

工程力学文集

科学出版社

71.212083
233

工程力学文集

A. A. 伊柳辛 主編

严宗达 刘昭培 楊海元 譯

31570/07

科学出版社

ИНЖЕНЕРНЫЙ СБОРНИК, Том 26

Ответственный редактор А. А. ИЛЮШИН
Москва 1958

內 容 簡 介

本文集譯自苏联“工程論文集”26卷，共包括板、壳和杆件結構等方面的研究論文29篇，涉及的范围很广泛，例如各向异性壳体的非綫性振动，加劲板 and 壳的計算及实验，网状圓柱形扁壳，超出弹性极限以外的杆和板的稳定性，被圓孔削弱的正交各向异性板，还有土壤中应力的弹塑性分布及散体力学的一些文章，对結構力学及土力学的研究工作者及工程师有参考价值。

工 程 力 学 文 集

А. А. 伊柳辛 主編
严宗达 刘昭培 楊海元 譯

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1963 年 11 月第 一 版 书号：2886 字数：302,000
1963 年 11 月第一次印刷 开本：850×1168 1/32
(京) 0001—2,750 印张：11 3/8

定价：1.90 元

3330

目 录

正交各向异性旋轉壳的非綫性橫向振動·····	
·····E. Ф. 布尔米斯特洛夫	(1)
关于加強板和壳的計算·····B. И. 科罗列夫	(24)
在任意边界条件下的非圓閉合柱形壳的計算·····	
·····P. Л. 馬里金娜	(29)
关于对已給形式有初始偏离的壳的計算·····	
·····A. B. 密特罗范諾娃	(46)
关于矩形底扁壳在有限挠度时的弹性平衡問題·····	
·····И. C. 祖尔科夫	(60)
自由的柱形壳体在冲击力作用下的变形·····Ю. C. 史金涅夫	(68)
网状圓柱形扁壳計算·····Г. И. 卜申尼奇諾夫	(74)
关于一些包括环形部分的零件的計算·····A. A. 拉赫勤	(84)
机翼沉箱式稜柱壳体的固有振動·····A. H. 耶尔巴切夫斯基	(98)
关于大位移时弹性平衡的两个最簡單的問題·····	
·····A. C. 格里高里也夫	(105)
通过若干点相联系的弹性同軸圓柱的計算·····A. K. 梅金	(108)
关于梁的基本函数的几个求积法·····P. Д. 斯切潘諾夫	(116)
对为环所加強的正交各向异性圓柱形壳工作的实验验证·····	
·····H. Д. 列維特斯卡娅	(125)
旋轉体的弹性平衡·····K. B. 沙良尼科-克拉沙	(139)
弹性扇形环体在某些特定荷載情况下的問題的近似解·····	
·····B. M. 留毕莫夫	(171)
柱型各向异性杆在沿杆长均匀分布載荷作用下的弹性平衡	
·····A. И. 烏茲达列夫	(184)
超出弹性极限以外的杆和板的稳定性·····C. M. 波波夫	(201)

被圓孔削弱的正交各向异性板在純弯曲时的应力集中.....	B. Б. 里普金 (224)
关于有限弹性层的压縮.....	Б. Ф. 伏拉索夫 (235)
各种边界条件下承受局部靜力荷載作用的矩形鈑的弯曲...	H. С. 古耳金 (248)
与基础計算相关的土壤中应力之弹-塑性分布的某些問題	И. Б. 費道罗夫 (256)
散体基础承载能力的确定.....	З. Н. 布茲考 (269)
在复杂荷重下柔韌弹性杆的有限位移的逐次近似的計算法	Л. А. 科列斯尼科夫 (287)
刚架的稳定性和变形的計算.....	Б. Н. 阿达摩夫, Б. Н. 卡札札耶夫 (296)
关于鉸接杆系的稳定性計算.....	К. А. 米哈依里琴科 (317)
等腰三角形截面的悬臂稜柱杆荷重作用于与对称面垂直的 平面內时的橫向弯曲.....	И. А. 卡古諾夫 (340)
B. 3. 伏拉索夫薄壁杆件計算理論的某些推广.....	А. А. 捷尔卡切夫 (344)
具有任意幂次的正交多項式.....	А. А. 波波夫 (352)
关于在弹性系統振动时內抗力的一个假設.....	А. С. 米良浩維茨基 (358)

