具体数学

计算机科学基础

〔美〕格雷厄姆 · 克努特 · 帕塔希尼克 著

庄心谷 译

西安电子科技大学出版社

具 体 数 学

计算机科学基础

[美] R.L.格雷厄姆
D.E.克努特　　著
O.帕塔希尼克

庄心谷　　　译

西安电子科技大学出版社

1992

(陕)新登字 010 号

CONCRETE MATHEMATICS
A Foundation for Computer Science
Ronald L. Graham
Donald E. Knuth
Oren Patashnik
ADDISON–WESLEY (1989)

内 容 简 介

本书介绍支持高级计算机程序设计和算法分析的数学. 它的主要目的是给计算机科学的学生和专业人员提供数学技巧方面的一个坚实的和合适的基础. 介绍的内容对其他领域的学生和专业人员也很有用.

具体数学既是抽象数学的一个伙伴, 又是连续数学和离散数学的一个混合体. 作者"更具体地"解释,"具体数学是数学公式的控制操作, 利用了解问题的一批技巧". 这些技巧使程序设计者、理论工作者和其他科学工作者能计算看来可怕的和, 解复杂的递归关系, 以及发现数据中的巧妙的型式.

具体数学是一项重要的新工作, 通过作者卓越的工作形成了一本实用教科书. 同时, 它也是 Knuth 的经典著作《计算机程序设计技巧》一书中"数学预备知识"的扩展, 深化了课题涉及的范围, 且表述更加从容. 书中包含 500 多个习题 (分为六类), 除了研究的问题外, 给出了所有习题的完整解答.

主要课题包括. 和、递归、整函数、初等数论、二项系数、母函数、离散概率、渐近方法.

具 体 数 学

计算机科学基础

[美] R L 格雷厄姆
D E 克努特　　著
O.帕塔希尼克
庄心谷　　译

责任编辑　梁家新

西安电子科技大学出版社出版发行
西安电子科技大学印刷厂印刷
新华书店经销

开本 787×1092 1/16　印张 34 8/16　字数 822 千字
1992 年 1 月第 1 版　1992 年 1 月第 1 次印刷　印数 1–1 000

ISBN 7–5606–0174–X / TP · 0056　　定价: 29.00 元

中文版序言

本书介绍我在过去 30 年间研究计算机科学时经常用到的一些数学技巧。我为该书这样快地译成中文而感到高兴和荣幸。我希望中国的计算机科学的学生也像我一样喜爱钻研这些引人入胜的数学模型。

D.E.Knuth(高德纳)①
1991 年 1 月

①Knuth教授希望本书使用 Frances Yao 教授为他取的中文姓名“高德纳”(Gao Dunah)。

序　　言

从1970年起，Stanford大学每年开设一次名为具体数学的课程，本书就是作者在讲授这门课程的基础上写成的。每年大约有50名学生选修这门课，大部分为研究生，也有三年级和四年级的学生，而这些学生毕业后又在别的学校开设类似的课程。由此看来，本教材提供给广大读者(包括大学二年级学生)的时机已经成熟了。

具体数学诞生于昏暗的、变动剧烈的十年。在那动荡的年代里，大学校园是论战的温床，经常对保持长时期有用性表示怀疑。对大学课程本身也表示异议，而数学也未能逃脱详尽的考查。John Hammersley就写了一篇发人深思的文章"由于学院和大学中的'近世数学'以及类似的模糊的、费脑筋的无用的内容削弱了数学技巧"[145]，还有一些担忧的数学家[272]甚至问道："数学能被拯救吗?"本书的作者之一，Knuth写了一套名为《计算机程序设计技巧》的书，他在写第一卷时发现，在当时那些数学工具书里得不到他所需要的完整的组成部分。他需要的数学是完全不同于他在大学中主修的数学，而是一种能非常精确领会以及有充分根据判断计算机程序的数学。所以他引入了一门新的课程，在这门课程中教他希望过去有人教给他的那些内容。

