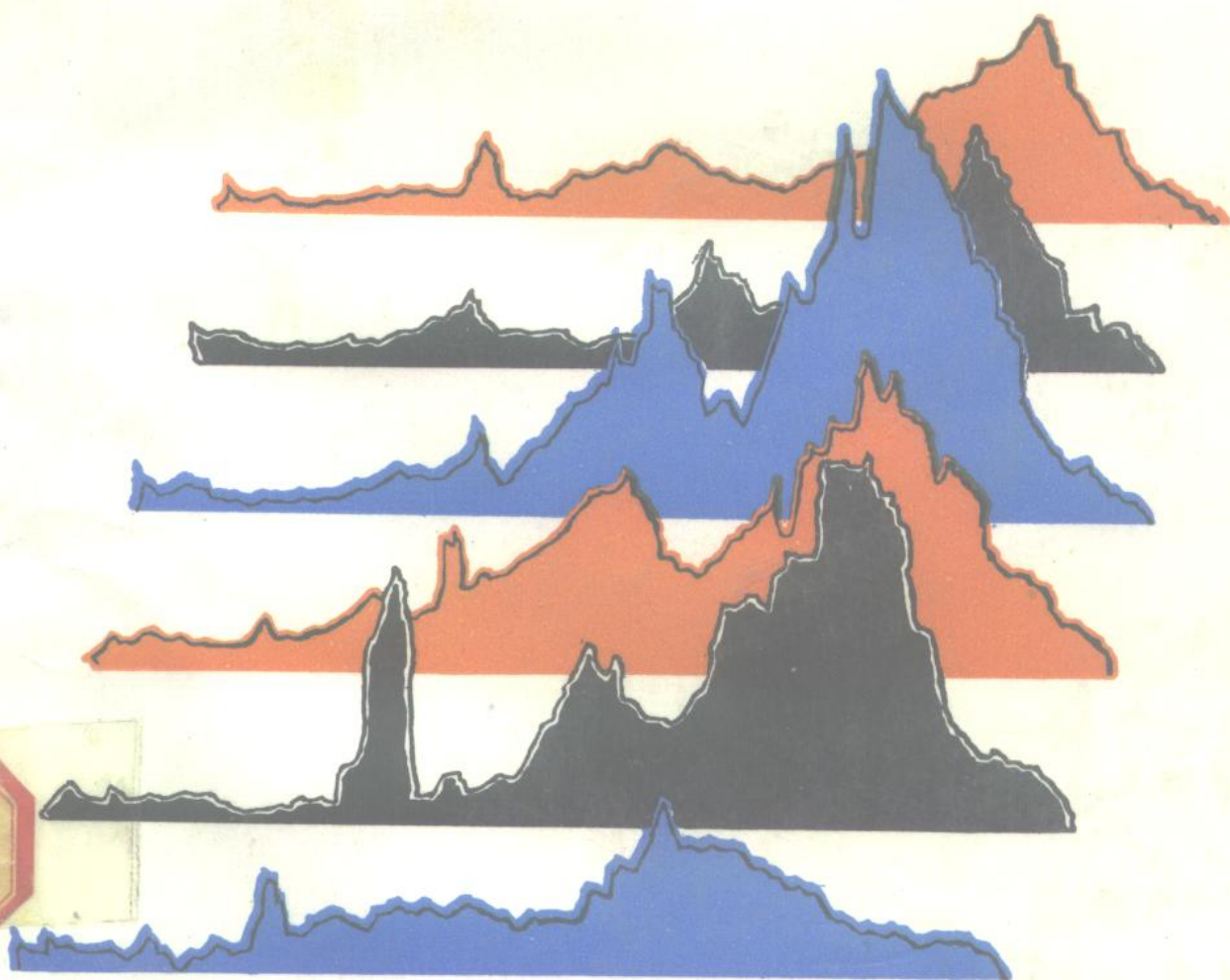


机械工程 测试技术

刘金环 任玉田 编



北京理工大学出版社

机械工程测试技术

刘金环 任玉田 编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书以讲述动态测试技术为主，也涉及到有关的静态测试问题。基本内容包括两部分：(1) 信号的描述、分析与处理，在第一章和第七章中叙述；(2) 信号变换、调节和记录的原理和手段，分别在第二章、第三章、第四章、第五章及第六章中叙述。为了加深对基础知识的理解，在第八章、第九章及第十章中介绍了温度、振动和噪声等典型参数的测试。本书可作为高等工科院校机械类有关专业的教材，亦可供从事非电量电测技术和动态测试工作的工程技术人员阅读。

机械测试技术

刘金环 任玉田 编

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

通县建新印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 16印张 399千字

1990年6月第一版 1990年6月第一次印刷

ISBN 7-81013-331-4/TH·35

印数：1-4200册 定价：3.60元

前 言

“机械工程测试技术”是高等院校机械类专业学生必修的一门技术基础课。本书是根据1983年4月全国机械工程测试技术协会所审定的测试技术教学大纲，并在总结我们几年来教学和科研的实践经验的基础上编写的。