正交各向異性旋轉壳的非綫性橫向振動

Е. Ф. 布尔米斯特洛夫

(薩拉托夫)

在 Э. И. 格里高留克的工作^[1]中,研究了各向同性的球形、錐形旋轉壳和平板在考慮有限位移時的振動。

本文把此等問題的解推廣到由正交各向異性材料製成的旋轉壳的情形,並且作為特殊情形,對波紋板當作各向異性結構進行了研究^[2],並得到解答。研究包括了考慮有限位移時的自由振動和強迫振動。問題的解是用 И. Г. 布布諾夫方法給出的。

1. 基本方程式 如 [1] 中所已知,假設沒有徑向慣性力,各向同性和正交各向異性旋轉壳的平衡方程式有如下形式:

$$(rT_1)' - T_2 = 0 \quad (1.1)$$

$$[rT_1(\omega + f)']' + (rQ_1)' - \frac{\gamma\delta}{g} r \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + pr = 0 \quad (1.2)$$

$$(rM_1)' - M_2 - rQ_1 = 0 \quad (1.3)$$

(撇號表示對 r 的微商)。

這裡 T_1 和 T_2 為子午向及環向的單位長法向內力; Q_1 為單位長剪力; M_1 和 M_2 為單位長彎矩; u 和 w 為中面上點在徑向和軸向的位移; f 為壳的中曲面方程; r 為動點半徑; δ 為壳厚; γ 為比重; g 為重力加速度; t 為時間; p 為法向壓力。

彈性法向內力和彎矩 (假設材料在周向和徑向對拉伸和彎曲具有不同的剛度,這對應於結構上各向異性的材料) 與中面變形有下列關係:

$$T_1 = Bk_2(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2), \quad T_2 = Bk_2(k^2\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) \quad (1.4)$$

$$M_1 = -Dk_2' \left(w'' + \nu \frac{w'}{r} \right), \quad M_2 = -Dk_2' \left(n^2 \frac{w'}{r} + \nu w'' \right) \quad (1.5)$$

式中,

$$B = \frac{E\delta}{(k^2 - \nu^2)}, \quad D = \frac{E\delta^3}{12(n^2 - \nu^2)}$$

为拉伸及弯曲的刚度; $k^2 = k_1 k_2$; $n^2 = k_1' k_2'$; E 和 ν 为修正的楊氏模量和泊桑比; ϵ_1 和 ϵ_2 为中面在径向及周向的应变, 它們与 u 和 w 有如下关系:

$$\epsilon_1 = u' + f'w' + \frac{1}{2}w'^2, \quad \epsilon_2 = \frac{u}{r} \quad (1.6)$$

ϵ_1 和 ϵ_2 的大小不能是任意的; 它們由下列协调条件联系着:

$$\epsilon_1 = (r\epsilon_2)' + f'w' + \frac{1}{2}w'^2 \quad (1.7)$$

現在引入力函数 ψ , 它与法向内力有下式的关系

$$T_1 = -\frac{Dk_2}{b^2} \frac{\psi}{\rho}, \quad T_2 = -\frac{Dk_2}{b^2} \dot{\psi} \quad (1.8)$$

其中 ρ 为无量綱位移, 而点号表示对 ρ 的微商; b 为底半径.

由此可見方程式(1.1)自然得到滿足, 而方程式(1.2)积分一次以后化为

$$rT_1(w+f)' + rQ_1 + \int \left(p - \frac{\gamma\delta}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) r dr = C. \quad (1.9)$$

正如 Э. И. 格里高留克在工作 [1] 中所示出的, 方程 (1.9) 中的常数 C 可由半径为 r 的封閉性壳体中央部分的平衡条件定出 (这部分上作用有法向压力 p 和在壳頂处的集中力 P) 且为 $-\frac{P}{2\pi}$.