由于通常称为"抽象数学"的抽象观念的新浪潮把具体的经典结果迅速地扫出近代数学课程，所以原先打算把"具体数学"课程作为对"抽象数学"的一种矫正。抽象数学是一门极好的学科，它没有任何错误：它是优美的，具有普遍意义的和有用的。但是抽象数学的追随者误入歧途，因为抽象数学的余下部分是次要的内容，且不再有值得注意的价值。一般化的目标非常流行，而一代数学家变得不乐于研究特殊项目的妙处，不喜欢接受解定量问题的挑战，或者意识不到技巧的价值。抽象数学变成了限于狭隘范围内的科目，且与现实失去联系。为了恢复合理的平衡，数学教育需要一种具体的措施。

当Knuth第一次在史坦福大学讲授具体数学时，他说了下面一段话用来解释有点陌生的课程名称。他尝试教一门难对付的而不是轻松的数学课程。和他的一些同事们的希望相反，他不准备讲集合论，也不准备讲Stone嵌入定理，甚至也不讲Stone–Čech的紧化。(几个建筑工程系的学生起立并悄悄地离开了教室)。

虽然具体数学开始是相对于其他潮流的一种反应，但是它存在的主要理由是明确的，而不是否定的。作为一门课程，它继续处于通用地位，有着"充实"的内容，且证明在许多新的应用中，这些内容是有价值的。在此期间，Z.A.Melzak出版了名为《具体数学指南》[214]的两卷书，这从另一方面独立证实了这种名称是合适的。

具体数学的内容初看起来好像是各不相同的各种方法，但是实践使它成为训练有素的

一套工具。的确，这些技巧有潜在的一致性，且对许多人有很强的吸引力。当另一位作者 Graham 在 1979 年第一次讲授此课程时，学生很感兴趣，他们决定一年后再继续重开一个班。

但是具体数学究竟是什么呢？它是连续数学和离散数学的混合物。更具体地说，利用解问题的一组技巧，控制操作数学公式。一旦读者学了本书中的内容，为了计算看来可怕的和，解复杂的递归关系，以及在数据中发现微妙的模型，你仅需一个冷静的头脑，一大张纸，以及写得相当不错的字。在代数技巧方面，你会那样流畅，你常会感到，求准确的结果比解决在以极限意义下成立的近似解答更容易。

本书中讨论的主要课题包含和，递归，初等数论，二项系数，母函数，离散概率和渐近方法。重点是放在操作技巧方面，而不是放在存在性定理或组合推理上；目标是使每个读者熟悉离散运算（像最大整函数和有限求和），就像学微积分的学生熟悉连续运算（像绝对值函数和无穷积分）一样。

注意，这些课题完全不同于大学生课程“离散数学”通常所教的内容，所以需要一个不同的学科名称，而“具体数学”已成为合适的名称。

原先 Stanford 所用的具体数学的教材为《计算机程序设计技巧》[173]中“数学预备知识”那一节，但是这 110 页的内容过于简略，所以另一个作者 Patashnik 起草了篇幅较大的补充草稿，本书就是在这些草稿基础上形成的。它是数学预备知识材料的扩充，且较从容地引入数学预备知识的内容，删去了一些较高深的部分；另一方面，这里增加了几个原先没有的课题，使内容更完整。

作者们乐意共同来完成这本书，因为课程的内容已经明确，其内容应具有的特点也已展现在我们面前；本书似乎写出了它自己的特色。而且，在几处我们所采用的有点不同于一般的方法看来已很好地配合在一起，经过这些年的实践我们不禁感到，本书有点象是我们所喜爱的研究数学方法的宣言书。所以我们认为本书的叙述体现了数学的美妙和惊人之处。我们希望读者至少也将分享我们在写此书时所感受到的 ε 的喜悦。

由于本书诞生在大学环境中，所以我们尝试采用口语体以同时活跃课堂教学。有些人认为数学是一项严肃的工作，它一定总是枯燥无味的；但是我们却认为数学是有趣味的，我们不羞于承认这一实际情况。为什么要在工作和游戏之间画一条严格的界线呢？具体数学富有吸引人的模型，虽然计算操作并不一定是容易的，但解答却能令人惊讶地吸引人。本书中明显反映了教学工作的甘苦，因为他们已是我们生活中不可缺少的组成部分。