书中内容的选取主要根据国内外机械工程测试技术的发展，从适应现代化、自动化的需要出发，本着有利于教与学，有利于培养学生的科学实践能力和创新精神，重点阐述了测试技术的基础知识、基本理论和数据处理的基本方法以及所选用的仪器设备等。同时将数字技术引进教材，并介绍了微型计算机在测试技术中的应用，本书在一定的程度上反映了国内外测试技术的新成就。本书论述上力求由浅入深，从实践到理论，从数学逻辑式到物理概念，明白易懂，重点突出，难点分散，以实际例子的讨论引导学生和读者钻研，便于自学。

为了帮助学生和读者进一步巩固和深化学习内容，每章都有例题和习题。

为了扩大学生和读者的视野，加深对本课程基础理论的理解，培养、锻炼解决实际问题的能力，本书还介绍了振动、噪声、温度等几个典型动态参数的测试方案设计、测试方法及数据处理系统等，并以框图的形式介绍了国内外的测试方案、方法和新的测试装置（仪器）等。

全书共十章。第二、三、四、五、六章由任玉田编写。第一、七、八、九、十章由刘金环编写。

全书由郑慕侨教授主审，他对初稿提出了许多宝贵意见，谨致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

1989年12月

绪 论

一、测试工作的基本任务

测试工作的基本任务是通过测试手段,对研究对象中有关信息量作出比较客观、准确的描述,使我们对其有一个恰当的全面的认识,并达到进一步改造和控制研究对象的目的。研究对象所包含的信息量是相当丰富的,在实践中,人们总是根据要求测出所感兴趣的有限的信息,而不是全部信息。

现代测试技术的一大特点是电测法的采用,即电测非电量,其测量结果通常是随时间变化的电量,亦即电信号。电信号中,包含着有用信息,也含有大量不需要的干扰。干扰的存在给测试工作带来麻烦,测试工作中的一项任务就是如何从被“污染”的信号(含有干扰的信号)中提取有用的信息。应该指出的是干扰并不都是有害的,例如,在一些场合中,可以利用噪声来进行故障诊断等。

科学技术的发展和生产水平的提高与测试技术密切相关。科学实验的过程就是对研究对象组织实验,进行测量,并对测量结果进行分析,达到认识的过程。不断发展的测试技术能够使我们研究对象中所感兴趣的物理量作出更客观、准确的描述,从而能更深刻地、全面地认识研究对象。测试技术达到的水平越高,科学技术的成就就越加深广。在现代化的生产中,其自动化水平不断提高,自动化范围不断扩大,这使得测试技术在生产中的地位变得越来越重要。在自动化生产过程中,必须测量出表征操作过程各个环节特征的各个参数,并加以调节、控制,以保证生产过程的正常进行。没有不断发展的测试技术就不可能有不断发展的现代化生产。科学技术的进步,生产水平的提高不仅对测试技术提出了更高的要求,而且也给测试技术的发展提供了丰富的物质手段和技术条件。在现代测试技术中几乎利用了所有的近代新技术和新理论,例如,半导体技术、激光技术、光纤技术、声控技术、遥感技术、自动化技术、计算技术及数理统计、控制论、信息论等等。计算机技术的发展引起了测试技术的新飞跃,促进了传感器的微型化和智能化,使测试过程自动化以及“实时”测试成为可能。

二、机械工程中的测试工作

测试技术涉及的面非常之宽,它几乎渗透到所有的行业。本书所讨论的是机械工程中的测试技术。在机械工程中所要测试的量多为各种力、位移、速度、加速度、温度、噪声等等。所测试的量可能是静态的,即不随时间而变化或随时间变化十分缓慢;也可能是动态的,即随观察时间作较快的变化。在动态测试中,必须考虑测试系统的动态特性对测试结果的影响,这是本书讨论的重点。

测试技术在机械工程中的应用主要有以下几个方面:

(1) 为了某种目的,对某个或某些参数进行测试。例如,尺寸测量、力的测量、温度测量、噪声测量等。

(2) 对结构(或系统)动态响应特征的测试。例如,机床振动对加工质量及劳动生产率影响甚大,为了提高加工精度和劳动生产率,改善加工表面质量,应采用具有良好振动性能的机床。要改善机床的振动性能,就要对机床的振动进行研究。研究机床振动离不开对机床的