这样, 方程(1.9)可写为¹⁾

$$rT_1(w+f)' + (rM_1)' - M_2 + \int_0^r \left(p - \frac{\gamma\delta}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) r dr + \frac{P}{2\pi} = 0 \quad (1.10)$$

下面来进行对方程(1.7)和(1.10)的变换. 由方程(1.4)有

1) 这里和以后我們將部分地按照 Э. И. 格里高留克的表示法.

$$\varepsilon_1 = \frac{D}{b^2 E \delta} \left(v \dot{\psi} - k^2 \frac{\psi}{\rho} \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{D}{b^2 E \delta} \left(v \frac{\psi}{\rho} - \dot{\psi} \right) \quad (1.11)$$

把(1.11)和(1.5)代入(1.7)和(1.10)中,得

$$F_1(\rho, t) = \rho \ddot{\psi} + \dot{\psi} - k^2 \frac{\psi}{\rho} - \frac{1}{m_1} \left(f^* \dot{W} + \frac{1}{2} \dot{W}^2 \right) = 0 \quad (1.12)$$

$$F_2(\rho, t) = \rho W + \dot{W} - n^2 \frac{\dot{W}}{\rho} + \frac{k_2}{k'_2} (\dot{W} + f^*) \psi + \\ + \int_0^\rho \left(\frac{a^2}{k'_2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{p^*}{k'_2} \right) \rho d\rho - \frac{P^*}{2\pi k'_2} = 0 \quad (1.13)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{w}{h}, & f^* &= \frac{f}{h}, & m_1 &= \frac{D}{E \delta h^2} \\ a^2 &= \frac{\gamma \delta b^4}{D g}, & p^* &= \frac{p b^4}{D h}, & P^* &= \frac{P b^2}{D h} \end{aligned} \right\}, \quad (1.14)$$

而 h 为壳的矢高。

2. 正交各向异性扁球壳 运动方程式。設有扁球壳其中面半径为 R , 底半径为 b 。壳由具有柱形各向异性的材料制成(图 1)。設各向异性轴通过壳頂且与壳底平面(半径为 b 的圆)垂直。从中面半径为 R 又底半径为 b 的扁球壳的几何性质求出下列二关系:

$$\begin{aligned} r^2 &= (2R - f)f \approx 2Rf, \\ b^2 &= (2R - h)h \approx 2Rh \quad (2.1) \end{aligned}$$

由此有

$$f = h \left(\frac{r}{b} \right)^2 = h \rho^2. \quad (2.2)$$

我們认为壳的边缘以某种方式固定, 在壳上作用有法向压力 p 和在壳頂处的集心力 P 。

在这种情形, 关于考虑有限位移的弯曲振动問題就化为在壳体对应的边界条件下积分两个非綫性方程(1.12)和(1.13)了。

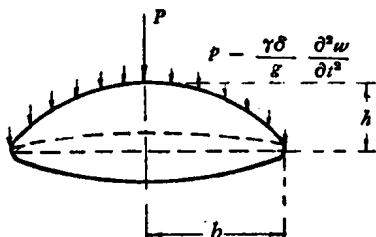


图 1

我們將按 И. Г. 布布諾夫的方法找出問題的解。為此近似給出函數使滿足撓度 w 的所有邊界條件。考慮到殼的外邊緣沒有軸向位移且為彈性約束；即邊緣轉角將和殼邊緣上彎矩成正比，亦即

$$\dot{W}(1) = -\alpha \frac{b^2}{Dk_2 h} M_1(1) \quad (1)$$

式中

$$\alpha = \frac{2 - m(n+1)}{2(3+v) - (n+1)(n+v)m}, \quad m = \frac{\lambda+1}{2\lambda}$$

$$\lambda = \frac{(n+1)[\alpha(n+v) - 1]}{(3-n)[\alpha(4+n+v) - 1]}, \quad n = \sqrt{k_1' k_2'}$$

對於連續旋轉殼，在頂點處 $\dot{W}(0) = 0$ 。取相對撓度 W 為如下形式，可滿足這些條件：

$$W = W_0[1 - (\lambda+1)\rho^{n+1} + \lambda\rho^4] \quad (2.3)$$

式中 $W_0 = W(0)$ 為殼頂處的撓度。

若殼邊緣為刚性固定，則

$$W(1) = 0, \quad \dot{W}(1) = 0, \quad \lambda = \frac{n+1}{3-n}, \quad \alpha = 0$$

在邊緣為刚性支持的情形有

$$W(1) = M_1(1) = 0, \quad \lambda = \frac{(n+1)(n+v)}{(3-n)(4+n+v)}, \quad \alpha = \infty$$