本书包含 500 多个习题，分为六类：

· **准备部分**是每个读者初次阅读本书时应尽量完成的习题。

· **基本部分**是推导论据的习题，学习论据最好的方法是，通过自己的努力推导，而不是阅读别人的推导。

· **课外习题**是为加深对本章内容的理解而设置的问题。

· **考查性问题**一般同时涉及两章或两章以上的概念；一般把它们作为课外考查(由于时间关系不作为课堂考查)。

· **额外问题**是超出了学习具体数学的一般学生(指以本书作为该课程教材时)所能处理的问题的范围，这些问题以有趣的方式扩展了本教材的内容。

· **研究性问题**在人力所及范围可能或不可能求得解答，但是这里提供的问题似乎值得

一试(不受时间限制)。

在附录 A 中给出了所有习题的解答，并常常附有有关结论的补充信息。(当然，研究性问题的"解答"是不完全的，但是即使这样，给出部分结果或提示可能是有帮助的。)鼓励读者查看解答，特别是准备部分问题的解答，但是在认真尝试解问题之前不要去查看解答。

在附录 C 中，我们曾想适当地注明每个习题的出处，因为一个启发性问题的设计往往包含有大量创造性和／或运气。数学工作者已遗憾地形成了一种习惯，就是引用习题不必表示任何感谢；我们认为相反的习惯，譬如一些关于国际象棋的杂志的做法(书中按惯例详细注明原象棋问题的名称，日期和地点）是十分好的，然而，我们不能确定许多已变成民间传说的问题的出处。如果读者知道我们引用的习题出处遗漏了或不准确，我们将十分高兴获悉详情，以使我们能在本书的后续版本中修改这些错漏。

作者非常感谢 Andrei Broder， Ernst Mayr，Andrew Yao 和 Frances Yao，这些年来他们在 Stanford 大学讲授具体数学过程中为本书作出了很大贡献。此外我们十分感谢助教们，他们每年在班上创造性地收录资料并帮助设计考题，他们的名字列在附录 C 中。本书实质上是 16 年可贵的讲稿的一个概要，没有他们的一流的工作，就不可能有这本书。

还有许多人为完成本书提供了帮助。例如，我们要称赞 Brown，Columbia，CUNY，Princeton，Rice 和 Stanford 等大学的学生们，他们发现并修正了初稿中的错误。我们与 Addison-Wesley 出版社的交往特别有效和有帮助；我们特别要感谢我们的出版者 Peter Gordon，生产主管人 Bette Aaronson，制图者 Roy Brown，以及校订者 Lyn Dupré。国家科学基金会和海军研究局给予了非常宝贵的支持。在我们准备索引的时候，Cheryl Graham 提供了很大帮助。我们尤其要感谢我们的妻子(Fan，Jill 和 Amy)，感谢她们的耐心，支持，鼓励和意见。

我们试图完成一本完美的书，但是我们是不完美的作者。所以我们要求大家帮助来改正任何错误。对于第一个发现任何错误者，不管是数学的错误，还是历史的错误或印刷错误，将奖赏 $ 2.56 以示感谢。

Ronald L. Graham
Donald E. Knuth
Oren Patashnik
1988 年 5 月

符号注释

本书所采用的符号有一些尚未成为标准符号，这里列出了对一些读者(指学过其他相似内容教材的读者)可能不熟悉的符号。

符号	名称
$\ln x$	自然对数：$\log_e x$
$\lg x$	以 2 为底的对数：$\log_2 x$
$\log x$	常用对数：$\log_{10} x$
$\lfloor x \rfloor$	下整：$\max\{n \mid n \leqslant x，整数\ n\}$
$\lceil x \rceil$	上整：$\min\{n \mid n \geqslant x，整数\ n\}$
$x \bmod y$	剩余：$x - y\lfloor x / y \rfloor$
$\{x\}$	分数部分：$x \bmod 1$
$\sum f(x)\delta x$	不定求和
$\sum_a^b f(x)\delta x$	定求和
$x^{\underline{n}}$	下降阶乘幂：$x! / (x-n)!$
$x^{\overline{n}}$	上升阶乘幂：$\Gamma(x+n) / \Gamma(x)$
$n¡$	次阶乘：$n!/0! - n!/1! + \cdots + (-1)^n n!/n!$
$\Re z$	实部：x，如果 $z = x+iy$
$\Im z$	虚部：y，如果 $z = x+iy$
H_n	调和数：$1/1 + \cdots + 1/n$
$H_n^{(x)}$	广义调和数：$1/1^x + \cdots + 1/n^x$
$f^{(m)}(z)$	在 z 处 f 的 m 阶导数
$\left[n \atop m \right]$	Stirling 轮换数(“第一类”)
$\left\{ n \atop m \right\}$	Stirling 子集数(“第二类”)

