主从递阶决策论

——STACKELBERG问题

盛昭瀚 著

科学出版社

主从递阶决策论

——Stackelberg问题

盛昭瀚　著

国家自然科学基金资助项目

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书以具有递阶结构，即有层次特点的决策系统为背景，从实用的角度向读者介绍包含单目标与多目标、同级决策者之间有关联与无关联等多种决策问题的算法．除了各种以经典的决策分析为基础的算法外，本书还较为系统地介绍了人工神经网络理论在主从递阶决策问题中的应用，具有整变量主从递阶决策问题以及具有主从结构的非光滑决策等前沿问题．

本书可作为理、工、管理等有关专业的大学生和研究生的教材，也可供从事最优化研究的人员、有关部门的决策者和管理者、经济工作者以及广大工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

主从递阶决策论——Stackelberg 问题/盛昭瀚著．-北京：科学出版社，1998.9

ISBN 7-03-006080-6

Ⅰ．主… Ⅱ．盛…Ⅲ．决策论 Ⅳ．O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 10032 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年9月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1998年9月第一次印刷 印张：14 1/8

印数：1—1 300 字数：370 000

定 价：28.00元

（如有缺页倒装，本社负责掉换。〈科印〉）

前　言

“决策”作为一门学科被人们承认，只是近几十年的事．但现在它已成为系统科学和管理科学的重要分支．管理科学的学者甚至认为，在一定意义下，“决策”与“管理”是同义词．

随着人类社会的发展，实际问题规模越来越大，结构越来越复杂，涉及到对问题作出决策的人越来越多，而且这些决策者各自处于不同的层次上．一般地，高一级决策机构(者)自上而下地对下一级若干决策机构(者)行使某种控制、引导权，而下一级决策机构(者)在这一前提下，亦可以在其管理范围内行使一定的决策权，虽然这种决策权比较起来处于从属的地位．另外，在这种多层次决策系统中，每一级都有自身的目标函数，而越高层机构的目标越重要，越权威，越具全局性，因此最终的决策结果往往是寻求使各层决策机构之间达到某种协调的方案，在这一方案下，既可使最高层决策机构的目标达到“最优”，也可使作为上级决策的“约束”的较低层决策机构的目标在从属位置上相应达到“最优”，即下层决策以上层决策变量为参数，我们称具有以上基本特征的决策问题为主从递阶决策问题．

主从递阶决策问题有着广泛的实际背景．例如制订国民经济发展规划，中央决策层从全国考虑，设立若干经济发展指标，并将有关决策宣布给各省、市，各省、市决策层从自身的条件和利益出发，根据自身的权限，亦对本省、市的经济发展制订出多个指标，并各自对中央决策层的决策作出“最优”反应．由于中央决策层具有更大的权力，它可以通过各种直接与间接的控制与协调手段来“修正”各省、市的决策，最终得到一个既充分体现中央利益，又充分体现各省、市利益的上、下均认为“好”的决策方案．当然，在整个决策过程中，中央利益自始至终都处于主导地位，而各省、市利益相

对于中央而言处于从属地位，也就是说．在整个决策过程中，以实现中央各经济指标的最优为前提．

概括地说，这一类决策问题的主要特征表现为：

(1) 有多个相对独立的决策者参与决策，并有各自的目标函数与决策变量；

(2) 某个决策者或某些决策者的决策将影响到其它的某个决策者或某些决策者的决策；

(3) 整个决策系统呈分散递阶层次结构，不同层次上的决策者有不同的权力、利益，居于较高层次的决策者具有较大的权力；

(4) 由各决策者共同作出的最后决策应当是各决策者均可接受的满意决策．

具有主从递阶结构的决策问题最初是由 Von Stackelberg 于 1952 年在研究市场经济问题时提出的．因此，主从递阶决策问题亦称 Stackelberg 问题．这方面的早期工作主要是从对策论的角度出发，对静态和动态 Stackelberg 对策问题加以研究，代表性的学者有 Chen，Cruz 和 Simann 等，而 Castanon、Athans、何毓琦、Lun 和 Olsder 等人则将这一基本问题向更广的领域延拓．

随着各种颇具特色的研究成果逐渐增多，Stackelberg 决策问题受到人们越来越多的关注，人们一方面逐步认识到这一问题的重要意义，另一方面也迫切感到对这类问题特别是对有约束的 Stackelberg 问题需寻求有效的求解技术，于是，自 70 年代以来，以蓬勃发展的数学规划理论和方法为基础，通过建立多级数学规划模型来研究 Stackelberg 问题．