由方程(1.12)，有

$$\psi = L_1 \rho^k + \frac{1}{m_1 \rho^k} \int \left[\rho^{2k-1} \int \frac{1}{\rho^k} \left(j^* \dot{W} + \frac{1}{2} \dot{W}^2 \right) d\rho \right] d\rho + L_2 \rho^{-k} \quad (2.4)$$

由在殼頂處法向內力 T_1 應為有限的條件，對於連續殼，可以定出常數 L_2 必須等於零。

將(2.2)及(2.3)代入方程(2.4)並進行積分，我們得到

$$\psi = L_1 \rho^k + \frac{1}{m_1} \left\{ \frac{W_0^2}{6(2m-1)^2} \left[\frac{48\rho^7}{49-k^2} - \frac{48m(n+1)\rho^{n+4}}{(n+4)^2-k^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{12m^2(n+1)^2\rho^{2n+1}}{(2n+1)^2-k^2} \right] + \frac{W_0}{3(2m-1)} \left[\frac{24\rho^5}{25-k^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{12m(n+1)\rho^{n+2}}{(n+2)^2-k^2} \right] \left. \right\} \quad (2.5)$$

常数 L_1 可由壳边缘在径向弹性移动的条件,即条件

$$U(1) = -\eta \frac{b}{E\delta h k_2} T_1(1), \quad U = \frac{n}{h} \quad (2.6)$$

来确定,其中

$$\eta = \left(\nu\rho + \rho^2 \frac{\dot{\psi}}{\psi} \right)_{\rho=1} \quad (2.7)$$

系数 η 具有这样的性质,当

$$\eta = 0, \quad U(1) = 0; \quad \eta = \infty, \quad T_1(1) = 0;$$

$$\eta = \nu, \quad T_2(1) = 0.$$

以式(2.5)代入(2.7)得

$$L_1 = -\frac{1}{m_1} \left[\frac{W_0^2}{6(2m-1)^2} R_1 + \frac{W_0}{3(2m-1)} R_2 \right] \quad (2.8)$$

式中

$$R_1 = \frac{48}{k+\eta-\nu} \left[\frac{\eta-\nu+7}{49-k^2} - \frac{m(n+1)}{(n+4)^2-k^2} (\eta-\nu+n+4) + \right. \\ \left. + \frac{m^2(n+1)^2}{4[(2n+1)^2-k^2]} (\eta-\nu+2n+1) \right] \quad (2.9)$$

$$R_2 = \frac{24}{k+\eta-\nu} \left[\frac{\eta-\nu+5}{25-k^2} - \frac{m(n+1)}{2[(n+2)^2-k^2]} (\eta-\nu+n+2) \right] \quad (2.10)$$

所以我們有

$$\psi = \frac{1}{m_1} \left\{ \frac{W_0}{3(2m-1)} \left[\frac{24\rho^5}{25-k^2} - \frac{12m(n+1)\rho^{n+2}}{(n+2)^2-k^2} - R_2\rho^k \right] + \right. \\ \left. + \frac{W_0^2}{6(2m-1)^2} \left[\frac{48\rho^7}{49-k^2} - \frac{48m(n+1)\rho^{n+4}}{(n+4)^2-k^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{12m^2(n+1)^2\rho^{2n+1}}{(2n+1)^2-k^2} - R_1\rho^k \right] \right\} \quad (2.11)$$

找出 ψ 的值 (2.11) 之后,用 И. Г. 布布諾夫法积分方程式 (1.13), 而因为方程式 (1.13) 是由原始平衡方程經一次积分得到的,所以它应和由研究壳的能量的变分所建立的式子一样,不是和挠度 W 正交,而和它的一阶微商正交。

将表示式 (2.3) 和 (2.11) 代入方程式 (1.13); 对得到的結果乘以

$$\rho^3 - \frac{m(n+1)}{2} \rho^n$$

并对 ρ 在限 0 至 1 之間积分。积分計算以后得到

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} + \psi_1 W_0^3 - \psi_2 W_0^2 + (\psi_3 + \psi_4 m_1) W_0 - \psi_5 m_1 p^* - \psi_6 m_2 P^* = 0 \quad (2.12)$$