符号	名称
$\left\langle {n \atop m} \right\rangle$	欧拉数
$\left\langle\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\right\rangle$	第二阶欧拉数
$(a_m \cdots a_0)_b$	$\sum_{k=0}^{m} a_k b^k$ 的根值记数法
$K(a_1,\cdots, a_n)$	延拓多项式
$F\left({a,b \atop c} \middle\| z \right)$	超几何函数
$\# A$	基数；集合 A 中的元素个数
$[z^n]f(z)$	$f(z)$ 中 z^n 的系数
$[\alpha \mathinner{..} \beta]$	闭区间：集合$\{x \mid \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$
$[m=n]$	1 如果 $m=n$，否则为 0*
$[m \backslash n]$	1 如果 m 除尽 n，否则为 0*
$[m \backslash\backslash n]$	1 如果 m 整除 n，否则为 0*
$[m \perp n]$	1 如果 m 和 n 互素，否则为 0*

* 一般，如果 S 是能真或假的任何命题，加括号的记法$[S]$表示如果 S 是真，为 1，否则为 0。

书中我们用单引号('…')表示书写的，双引号("…")内的一个短语表示说的。因此，字符串 'String' 有时称为一个"string"。

形式 'a/bc' 的一个表达式和 '$a/(bc)$' 的意思相同。此外，$\log x/\log y=(\log x/(\log y)$，$2n!=2(n!)$。

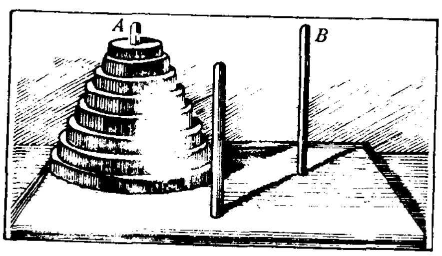
目　　录

第一章 递归问题

本章研究三个样本问题，这三个样本问题给出了递归问题的感性知识。它们有两个共同的特点：它们都是数学家们一直反复地研究的问题；它们的解都用了递归的概念，按递归概念，每个问题的解都依赖于相同问题的若干较小场合的解。

1.1 汉诺塔

首先让我们看一个称为汉诺塔的巧妙的测验智力的小问题，这是法国数学家 Edouard Lucas 在 1883 年提出的。题目给我们 8 个圆盘组成的一个塔，最初圆盘按尺寸递减的次序堆放在三根杆中的一根杆上(总共有三根杆)：目的是把整个塔移到另一根杆上，一次仅移 1 个圆盘，且 1 个较大的盘子不得移到比它小的盘子的上面。



Lucas[208]按照一个虚构的传说，把他的玩具安装成印度教的非常大的塔，想象有 64 个纯金的圆盘安放在三根金刚石针上。开始时，他说，上帝把这些金盘放在第一根针上，且命令一群教士按照上述的规则把它们移到第三根针上去。据传说，教士们日夜做他们的工作。当他们完成时，塔将碎裂且世界将临末日。

一下很难看出问题有一个解，但稍加思索后我们确信它有一个解。现在出现了问题：我们该怎么干才好呢？也就是说，为了完成任务，多少次移动是必要和充分的？

处理这样一个问题的最好方法是把它一般化一点。印度教的塔有 64 个圆盘，汉诺塔有 8 个；让我们考虑如果有 n 个圆盘将发生什么情况。

这种推广的一个好处是，我们能把问题的 n 大大地降低。事实上，在本书中我们将反复见到首先看小的情形是有利的。我们一下就能看出如何移动仅包含 1 或 2 个盘的塔，并且用少量试验就能说明如何移 3 个盘的塔。

解问题的下一步是引入适当的表示法：取名并解出它。让我们说T_n是在 Lucas 的规则下 n 个盘从一根杆移到另一根杆的最小移动次数，则T_1显然是 1，$T_2=3$。为了方便，通过考虑最小情形，我们还能取得另一个数据：显然$T_0=0$，因为转移 $n=0$ 个盘的塔不需要任何移动！精明的数学家不为思索小的情形而感到害臊，因为当极端的情形完全了解时，一般型式较容易理解（即使当它们是平凡的情形时）。