多级数学规划问题，最早是由 Bracken 和 McGill 于 1973 年在研究一类约束中包括子优化问题的数学规划时提出的，这类问题的一般模型可分为上、下两层．上层是一个含有下层最优决策变量(最优目标函数值)的复合最优化问题，而下层则是一个以上层决策变量为参数的参数规划．Bracren，Falk，McGill，Aiyoshi，Shimizv 和 Bard 等人分别从不同的角度对这类问题的求解方法进行研究和探讨．

同时，人们发现，静态 Stackelberg 问题可以归纳为一类多级数学规划问题，这就为利用数学规划这一有力工具来研究主从递阶决策问题提供了新的途径和方法．Aiyoshi，Shimizv，Anandalingam 和 White 自 80 年代中期以来，先后利用多级数学规划方法对单目标非线性与线性有约束 Stackelberg 问题的罚函数求解方法进行了研究，随着研究的不断深入，这一技术路线已成为主从递阶决策问题研究中的一个重要分支．反之，以 Stackelberg 问题为基本背景的多级数学规划理论和方法也已成为运筹学或优化理论中的一个重要分支．

作者从 80 年代中期开始关注这一领域的研究．记得第一篇有关的论文是《具有主-从策略的多级规划问题的稳定性及优化算法》(见文献[80])，尔后，作者继续在这一领域内开展工作，主要包括：

第一，通过国家自然科学基金项目和省、市科委的科研课题从事主从递阶决策问题的理论和应用方面的研究．

第二，通过上述项目与课题持续培养了一批博士研究生，他们不懈地有继承性地坚持了主从递阶决策问题求解技术的研究，这些同志包括梁梁、夏洪胜、吕庆喆、朱乔等．另外，作者所在单位培养的博士仲伟俊、倪明放、沈厚才等也不同程度地从事了主从递阶决策问题的研究．

我们的工作着重于决策方法的探讨，在前一段时间，以一般意义下的数值方法为主，后来，还注意到基于人工智能的决策方法的研究，如人工神经网络算法、波尔兹曼机算法等．在决策模型方面，我们作了拓广，除了较多地考虑了非线性构成函数的模型外，还研究了下层多个决策者之间有关联的情况以及含整数决策变量情况．

此外，必须指出的是，近年来国内一些高等院校也有一些青年学者从事主从递阶决策问题的研究，如武汉水利电力大学的王先甲、天津大学的杜纲等，其中王先甲较集中地研究了二层系统决策最优化的基本理论问题，而杜纲则在非光滑 Stackelberg 问题方面

做了较系统和较严谨的研究工作,本书第九章主要介绍了这方面的成果.

本书可以认为是作者以及学术梯队近10年来在主从递阶决策问题研究工作的总结(也包括其它单位学者的部分工作). 在内容上,主要是将这些年来我们在这一领域内数十篇论文系统化,在全书的编排上,主要以决策模型的复杂程度为序,在准备知识和基本概况之后,第三章介绍了线性主从递阶决策问题,第四、五章则以两类非线性单目标模型为主,第六、七章从单目标问题过渡到多目标问题,第八章则将决策变量扩充到含整数变量情形,第九章集中讨论了非光滑决策问题,第十章对Stackelberg问题作了基本的理论分析,相对于前面各章介绍的数值求解技术,最后一章则侧重于Stackelberg问题的理论分析. 这种模块式的安排,便于读者阅读时独立挑选内容和有关重点.

本书在写作过程中得到吕庆喆博士、梁梁博士、仲伟俊博士、沈厚才博士、杜纲博士等的帮助,在此,作者对他们表示诚挚的谢意.

主从递阶决策问题是一个内容相当丰富,研究难度较大的问题,许多基本理论研究与求解技术正在不断发展之中. 虽说我们近年来在这一领域内作了一些探索,但毕竟只是一些粗浅体会,许多方法还有待于进一步改进和完善. 本书出版,只期抛砖引玉,由于笔者水平有限,谬误和不妥之处在所难免,尚祈专家、读者不吝指正.

本书中部分工作得到国家自然科学基金的资助(79270051:多层多目标广义决策模型与智能化算法的研究).

