抽象调和分析基础

G· 巴赫曼 著
郭毓驹　欧阳光中 译

人民教育出版社

抽象调和分析基础

G·巴赫曼 著

郭鏡駒　欧阳光中 译

人民教育出版社

抽象调和分析基础

G· 巴赫曼 著

郭毓騊　欧阳光中 译

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 7.625　字数182,000
1979年 5 月第 1 版　1979年12月第 1 次印刷
印数00,001—12,000
书号 13012·0351　定价 0.56 元

前言

抽象调和分析是现代分析的一个活跃的分支，把它作为研究生一年级的一门标准课程的重要性正在增加．本书打算介绍一些出现在目前的许多论文中的概念，如 Banach 代数、Haar 测度、局部紧交换群等，以及含有这些概念的基本定理，从而能够使学生较快地接触有关文献．

为了相当完备地和自成体系地讲述本书的主题，我们详细地给出了绝大部分的证明，从而使得广大的读者能够了解本书内容的展开．每一章末都配有习题，其中一些是打算稍为拓广书中的理论，另一些则是用来检查读者对所学内容的理解．

第一章和第二章的一部分简略地回顾了古典 Fourier 分析，并提出一些概念，这些概念在后面将被拓广为抽象的形式．介绍这些材料并不是要详细讨论，而主要地是为本书后面获得的拓广作启发．以后的五章介绍了交换 Banach 代数，一般拓扑空间和拓扑群．我们希望第二——六章，除了作为抽象调和分析所必需的材料之外，也可以给那些主要兴趣在于交换 Banach 代数的学生作为适当的入门材料．最后的几章包含着测度论的一些材料，其中包括 Haar 积分，并把最初两章的概念拓广为局部紧拓扑交换群上的 Fourier 分析．

为了使本书尽可能地成为一本自成体系的和介绍性的著作，我们觉得从许多概念——特别是从一般拓扑空间出发是适当的．然而，由于篇幅所限，就不可能在其他背景材料上花功夫——特别是测度理论和来自泛函分析的一些事实．但是所必需的这些领域的材料都已列在有关各章的附录中了．

目前已有许多关于抽象调和分析的更进一步的书籍．我们特

别引用 Rudin 和 Loomis 的两本书以及 Hewitt 与 Ross 合写的新书作为参考. 我们对第十二章后半部分的处理方法在某种程度上是循着 Rudin 书的第一章. 对于要继续深造的读者来说, Rudin 的书是一本非常好的续篇.

本书是在 1963 年夏天在 Brooklyn 工艺学院所教的一学期的抽象调和分析课程的基础上编写的, 讲义是由 Lawrence Narici 写的, 我曾做少许修改和补充.

我要对 Narici 先生表示诚挚的感谢, 他在写讲义, 改进许多证明和编辑全部原稿方面尽了他的努力. 最后, 还要对 Melvin Maron 表示我的谢意, 他帮助我准备了原稿.

G. Bachman.

目　录

第一章 L_1中函数在实直线上的 Fourier 变换

引 言

本章将专门叙述实直线上的 Fourier 分析. 在本章中将要引入卷积的概念,还要推导函数与它们的 Fourier 变换之间的关系. 这些内容主要依赖于实变函数论的思想(例如, Lebesgue 积分号下取极限和累次积分中交换积分次序). 在本章末的附录中列出了本章所广泛使用过的一些定理.

记 号

今后,我们将用R表示实轴$(-\infty,\infty)$,用f表示R上的可测函数(f可以是实值函数或复值函数). 并用L_p表示R上可测且具有性质*)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx<\infty, \quad 1\leqslant p<\infty$$

的函数f所组成的集合. 又因为我们经常是从$-\infty$到$+\infty$进行积分,所以就简单地以$\int$来表示$\int_{-\infty}^{\infty}$,其中一切积分都是 Lebesgue 意义下的积分.

这里不加证明而指出,L_p空间是一个线性空间,对于$f\in L_p$,我们就能够定义f关于p的范数$\|f\|_p$如下:

---

*) 我们常称f是p次可和的.

$$\|f\|_p=\left(\int|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

容易验证下面的断言是正确的：

1. $\|f\|_p\geqslant 0$. 以及 $\|f\|_p=0$ 当且仅当 $f\sim 0$*).

2. $\|kf\|_p=|k|\cdot\|f\|_p$，其中 k 是一个实数或复数. 这直接含有 $\|f\|_p=\|-f\|_p$.

3. $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$. 要证实这一点，所需要的只是关于积分的 Minkowski 不等式，这已列在本章的附录中.

这样，我们就看到，L_p 是一个赋范线性空间. 我们还能够更前进一步，虽然这里不加以证明，但可以证明 L_p 实际上是一个完备的赋范线性空间或 **Banach 空间**，即可证明(在关于 p 的范数下) L_p 中函数的任一 Cauchy 序列（关于 p 的范数）收敛于一个 p 次可和的函数.