但是现在让我们改变自己的观点，尝试去思索大的情形。我们如何能转移一个大的塔？3 个盘的试验表明获胜的思想是把顶上 2 个盘转移到中间杆，然后移第 3 个盘，再把另外 2 个盘放到它的上面。这就提供给我们一个关于 n 个盘一般转移的思路：首先把 $n-1$ 个最小的盘转移到一个不同的杆（要求T_{n-1}次移动），然后移动最大的盘（要求一次移动），最后再把 $n-1$ 个最小盘转移回最大的盘上（要求另外的T_{n-1}次移动）。因此，我们至多用 $2T_{n-1}+1$ 次移动能转移 n 个盘（$n>0$）：

$$T_n \leqslant 2T_{n-1}+1, \quad (n>0).$$

此公式用了‘$\leqslant$’而不是‘$=$’，因为我们的构造仅证明 $2T_{n-1}+1$ 次移动是充分的，并未证明 $2T_{n-1}+1$ 次移动是必要的。一个聪明的人可能想到一种捷径来证明它是必要的。

但是是否有一个较好的方法呢？实际上没有，在某个时刻我们一定要移动最大的盘。当我们移动最大盘时，$n-1$ 个最小的盘一定在一根杆上，且至少用T_{n-1}次移动把它们放到那里。若我们不太注意，则移动最大盘的次数可能大于一次。但是最后一次移动最大盘之后，我们一定要把 $n-1$ 个最小盘（一定还在一根杆上）转移回最大盘上，这还要求T_{n-1}次移动。因此

$$T_n \geqslant 2T_{n-1}+1, \quad (n>0).$$

这样两个不等式和 $n=0$ 的平凡解一起，产生

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1}+1, \quad (n>0). \end{aligned} \tag{1.1}$$

(注意这些公式是和值$T_1=1$和 $T_2=3$ 一致的。我们对小的情形的试验不仅有助于发现一个一般的公式，而且还提供了一种便于检查我们是否犯了可笑错误的方法。在后面几章中，当我们进入较复杂的运用时，这种检查将特别有价值。)

像式(1.1)那样一组等式被称为一个**递归**（递推关系或递归关系）。它给定一个边界值以及根据较早值表达一般值的一个方程。我们有时把这个一般的方程单独称作为一个递归，但从学术上来说它需要一个边界值才是完整的。

递归使我们能计算任何 n 的T_n，但是当 n 比较大的时候没有人真正想用一个递归来计算，因为运算太长了。递归仅给出间接的“局部”信息。递归的一个**解**使我们非常高兴，也就是说，我们希望有一个良好的，简洁的T_n的“闭形式”，即使对于大的 n，使我们能迅速地计算它。依据一个闭形式，我们能明白T_n真正是什么。

那么我们如何解一个递归呢？一种方式是猜测正确的解，然后证明我们的猜测是正确的，并且对于猜测解来说我们最希望做的事是看一下 n 值小的情况。因而我们接连计算

$T_3=2\cdot3+1=7$；$T_4=2\cdot7+1=15$；$T_5=2\cdot15+1=31$；$T_6=2\cdot31+1=63$。它确实看来像

$$T_n=2^n-1,\ (n\geqslant0). \tag{1.2}$$

至少对于 $n\leqslant6$，此公式成立。

数学归纳法是证明某个命题关于整数 n(对所有 $n\geqslant n_0$)成立的一种一般的方法。首先，当 n 为最小值 n_0 时我们证明命题，这称为**基础**。然后假设对于包含在 n_0 和 $n-1$ 之间的所有值，已经证明命题成立，对于 $n>n_0$ 证明命题，这种方法称为**归纳**。这样一个证明仅用有限量工作便产生无限多个结果。