目　录

第一章　单层多目标决策问题

一般的单层多目标决策问题为

$$\begin{aligned}\max\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x}))\}\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in X=\{\boldsymbol{x}\mid g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0,i=1,\cdots,k\}\end{aligned}\tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 称为**决策变量**,$X\subseteq R^n$ 称为**决策空间**或 $\boldsymbol{x}$ 的**可行域**,$f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})$称为问题的第 1,……,第 p 个**目标函数**,$g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 则称为问题的第 i 个**约束条件**.

问题(1.1)可用如下的向量形式简记为(VP),即

$$V\text{-}\max_{x\in X}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\tag{1.2}$$

对于问题(1.1)(或(1.2)),有以下一些基本概念:

定义 1.1　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$,若对任意的 $\boldsymbol{x}\in X$,均有

$$f_j(\boldsymbol{x})\leqslant f_j(\bar{\boldsymbol{x}}),\qquad j=1,\cdots,p$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(VP)的**绝对最优解**.

定义 1.2　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$,若不存在 $\boldsymbol{x}\in X$,使得

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是多目标决策问题(VP)的**有效解(非劣解,Pareto 解)**.

定义 1.3　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$,若不存在 $\boldsymbol{x}\in X$,使得

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为多目标决策问题(VP)的**弱有效解**(或**弱非劣解**、**弱 Pareto 解**).

注　向量不等式的符号约定为,设

$$\boldsymbol{F}^1=(f_1^1,f_2^1,\cdots,f_p^1)$$

$$F^2=(f_1^2, f_2^2, \cdots, f_p^2)$$

(i)$F^1 < F^2$ 当且仅当 $f_j^1 < f_j^2$ 对所有的 $j=1,2,\cdots,p$.

(ii)$F^1 \leqq F^2$ 当且仅当 $f_j^1 \leqslant f_j^2$ 对所有的 $j=1,2,\cdots,p$ 成立.

(iii)$F^1 \leqslant F^2$ 当且仅当 $F^1 \leqq F^2$ 但 $F^1 \neq F^2$,即 F^1 的每个分量都小于或等于 F^2 的相应分量,且至少有一个 F^1 的分量严格小于 F^2 的相应分量.

显然,寻求非劣解是多目标决策问题的重点,但是,由于非劣解往往不是唯一的,如何从中确定最终的决策方案,这在很大程度上取决于对某个非劣解的偏好.因此,对多目标决策问题算法的研究与分类,也常常与决策人提供偏好信息的方式有关.例如可简单地依据在求解多目标决策问题过程中,在优化之前(事先宣布偏好)、在优化之中(逐步宣布偏好)、在优化之后(事后宣布偏好)获取决策人的偏好信息来分类.

§1.1 事先宣布偏好信息的问题

§1.1.1 直接估计决策者效用函数的算法

众所周知,在任何决策问题中,都直接或间接地包含着能够对不同方案进行比较确定相对优劣的序列关系,对于多目标决策问题,则需在了解决策者偏好的基础上建立某种序列关系,并将其直接地表示出来.这种建立在可行域上可以对两两方案之间进行比较的序列关系的形式,称为**偏好结构**,能够表示决策者偏好结构的即能够与某一个偏好次序相对应的实函数,称为**效用函数**.显然,对一个多目标决策问题,一旦确定了这种效用函数,问题的最终方案也就容易确定了.

具体地说,如果决策人给出他的效用函数 u,则问题(1.1)可改变为一个新的决策问题,即

$$\max u(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_p(\boldsymbol{x})) \quad (1.3)$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{x} \in X$$

这是一个纯量函数的优化问题．事实上，问题(1.3)包含了两次映射：第一次从决策空间映射到目标空间，第二次从目标空间映射到效用空间．求解问题(1.3)是在可行域 X 中寻求一可行解，使对应的效用函数值最大，这个解称为**最优调和解**．不难看出，一旦给定效用函数，优化是容易解决的．

一、效用函数的一般拟合

本段先简要介绍效用函数的一般概念，并以拟合为主要手段介绍对效用函数的数值估计方法．

一般地，令 $X\subseteq R^n$，$\geqslant$是 X 上的一个弱序，并假设

(i) 对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$，若 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}$ 则意味着 $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}$，

(ii)对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in X$，如 $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}>\boldsymbol{z}$，必存在 $\lambda\in(0,1)$，使 $\boldsymbol{y}\sim\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{z}$ 成立，则存在定义在 X 上的实值函数 u，使对 X 中的任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，有

$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y} \text{ 当且仅当 } u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})$$