Fourier 变换

在这一节中，我们考虑 L_1 中函数的 Fourier 变换，并指出 Fourier 变换的一些性质. 设 $f\in L_1$，考察 f 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(x)=\int e^{ixt}f(t)dt.$$

因为 $f\in L_1$，我们首先注意到 $\hat{f}(x)$是存在的，这是由于

$$|\hat{f}(x)|\leqslant\int|f(t)|dt<\infty$$

的缘故. 此外，又因为

$$\int|f(t)|dt=\|f\|_1,$$

*) 两个函数 f 和 g，如果 $f=g$ 几乎处处成立，我们就说 f 与 g 是等价的，记为 $f\sim g$. 因之，L_p 实际上是在这种等价关系下一切等价函数类所成的集合。若我们不这样做的话，那末 $\|\,\|_p$ 只表示一个半范，这是因为虽然 f 不是零，而 $\|f\|_p=0$ 却是可能的.

故对任何 x，有

$$|\hat{f}(x)|\leqslant\|f\|_1;$$

即 f 的 1-范数是 f 的 Fourier 变换的一个上界．因为它是一个上界，它一定大于或等于上确界，即

$$\sup_{x\in R}|\hat{f}(x)|\leqslant\|f\|_1.$$

现在我们证明 f 的 Fourier 变换是 x 的一个连续函数．考虑差式

$$\hat{f}(x+h_n)-\hat{f}(x)=\int e^{ixt}(e^{ih_nt}-1)f(t)dt,$$

这里 $h_n\in R$,

$$|\hat{f}(x+h_n)-\hat{f}(x)|\leqslant\int|e^{ih_nt}-1||f(t)|dt.$$

因为上式对任何 h_n 成立，故当 h_n 趋于 0 时也成立，这样就有

$$\lim_{h_n\to0}|\hat{f}(x+h_n)-\hat{f}(x)|\leqslant\lim_{h_n\to0}\int|e^{ih_nt}-1||f(t)|dt.$$

现在，我们希望在积分号下进行极限运算，由于被积函数是受可和函数 $2|f(t)|$ 所控制，故 Lebesgue 的控制收敛定理保证了这种运算(见第一章附录)．在积分号内取极限就得所要结果；即

$$\lim_{h_n\to0}\hat{f}(x+h_n)=\hat{f}(x),$$

也即 L_1 中函数 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 是一个连续函数．

关于 $\hat{f}(x)$ 还可以证明

$$\lim_{x\to\pm\infty}\hat{f}(x)=0. \tag{1}$$

这一事实通常称为 Riemann-Lebesgue 引理．我们顺便提一下：确有这样的连续函数 $F(x)$，它满足(1)，但不能找到 $f(x)$满足

$$F(x)=\int e^{ixt}f(t)dt.$$

这就给我们带来下面的问题：知道 $\hat{f}(x)$，如何能够再找出由之而来的原函数 $f(t)$？

复　原

在初等的处理中，我们常常看到下面的反演公式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ixt}\hat{f}(x)dx.$$

现在，我们用一个反例来证明上面的公式一般说来是不成立的.

例　考虑函数

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

$$\hat{f}(x)=\int_0^{\infty}e^{(ix-1)t}dt=\frac{-1}{ix-1}.$$

因为

$$\int|e^{-ixt}\hat{f}(x)|\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

故利用前面的公式来复原 $f(t)$ 显然是不可能的，这是由于对充分大的 x，被积函数 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 的性能相似于 $\frac{1}{x}$，积分将如 $\log x$ 一样变成无穷，因此，我们不能利用前面公式来复原（注意：Lebesgue 积分收敛就必须绝对收敛）.

在更进一步讨论之前，我们需要两个来自实变函数的结果：

定义　若

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|f(t)-f(x)|dx=0,$$

就称 t 为函数 f 的一个 **Lebesgue 点**.

定理　若 $f\in L_1$，则几乎所有的点都是 Lebesgue 点.

定理　函数的每一个连续点都是 Lebesgue 点.

下面两个关于反演的定理，其证明较长并较复杂，请读者参看

Goldberg[2] 的证明。

定理 1 设 $f, \hat{f} \in L_1$，又假定 f 在 t 点连续，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ixt}\hat{f}(x)dx.$$

定理 2 设 $f\in L_1$，又设 t 是函数 f 的一个 Lebesgue 点，则

$$f(t)=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{|x|}{\alpha}\right)e^{-ixt}\hat{f}(x)dx.$$

（注意：这一极限过程类似于无穷级数的$(C,1)$求和法）。

系 1 设 $f\in L_1$ 并且 $\hat{f}(x)=0$ 对一切 x 成立，则 $f(t)=0$, a.e.(*)