数学归纳法完美地为递归作了准备。例如，在我们讨论的情形，容易从式(1.1)得出式(1.2)：由于 $T_0=2^0-1=0$，所以基础是平凡的。若假设当 $n-1$ 取代 n 时式(1.2)成立，且对于 $n>0$ 建立归纳：

$$T_n=2T_{n-1}+1=2(2^{n-1}-1)+1=2^n-1.$$

因此对于 n，式(1.2)同样成立。好！我们关于 T_n 的探索成功地完成了。

当然教士的任务还未终止，他们仍在尽职地移动圆盘，休息一会儿再移，因为对于 $n=64$，有 $2^{64}-1$ 次移动(差不多 $18\times1\,000^6$)。即使以每微秒移动一次这个办不到的速率，他们也将需要多于 5 000 世纪的时间来转移印度教的塔。Lucas 原先的问题较实际一点，它要求 $2^8-1=255$ 次移动，敏捷的手大约需花费 4min。

在各种应用提出的许多问题中，汉诺塔递归有典型性。在找像 T_n 那样某个有趣量的一个闭形式的表达式中，我们经历三个阶段：

1. 看看小的情形。这使我们深入了解问题，这在第二和第三阶段中将对我们有帮助。

2. 求出和证明关心的量的一个数学表达式。对于汉诺塔，就是递归式(1.1)，它使我们能就给定的量来计算任何 n 的 T_n。

3. 求出和证明我们的数学表达式的一个闭形式。对于汉诺塔，就是递归解(1.2)。

第三阶段是我们在本书中始终钻研的阶段。事实上，我们常常完全略过阶段一和二，因为我们有一个作为出发点的数学表达式。但是尽管这样，我们仍将进入其解将使我们经历三个阶段的子问题。

汉诺塔的分析导致正确的解答，但是它要求一个“归纳跳跃”，这里依赖于解答的侥幸的猜中。本书的主要目的之一是阐明解递归式的方法，而并不要求读者具有超人的洞察力。例如，我们将看到递归式(1.1)能通过在方程两边加 1 来简化：

$$T_0+1=1;$$

$$T_n+1=2T_{n-1}+2,\ (n>0).$$

如果令 $U_n=T_{n-1}+1$，我们得到

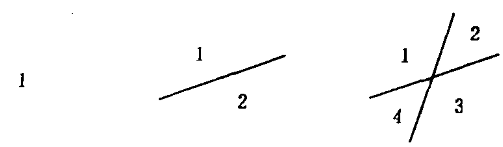
$$U_n = 1$$
$$U_n = 2U_{n-1}，(n > 0). \tag{1.3}$$

发现此递归式的解就是$U_n = 2^n$，这并不需要天才。因此，$T_n = 2^n - 1$，甚至于计算机都能发现这个解。

1.2　平面中的直线

我们的第二个样本问题还具有一种几何特点：一个人用刀在意大利馅饼上做 n 次直线切割，能把馅饼切成多少份？或者，较正式地说：由平面中 n 条直线确定的最大区域数 L_n 是多少？瑞士数学家 Jacob Steiner[278]在 1826 年首先解决了这个问题。

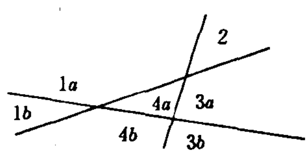
我们还是先看小的情形，记住是从最小的情形开始。没有直线的平面具有 1 个区域；有 1 条直线的平面具有 2 个区域；有 2 条直线的平面有 4 个区域：



$L_0=1$　　$L_1=2$　　$L_2=4$

(每条直线在两个方向作无限延伸。)

自然，我们认为$L_n = 2^n$，加入 1 条新的直线仅仅使区域数加倍。不幸，这是错误的。若第 n 条直线把每个老区域切成 2 个区域，则能使区域数加倍；由于每个老区域是凸的，当然它能把一个老区域至多切成两部分。(1 条直线能把 1 个凸区域至多切成 2 个新区域，新区域也将是凸的。) 但是当我们加入第 3 条直线，即在下图中的一条粗线时，我们立即发现，不管如何放前 2 条直线，它至多能切 3 个老区域：