式中

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\Theta_{21}}{\Theta_3}, \quad \psi_2 = \frac{\Theta_{22}}{\Theta_3}, \quad \psi_3 = \frac{\Theta_{23}}{\Theta_3}, \quad \psi_4 = \frac{\Theta_1}{\Theta_3}, \\ \psi_5 &= \frac{\Theta_4}{\Theta_3}, \quad \psi_6 = \frac{\Theta_5}{\Theta_3}, \\ \Theta_1 &= + \frac{2k'_2(n-3)}{3(2m-1)} [n+3-3m(n+1)], \\ \Theta_{21} &= + \frac{2k_2}{3(2m-1)^3} \left\{ \frac{48}{49-k^2} \left[\frac{m(n+1)}{n+11} - \frac{1}{14} - \frac{m^2(n+1)^2}{8(n+4)} \right] + \frac{48m(n+1)}{(n+4)^2-k^2} \left[\frac{1}{n+11} - \frac{m(n+1)}{2(n+4)} + \frac{m^2(n+1)^2}{4(3n+5)} \right] - \frac{6m^2(n+1)^2}{(2n+1)^2-k^2} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{n+4} - \frac{2m(n+1)}{3n+5} + \frac{m^2(n+1)^2}{4(2n+1)} \right] + \\ &\quad \left. + R_1 \left[\frac{1}{k+7} - \frac{m(n+1)}{n+k+4} + \frac{m^2(n+1)^2}{4(2n+k+1)} \right] \right\}, \\ \Theta_{22} &= + \frac{k_2}{3(2m-1)^2} \left\{ \frac{96}{25-k^2} \left[\frac{1}{12} - \frac{m(n+1)}{n+9} + \frac{m^2(n+1)^2}{8(n+3)} \right] - \frac{48m(n+1)}{(n+2)^2-k^2} \left[\frac{1}{n+9} - \frac{m(n+1)}{2(n+3)} + \frac{m^2(n+1)}{12} \right] + \frac{48}{49-k^2} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{12} - \frac{m(n+1)}{2(n+9)} \right] - \frac{48m(n+1)}{(n+4)^2-k^2} \left[\frac{1}{n+9} - \frac{m(n+1)}{4(n+3)} \right] + \frac{6m^2(n+1)^2}{(2n+1)^2-k^2} \left[\frac{1}{n+3} - \frac{m}{3} \right] - \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
& -R_1 \left[\frac{1}{k+5} - \frac{m(n+1)}{2(n+k+2)} \right] - 4R_2 \left[\frac{1}{k+7} - \right. \\
& \left. - \frac{m(n+1)}{n+k+4} - \frac{m^2(n+1)^2}{4(2n+k+1)} \right] \Bigg\}, \\
\Theta_{23} = & + \frac{k_2}{3(2m-1)} \left\{ \frac{24m(n+1)}{(n+2)^2 - k^2} \left[\frac{1}{n+7} - \right. \right. \\
& \left. - \frac{m(n+1)}{4(n+2)} \right] - \frac{24}{25-k^2} \left[\frac{1}{5} - \frac{m(n+1)}{n+7} \right] + \\
& \left. + 2R_2 \left[\frac{1}{k+5} - \frac{m(n+1)}{2(n+k+2)} \right] \right\}, \\
\Theta_3 = & + \frac{1}{60(2m-1)(n+2)(n+3)(n+7)} \times \\
& \times \{ 5(1-2m)(n+2)(n+7)[n+3 - \\
& - 3m(n+1)] + 30m[4(n+2) - \\
& - m(n+1)(n+7)] - \\
& - (n+2)(n+3)[n+7 - 5m(n+1)] \}, \\
\Theta_4 = & + \frac{3m(n+1) - n - 3}{12(n+3)}, \quad \Theta_5 = + \frac{2m-1}{8\pi}, \\
\tau = & \frac{t}{a\sqrt{m_1}} = \frac{t\hbar}{b^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

为了造表,用表1中的材料的弹性常数^[3]的值.