系 2 设 $f_1, f_2\in L_1$。若 $\hat{f}_1=\hat{f}_2$，则 $f_1(t)=f_2(t)$, a.e.
这个结果从系 1 立即得出，因为我们有

$$\widehat{f_1-f_2}=\hat{f}_1-\hat{f}_2=0,$$

因此

$$f_1-f_2=0,\ \text{a.e.}$$

卷积 设 $f, g\in L_1$，考虑函数

$$h(x)=\int f(x-t)g(t)dt=(f*g)(x),$$

称它为 f 与 g 的**卷积**．现在，我们断言 $h(x)$ 对几乎所有的 x 存在，并且 $h(x)$ 是可和的．

证 作变量变换容易证明：

$$\int f(x-t)dx=\int f(x)dx. \tag{2}$$

利用(2)，考虑

$$\int dt\int|f(x-t)g(t)|dx=\int|g(t)|dt\int|f(x-t)|dx$$
$$=\|g\|_1\|f\|_1<\infty.$$

---

*) a. e. 是 almost everywhere 的缩写，意思是“几乎处处”。——译注

由 Tonelli-Hobson 定理(参看第一章附录),就得出

$$\iint f(x-t)g(t)dtdx$$

为绝对收敛. 再由 Fubini 定理,得出 $h(x)$ 几乎处处存在且为可积.

现在,我们证明卷积运算是可交换的.

定理 对 $f,g\in L_1$ 有 $f*g=g*f$.

证 $$(f*g)(x)=\int f(x-t)g(t)dt.$$

令 $u=x-t$, 则

$$(f*g)(x)=\int_{\infty}^{-\infty}f(u)g(x-u)(-du)=(g*f)(x).$$

还可得出卷积运算是可结合的,即

$$f*(g*h)=(f*g)*h,$$

其中 $f,\ g,\ h\in L_1$.

这一结果的证明虽不曲折,但却颇为繁琐,就从略.

定理 设 $f,g\in L_1$, 则

$$\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1.$$

证 $$\|f*g\|_1=\int dx\left|\int f(x-t)g(t)dt\right|$$

$$\leqslant\int dx\int|f(x-t)g(t)|dt. \qquad (3)$$

我们注意到

$$\int dt\int|f(x-t)g(t)|dx=\int|g(t)|dt\int|f(x-t)|dx$$

$$=\|g\|_1\|f\|_1<\infty \qquad (4)$$

即 $\int dt\int|f(x-t)g(t)|dx$ 绝对收敛. 由 Tonelli-Hobson 定理*)

*) 见第一章附录.

$$\int dx \int |f(x-t)g(t)|dt$$

绝对收敛,并且绝对收敛于

$$\int dt \int |f(x-t)g(t)|dx = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

这就得到所需要的结果.

我们将上面的一些结果总结起来说:L_1 关于加法运算和卷积运算组成一个 Banach 代数 (见第二章例 6).

下面的定理就是对卷积感兴趣的主要理由.

定理 设 f, $g \in L_1$, 则

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\ \hat{g}.$$

证

$$(\widehat{f * g})(x) = \int e^{ixt}(f * g)(t)dt$$

$$= \int e^{ixt}dt \int f(t-s)g(s)ds. \quad (5)$$

因为

$$\int ds \int |e^{ixt} f(t-s)g(s)|dt = \int ds \int |f(t-s)g(s)|dt$$

$$= \int |g(s)|ds \int |f(t-s)|dt$$

$$= \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty,$$

于是,由前面定理的同样理由(利用 Tonelli-Hobson 定理),(5)中的积分可以交换积分次序. 再写

$$e^{ixt} = e^{ix(t-s)} e^{ixs},$$

代入(5)中,并交换积分次序,就有

$$(\widehat{f * g})(x) = \int g(s)e^{ixs}ds \int f(t-s)\ e^{ix(t-s)}dt = \hat{g}\hat{f} = \hat{f}\hat{g}.$$

证毕.

我们注意到 $L_1(+, *)$是一个 Banach 代数. 现在,我们证明它不

是一个具有单位元的代数．若假定有一个单位元 $e\in L_1$，使得对每一个 $f\in L_1$

$$f*e=f,$$

则一定有

$$e*e=e.$$

由前面的定理，于是

$$\widehat{e*e}=\hat{e}\hat{e}=\hat{e}.$$

因此，只可能是 $\hat{e}=0$ 或 1．由 $\hat{e}$ 的连续性，$\hat{e}$ 必须恒等于 0 或恒等于 1；它不可能跳跃！但此外，又要求

$$\lim_{x\to\infty}\hat{e}(x)=0,$$

我们只好选取

$$\hat{e}(x)=0.$$

这就意味着 $e(t)=0$, a. e.，要使得 $e(t)$ 成为单位元，只有对一切 $f\in L_1$，$f(t)=0$，a. e. 才行，这是荒谬的．

尽管不存在单位元，但却有所谓的**近似单位元**；存在一列 L_1 中的函数 $\{e_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|e_n*f-f\|_1=0^{*)}.$$

Fourier 变换的范数与函数的范数之间的关系

在讨论主要结果之前，我们需要下面引理：

引理 1 设 $a,b\in R,b>0$．则

$$\int e^{iat}\exp(-bt^2)\,dt=\left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{a^2}{4b}\right).$$

我们只略述证明的要点．

---

*) 见 Goldberg [2]．