或更确切地说，有

$$\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y} \text{ 当且仅当 } u(\boldsymbol{x})>u(\boldsymbol{y})$$
$$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y} \text{ 当且仅当 } u(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{y})$$

一般，常见的效用函数形式有

(1) $$u(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}k_i u_i(x_i) \qquad \text{(加性形式)} \qquad (1.4)$$

(2) $$u(\boldsymbol{x})=k\prod_{i=1}^{n}u_i(x_i) \qquad \text{(乘性形式)} \qquad (1.5)$$

若决策者的偏好能定量化且可度量，则他的偏好可以通过上述效用函数来描述．一般地，在确定了一个决策问题的属性集和方案集之后，可分五步完成对效用函数的估计：

第一步　验证效用函数的存在性；

第二步　选择效用函数的适合形式；

第三步 拟合单属性效用函数；

第四步 确定适合的标度系数；

第五步 检查一致性，完成效用函数的估计．

具体地说，

第一步 对一个多属性决策问题，在一定条件下，效用函数是存在的，并且能精确地描述决策者的偏好结构，但是检验这些条件是困难的，因此在一般情况下，都假定效用函数是存在的．

第二步 在证实效用函数的存在性之后，就要根据偏好独立性等条件来确定效用函数的具体形式，如加性形式、乘法形式等，一般地说，为了便于估计效用函数，常把效用函数规定为可分解的加性或乘性形式．

第三步 若效用函数可分解，可以先个别构造单属性效用函数，然后再将它们“组装”成完整的效用函数．

单属性效用函数的确定主要有两种方法：一种是直接分等法，另一种是中位点法．

直接分等法是最简单的方法，它直接要求决策人估计每个 f_i 对应的效用 $u_i(f_i)$的值，这种方法适合于 f_i 是离散的且包含元素较少的情况，该方法步骤如下：

1° 确定属性 f_i 的上、下限，如记为 a_i 与 $b_i(a_i<b_i)$.

2° 决策者用 0—1 或 0—100 来表示他的偏好区间，具体地说，0 表示最不偏好，1(100)表示最偏好．

3° 在 a_i 与 b_i 之间选择若干点，并估计这些点所对应的 $u_i(f_i)$的值，将这些点作曲线拟合，即为单属性 f_i 的效用函数．

中位点法是常用的一种估计方法，它可用于属性连续取值的情况，并且不须对效用函数的分解形式有具体的要求，该方法要求决策者给出 f_i 两个给定值的中位点对应的偏好值，具体步骤如下：

1° 将所有别的属性固定在一给定值上，确定第 i 个属性取值的上限 b_i 和下限 a_i，设决策者对第 i 个属性的偏好是其值越大越好，令 $v_i(a_i)=0, v_i(b_i)=1$.

2° 要求决策者在 a_i 和 b_i 之间找到一点 x_i'，决策者认为当属性值由 a_i 到 x_i' 和由 x_i' 到 b_i 所引起的价值变化是无差异的．显然，$x_i^{0.5}=x_i'$，也即

$$v_i(x_i^{0.5})=\frac{1}{2}[v_i(a_i)+v_i(b_i)]=0.5$$

3° 重复 2°分别找出 a_i 和 $x_i^{0.5}$ 以及 $x_i^{0.5}$ 和 b_i 的中位点，分别用 $x_i^{0.25}$ 和 $x_i^{0.75}$ 表示．

4° 为保证一致性，用下式检查 $x^{0.5}$是否是 $x^{0.25}$和 $x^{0.75}$的中位点

$$u_i(x_i^{0.5})=\frac{1}{2}[u_i(x_i^{0.25})+u_i(x_i^{0.75})]$$

5° 重复 2°—4°，产生足够多的点以便拟合一条单属性效用函数．

不难看出，直接分等法要求决策者提供的是 f_i 某些具体点的 $u_i(f_i)$的值，而中位点法则要求决策者提供的是 $u_i(x_i)$的某些值对应的 f_i 的值．

第四步 若效用函数形式与单属性效用函数均已确定，则需要确定 $k_i(i=1,\cdots,n)$（对加性形式而言）或 k（对乘性形式而言）即所谓**标度系数**．

确定标度系数的基本思想是通过提取决策者的偏好信息建立一组相互独立的方程，方程的个数与标度系数的个数相同，然后通过解这组方程来确定标度系数．下面介绍一种比较一般的方法：