表 1

材 料	弹 性 常 数						
	E_1 公斤/厘米 ²	E_2 公斤/厘米 ²	$\nu_1^{(1)}$	$\nu_2 = \nu$	$k_1 = k_1^{(2)}$	$k_2 = k_2'$	$k = n^3$
各向异性	0.6×10^5	1.2×10^5	0.036	0.071	1	2	1.41421
各向异性	1.2×10^5	0.6×10^5	0.071	0.036	0.5	1	0.70707
各向同性	0.6×10^5	0.6×10^5	0.036	0.036	1	1	1

1) 原文誤为 ν_2 .——譯者注

2) 原文誤为 $k_1 = k_2'$.——譯者注

3) 原文誤为 $k = h$.——譯者注

在表 2 和表 3 中, 引入不同材料在四种边界条件下的系数 R_1 , $\dots, \psi_4^0$ 等的值。

表 2

	夹 住 边			固 定 边		
	$E_1 < E_2$	$E_1 > E_2$	$E_1 = E_2$	$E_1 < E_2$	$E_1 > E_2$	$E_1 = E_2$
m	0.82843	1.17157	1	0.82843	1.17157	1
η	∞	∞	∞	0	0	0
R_1	1.29902	5.56512	3	1.89573	11.32781	5.07469
R_2	-1.44181	-2.53512	-2	-2.35738	-6.74286	-4.07469
$\Theta_1^{1)}$	5.10532	2.60935	2.66667	5.10532	2.60935	2.66667
Θ_2	0.01895	0.02938	0.025	0.01895	0.02938	1.025
Θ_4	0.02994	0.05154	0.04167	0.02994	0.05154	0.04167
Θ_5	0.02614	0.05344	0.03979	0.02614	0.05344	0.03979
Θ_{21}	0.03914	0.05759	0.03571	0.0861	0.18584	0.09335
Θ_{22}	0.09338	0.14508	0.08333	1.23512	0.5217	0.25623
Θ_{23}	0.05048	0.06659	0.04444	0.14564	0.31238	0.15963
ψ_1	2.06544	1.96018	1.42856	4.54354	6.32539	3.73400
ψ_2	5.24432	4.93381	3.3332	12.40738	17.75698	10.2494
ψ_3	2.66386	2.26651	1.77778	7.68548	16.6324	6.3852
ψ_4	269.41002	88.81381	106.66667	269.41002	88.81381	106.66667
ψ_5	1.57995	1.75425	1.66667	1.57995	1.75425	1.66667
ψ_6	1.37942	1.81892	1.59160	1.37942	1.81892	1.59160
m_1^*	0.00247	0.00944	0.00156	0.00291	0.02060	0.00607
m_1^{**}	0.00659	0.02109	0.00764	0.01339	0.06737	0.02805
κ_1	3.3548	3.8524	2.9834	3.3548	3.8524	2.9834
κ_2	0.23668	0.15272	0.19976	0.68288	0.71644	0.7174
ψ_2^0	11.2545	14.84088	8.90046	11.2545	14.84088	8.90046

3. 正交各向异性球壳的自由和强迫振动 首先来看正交各向异性球壳的固有线性振动。由方程(2.12), 略去非线性项, 得

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} + (\psi_3 + \psi_4 m_1) W_0 = 0. \quad (3.1)$$

方程(3.1)是谐振动的方程。我们将找方程(3.1)下列形式的

1) 原书誤为 Θ_2 。——譯者注

表 3

自由支持边				刚性支持边		
	$E_1 < E_2$	$E_1 > E_2$	$E_1 = E_2$	$E_1 < E_2$	$E_1 > E_2$	$E_1 = E_2$
m	1.71236	4.78649	2.9305	1.71236	4.78649	2.9305
η	∞	∞	∞	0	0	0
R_1	9.95951	133.24368	40.80498	21.70425	417.0650	105.29226
R_2	-4.09363	-13.37998	-7.79150	-8.96068	-49.9071	-21.88175
Θ_1	6.96566	3.70982	3.72572	6.96566	3.70982	3.72572
Θ_2	0.10198	0.2878	0.1826	0.10198	0.2878	0.1826
Θ_3	0.1508	0.46772	0.28298	0.1508	0.46771	0.28298
Θ_4	0.09648	0.34111	0.19341	0.09648	0.34111	0.19341
Θ_{21}	0.09502	0.20385	0.10406	0.4557	1.39543	0.58852
Θ_{22}	0.27478	0.60204	0.30817	1.3623	4.55036	1.85308
Θ_{23}	0.17694	0.3977	0.20311	0.90540	3.29897	1.26695
$\psi_1^{(1)}$	0.93176	0.70831	0.56988	4.46852	4.84861	3.22464
ψ_2	2.69444	2.09187	1.68768	13.3585	15.81084	10.1483
ψ_3	1.7350	1.38186	1.11232	8.87822	11.46272	6.9384
ψ_4	68.30418	12.89027	20.40372	68.30418	12.89027	20.40372
ψ_5	1.47872	1.62512	1.54973	1.47872	1.62512	1.54973
ψ_6	0.94607	1.18523	1.05920	0.94607	1.18523	1.05920
m_1^*	0.00312	0.01262	0.00672	0.01618	0.11068	0.05165
m_1^{**}	0.01262	0.05256	0.02714	0.06491	0.44399	0.18171
κ_1	1.6892	1.4682	1.3101	1.6892	1.4682	1.3101
κ_2	0.60808	0.64156	0.6532	3.11144	5.32168	3.97469
ψ_4^2	2.8534	2.15398	1.70252	2.8534	2.15398	1.70252