因此$L_3 = 4+3 = 7$是我们能做到的最好结果。

作一些思考之后，我们获得适当的推广。第 n 条直线($n > 0$)增加的区域数为 k 当且仅当它切了 k 个老区域，而它切 k 个老区域当且仅当它在 $k-1$ 个不同的位置碰到前面的直线，2 条直线至多相交于一点。所以新的直线至多与 $n-1$ 条老的直线相交于 $n-1$ 个不同点，且一定有 $k \leqslant n$。这样我们就建立了上界

$$L_n \leqslant L_{n-1} + n，(n > 0).$$

此外，用归纳法易证我们能达到此公式中的等式．我们只要使第 n 条直线不和其他任何直线平行(因此它和其他任何直线相交)，且使它不通过任何存在的交点（因此它和其他任何直线相交于不同的位置)。所以递归式为

$$L_0 = 1;$$
$$L_n = L_{n-1} + n, \quad (n > 0). \tag{1.4}$$

在这里正确地检验了已知值L_1，L_2 和 L_3，所以我们将接受此式。

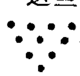
现在我们需要一个闭形式的解。我们可以再做一次猜测游戏，但是看来我们不熟悉 1，2，4，7，11，16，…，所以让我们改变一下方针。我们常常能把一个递归式“展开”或“摊开”到结束来了解它，如下:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\ \ \vdots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + S_n \end{aligned}$$

其中 $S_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$。
换句话说，L_n 是前 n 个正整数的和 S_n 加 1。

量 S_n 经常出现，所以把它的小值作一个表是有价值的。这样，当下一次再见到它们时就可以认出这些数:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

这些值也称为三角形数，因为S_n 是 n 行三角形阵中球状针孔的个数。例如，通常 4 行阵  有 $S_4 = 10$ 个针孔。

为了计算S_n，我们可用 Gauss 在 1786 年提出的一种技巧，当时他为 9 岁[73]（还可见 Euler[92，部分 1，§415]):

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& 1 + \quad 2 \quad + 3 \qquad + \cdots + (n-1) + n \\ +\ S_n &=& n + (n-1) + (n+2) \quad + \cdots + \quad 2 \quad + 1 \\ \hline 2S_n &=& (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

我们仅仅把S_n 和它的“颠倒”相加，以致右边 n 列的每一列之和均为 $n+1$。化简可得

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (n > 0). \tag{1.5}$$

我们得到了解：

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \quad (n \geqslant 0). \tag{1.6}$$

作为有经验的人，我们可满足于这个推导，且认为这就是证明，即使在做展开以及思考时我们有点儿波动也无妨。学数学的学生应能对付较严格的标准，所以最好的办法是用归纳法建立一个严格的证明。关键的归纳步是

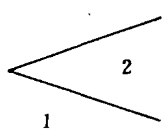
$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1 .$$

现在，对闭形式(1.6)可确信无疑了。

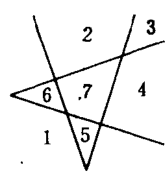
顺便提一句，我们谈到"闭形式"时并没有明确说出指的是什么，通常它是相当清楚的。像式(1.1)和(1.4)的递归不是闭形式，它们是根据量本身来表达一个量的；而像式(1.2)和(1.6)是闭形式。像 $1+2+\cdots+n$ 的和不是闭形式，它们用'…'来哄骗；而像 $n(n+1)/2$ 的表达式是闭形式。我们能给出一个如下的粗略定义：如果我们能至多用独立于 n 的固定次"众所周知"的标准运算来计算它，关于一个量 $f(n)$的表达式是闭形式。例如，2^n-1 和$n(n+1)/2$是闭形式，因为它们以明确的方式仅涉及到加，减，乘，除和指数。

简单的闭形式的总数是有限的，而且有不具有简单闭形式的递归式，当这样的递归式反复出现而是重要的递归式时，我们把新的运算加入我们的组成部分，这就能大大地扩展以"简单"闭形式求解问题的范围。例如，已经证实前 n 个整数的乘积 $n!$很重要，现在我们把它考虑为一个基本运算。所以公式'$n!$'是闭形式，虽然它的等式'$1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n$'不是闭形式。

现在再简要地考虑一下平面中直线的变形问题：假设我们用弯曲的线来代替直线，每个弯曲线含有一个"锯齿形的转角"，平面中 n 个这样的弯曲线确定的区域的最大个数Z_n是多少？我们可能认为Z_n 是 L_n 两倍那样大，或者可能是三倍那样大。让我们来看：



$Z_1=2$



$Z_2=7$

根据这些小的情形，且稍加思索，我们看出：1 条弯曲线像"2 条"直线过它们的交点不作延伸而合并了一些区域的 2 条直线。