先假定每个属性 f_i 其上限为 b_i，下限为 a_i，并假定对任意的 i，随着 f_i 增加偏好增加．设有 r 个待估计的标度系数，最一般的（不一定最简单）建立 r 个方程的方法是要求决策者找出 r 对无差异的后果$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}^1),(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2),\cdots,(\boldsymbol{x}^r,\boldsymbol{y}^r)$，且 $a_i\leqslant x_i^l\leqslant b_i$，$a_i\leqslant y_i^l\leqslant b_i$，$l=1,\cdots,r$，$i=1,\cdots,n$，由此产生下列 r 个方程：

$$v(\boldsymbol{x}^l)=v(\boldsymbol{y}^l),\qquad l=1,\cdots,r$$

如果这 r 个方程相互独立，通过求解该方程组即可求出 r 个标度系数的值．

第五步 由于价值函数是决策者偏好结构的模型，它将用于最终的决策分析，在使用它之前做仔细的检验，确定它是否比较精确地描述了决策者的偏好，是非常重要的．进行一致性检验，先选取适当数量的有代表性的候选方案，然后要求决策者对它们做出比较，并排出它们的优劣次序，再求出这些方案的价值函数的值，如果价值函数值的大小顺序与决策者排出的方案的优劣顺序相一致，说明一致性成立，价值函数是可以接受的．反之，须返回做进一步的修改．

二、效用函数的神经网络估计方法

为完整起见，本节研究如下的问题

$$\begin{aligned} &\max\{f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_N(\boldsymbol{x})\} \\ &\quad \text{s.t. } \boldsymbol{x}\in X=\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

并且给出

定义 1.4 若对所有非劣解 $\boldsymbol{x}\in X$，有 $x^*\geqslant \boldsymbol{x}$，则称 $\boldsymbol{x}^*$ 为决策人的**满意解**，其中$\geqslant$为决策人给出的偏好序关系．

多目标决策问题的核心问题就是要求出(1.6)式的满意解，由上述定义不难看出，满意解与非劣解之间存在如下关系：

(i) 满意解一定为非劣解．

(ii) 非劣解集中的任何一个非劣解是否为满意解，得由决策者给定的偏好来决定．

(iii) 具有不同偏好的决策者可能选择不同的非劣解作为各自的满意解．

如前所述，在多目标理论中，根据决策者的偏好信息把问题(1.6)变成如下的由效用函数 $u(f_1,\cdots,f_p)$构造的单目标问题

$$\begin{aligned} &\max\ u(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_N(\boldsymbol{x})) \\ &\quad \text{s.t. } \boldsymbol{x}\in X \end{aligned} \tag{1.7}$$

是一类重要和常用的方法．事实上，这里效用函数本身就是决策者偏好的一种表示方法，决策者正是通过它来评价解的优劣．但是，在这类方法中，经常会遇到无法给出恰当的显式效用函数的情况，这就要求我们研究如何向决策者获取其隐性多属性效用函数的问题，并且在隐性前提下，求解(1.7)．

针对这一问题，本节将BP神经网络与Hopfield神经网络的基本功能联系在一起，并以此联系为基础，介绍一种解决上述问题进而可以处理较一般的多目标决策问题的算法．

这一算法的基本思想是：

(i) 应用BP网络具有的学习功能，通过“学习”使分析者从决策者那儿获取必要的偏好信息，并由此得到关于决策者多属性效用函数的隐性估计．

(ii) 在(i)的基础上，运用Hopfield网络求解(1.7)，这里由于针对了效用函数的隐性特点并结合Hopfied网络所具有的基本功能，因此克服了一般解析算法的困难，而使优化过程在数值意义下具有可操作性．

三、决策者效用函数的神经网络估计方法

众所周知，BP神经网络可映射任意复杂的非线性关系并具有记忆的特点，通过学习一些样本后，它能将样本的特征存贮起来，因此，当学习完成后，在测试过程中它接受刺激后，其输出值就能反映出它在学习过程中总结出来的规律．这里就是利用BP神经网络，经过训练学习后来获得决策人的偏好信息即效用函数．

下面介绍多属性效用函数的BP网络实现，此过程分为三个阶段：

(1) 预加工阶段

这一阶段主要目的是确定训练集合Strn，可按以下步骤来做：

(i) 对问题(1.6)，分别用Hopfield网络求出

$$\overline{f}_i=\max_{x\in X}f_i(\boldsymbol{x}),\qquad \underline{f}_i=\min_{x\in X}f_i(\boldsymbol{x}),\qquad i=1,\cdots,N$$