解:

$$W_0 = W_* \cos \omega a \sqrt{m_1 \tau}, \quad (3.2)$$

将(3.2)代入(3.1),得

$$\omega = \frac{1}{a\sqrt{m_1}} \sqrt{\psi_3 + \psi_4 m_1} = \kappa_1 \frac{\delta}{b^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \sqrt{1 + \kappa_2 \left(\frac{h}{\delta}\right)^2}. \quad (3.3)$$

式中

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\psi_4}{3(k'_1 k'_2 - \nu^2)}}, \quad \kappa_2 = 12(k'_1 k'_2 - \nu^2) \frac{\psi_3}{\psi_4}. \quad (3.4)$$

1) 原书誤为 ψ_1 。——譯者注

对于表 1 所述的材料及各种边界条件, κ_1 及 κ_2 之值列于表 2 及 3.

在正交各向异性圆板的情形 ($h = 0$), 对自振频率有

$$\omega = \kappa_1 \frac{\delta}{b^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$$

現在我們轉过来研究考虑非綫性項的自由振动. 令 $V_0 = \frac{\partial W_0}{\partial \tau}$,

得

$$V_0 dV_0 + f(W_0) dW_0 = 0. \quad (3.5)$$

式中

$$f(W_0) = \psi_1 W_0^3 - \psi_2 W_0^2 + (\psi_3 + \psi_4 m_1) W_0. \quad (3.6)$$

积分(3.5)式, 得

$$\frac{1}{2} V_0^2 + \frac{1}{4} \psi_1 W_0^4 - \frac{1}{3} \psi_2 W_0^3 + \frac{1}{2} (\psi_3 + \psi_4 m_1) W_0^2 = \mathcal{E}. \quad (3.7)$$

式(3.7)是总能量; 位能将是

$$\Pi = \frac{1}{4} \psi_1 W_0^4 - \frac{1}{3} \psi_2 W_0^3 + \frac{1}{2} (\psi_3 + \psi_4 m_1) W_0^2. \quad (3.8)$$

研究曲綫(3.6). 它的极值发生在

$$W_{0\mp} = \frac{\psi_2 \mp \sqrt{\psi_2^2 - 3\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)}}{3\psi_1}$$

处, 且极值为

$$\begin{aligned} f(W_{0-}) = & \frac{1}{27\psi_1^3} \{ -\psi_2[2\psi_2^2 - 9\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)] \pm \\ & \pm 2[\psi_2^2 - 3\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)]\sqrt{\psi_2^2 - 3\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)} \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

当 $W_{0-} = W_{0+}$ 时, 曲綫 $f(W_0)$ 有拐点. 这种情形当

$$m_1^{**} = \frac{\psi_2^2 - 3\psi_1\psi_3}{3\psi_1\psi_4} \quad (3.10)$$

时发生.

1) 原书誤为 $\frac{1}{4} \psi_2 W_0^3$. — 譯者注

在 $V_0 = 0$, $W_0^{(1)} = 0$, $W_0^{(2,3)} =$

$$= \frac{1}{2\psi_1} [\psi_2 \pm \sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)}] \quad (3.11)$$

时, 方程式(3.5)将有奇点.

