

例 1.7 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1 \\ -3x_1+x_2+5x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=2 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\times1\times1+(-3)\times(-1)\times1+1\times(-4)\times5-1\times1\times1-5\times(-1)\times2-1\times(-4)\times(-3)$$

$$=-18\neq0$$

且

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-36$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-18$$