位能曲线上由条件 $W_0^{(2)} = W_0^{(3)}$ 所确定的拐点对应于值¹⁾

$$m_1^* = \frac{\psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3}{4\psi_1\psi_4} \quad (3.12)$$

对于前面研究过的材料和边界条件, m_1^* 和 m_1^{**} 的值列于表 2 和表 3 中.

位能曲线的极值由下列公式来确定

$$\prod_{(2,3)} = \frac{1}{24\psi_1^3} \{ -\psi_2^4 - 6\psi_2^2(\psi_3 + \psi_4 m_1)^2 + 6\psi_1\psi_2^2(\psi_3 + \psi_4 m_1) \pm \psi_2[\psi_2^2 - 4\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)]\sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)} \} \quad (3.13)$$

此外, 下列的挠度表示式也满足极值 $\prod_{(2,3)}$.

$$\left. \begin{aligned} W_0^{(2',2'')} &= \frac{1}{6\psi_1} \left[\psi_2 - 3\sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 2\sqrt{\psi_2}\sqrt{\psi_2 - 3\sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)}} \right]; \\ W_0^{(3',3'')} &= \frac{1}{6\psi_1} \left[\psi_2 - 3\sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 2\sqrt{\psi_2}\sqrt{\psi_2 + 3\sqrt{\psi_2^2 - 4\psi_1(\psi_3 + \psi_4 m_1)}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

现在研究正交各向异性球壳的非线性强迫振动. 假定法向压力 p^* , 集中力 P^* 和挠度 W_0 有相同的振动频率, 则

$$p^* = p_* \cos \omega t, \quad P^* = P_* \cos \omega t, \quad W_0 = W_* \cos \omega t. \quad (3.15)$$

由于在四分之一周期振动中 W_0 对于方程式(2.12)正交性的要求, 我们得到

1) 公式(3.5)–(3.14)与[1]中Э. И. 格里高留克的公式可以对照比拟.

2) 原书分母误为 $4\psi_1\psi_3$.——译者注

3) 原书括号前分母误为 $6\psi_1$.——译者注

$$\tau_1^* = 4\pi \sqrt{3(k_1'k_2' - v^2)} \left[\frac{3\phi_1}{4m_1} W_*^2 - \frac{8\phi_2}{3\pi m_1} W_* + \frac{\phi_3}{m_1} + \phi_4 - \frac{\phi_5 p_* + \phi_6 P_*}{W_*} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

同时振动周期可由下式确定

$$T = \tau_1^* \frac{b^2}{\delta} \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}} \quad (3.17)$$

对綫性振动, 公式(3.4)可由公式(3.16)得到. 我們来研究非綫性固有振动的周期. 在这种情形, 在(3.16)中使 $p_* = P_* = 0$. 我們有

$$\tau_1^* = 4\pi \sqrt{3(n^2 - v^2)} \left[\frac{3\phi_1}{4m_1} W_*^2 - \frac{8\phi_2}{3\pi m_1} W_* + \frac{\phi_3}{m_1} + \phi_4 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$\text{当} \quad \frac{3\phi_1}{4m_1} W_*^2 - \frac{8\phi_2}{3\pi m_1} W_* + \frac{\phi_3}{m_1} + \phi_4 = 0 \quad (3.19)$$

时, 非綫性固有振动的周期等于零¹⁾.

解此方程式, 得到振幅最大值

$$W_{*+} = \frac{16\phi_2}{9\pi\phi_1} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{27\pi^2\phi_1}{64\phi_2^2} (\phi_3 + \phi_4 m_1)} \right], \quad (3.20)$$

同时, 在条件

$$\left. \begin{aligned} [m_1] &= \frac{1}{\phi_4} \left(\frac{64\phi_2^2}{27\pi^2\phi_1} - \phi_3 \right)^{2)} \\ [W_*] &= \frac{16\phi_2}{9\pi\phi_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

下, 有 $W_{*-} = W_{*+}$.

4. 正交各向异性錐壳 在此种情形, 相对于壳頂的中面方程式为 [1]

$$f = h\rho \quad (4.1)$$

1) 这里是根据原书譯出, 但由(3.18)式括号方次为 $-\frac{1}{2}$, 满足(3.19)式时, 周期似应为 ∞ .——譯者注

2) 原书誤为 $\frac{1}{\phi_1} \left(\frac{64\phi_2^2}{27\pi^2\phi_1} - \phi_3 \right)$.——譯者注