动态特性的测试。因为在机床的动态特性中几乎包含了与机床振动有关的全部信息。

(3) 作为自动化或控制系统中的一个环节。例如，数控机床、自适应控制系统乃至柔性制造系统都离不开对某些参数的测量、变换、处理和反馈。

(4) 进行现场监视(或监控)。例如，自动加工中刀具磨损及断裂的监视，毛坯质量的监视以及零件尺寸的监视等。对于大型、高速旋转机械，一般总要进行现场监视，以便在大的事故发生之前将其故障探出。

三、课程内容及特点

本课程主要讨论机械工程动态测试中的传感器、中间变换电路及记录装置的工作原理，测试装置静、动态特性的评价方法，测量信号的描述、分析和处理以及微机在测试中的应用。

测试技术是数学、物理学、电工学、电子学、自动控制工程以及计算机技术的综合运用。本课程又是实践性很强的课程，学习本课程的学生必须参加必要的实验，以进行实验能力的训练。

通过本课程的学习，学生应掌握以下几方面的知识：

(1) 了解常用传感器、中间变换电路及记录装置的工作原理和性能，并能依据测试要求进行比较合理的选用。

(2) 掌握测试装置的静、动态特性的评价方法和不失真的测量条件，并且能正确地运用于测试装置的分析 and 选择。

(3) 掌握信号时域和频域的描述方法，建立明确的信号的频谱概念，掌握频谱分析的基本原理和方法；了解相关分析、功率谱分析的基本原理及其应用，了解数字信号分析的基本概念。

(4) 对动态测试工作的基本问题有一个比较完整的概念，对机械工程中某些参数的测试能自行确定测试方法，自行设计测试系统，并能对测量结果进行数据处理。

目 录

第一章 信号的描述及分类

第一节 概述	(1)
第二节 周期信号的频谱分析——傅里叶级数	(3)
第三节 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换	(11)
第四节 几种常用信号的频谱	(25)
第五节 随机信号	(30)
习题	

第二章 测量系统的响应特性

第一节 测量系统的组成	(35)
第二节 测量系统的线性化	(35)
第三节 测量系统的静态特性	(37)
第四节 测量系统的动态特性	(39)
第五节 关于不失真测量	(47)
习题	

第三章 传感器

第一节 电阻式传感器	(50)
第二节 电感式传感器	(60)
第三节 电容式传感器	(67)
第四节 电动力式传感器	(71)
第五节 压电式传感器	(74)
第六节 热电偶	(80)
习题	

第四章 信号模拟转换电路

第一节 电桥	(83)
第二节 滤波器	(90)
第三节 按调幅、解调方式工作的测量电路	(97)
第四节 按调频、解调方式工作的测量电路	(100)
习题	

第五章 微机信号处理系统简介

第一节 D/A转换	(103)
第二节 A/D转换	(105)
第三节 微型计算机	(110)
第四节 D/A、A/D转换器与微机接口	(115)
第五节 微机信号采集、处理系统举例	(116)
习题	

第六章 指示、记录装置

第一节 指针刻度仪表	(120)
第二节 笔式记录仪	(121)

第三节	光线示波器	(122)
第四节	磁带记录器	(125)
第五节	简单数字、符号显示装置	(130)
第六节	图象显示器	(131)
习题		
第七章 数据处理和信号分析		
第一节	误差基本概念	(133)
第二节	随机误差理论	(135)
第三节	系统误差	(137)
第四节	间接测量误差的传递	(141)
第五节	实验数据处理方法	(143)
第六节	模拟信号数据处理概念	(148)
第七节	数字信号分析和处理	(162)
第八节	离散傅里叶变换	(169)
第九节	快速傅里叶变换	(173)
第十节	离散的功率谱密度计算	(177)
习题		
第八章 温度测量		
第一节	温度及温度标准	(180)
第二节	测温方法及仪器设备	(181)
第三节	热电阻温度计	(183)
第四节	热电偶	(185)
第五节	热辐射测温法	(190)
第九章 机械振动测试		
第一节	概述	(196)
第二节	测振系统	(198)
第三节	振动系统动态特性测试	(203)
第四节	机械阻抗测试	(208)
第五节	振动测试分析方法及其测试系统	(210)
第六节	振动测试仪器的标定	(215)
第十章 噪声测量		
第一节	振动与声	(219)
第二节	噪声及其物理量度	(221)
第三节	传声器	(226)
第四节	声级计	(231)
第五节	噪声分析仪器	(236)
附录		(240)
参考书目		(248)

第一章 信号的描述及分类

第一节 概 述

在生产实践和科学实验中，为了测试各种非电物理量，均需要观测大量的物理现象和参数的变化，且需要将它们变换成易于测量、记录和分析的信号，并通常变换成随时间变化的电压（或电流）信号。

一个信号中包含有丰富的信息，其中也包含着反映被测物理系统的状态或特性的有用的信息，它是人们认识客观事物的内在规律、研究分析事物之间的相互关系，预测未来发展趋势的依据。

对于各种不同信号，可从不同角度进行分类。在动态测试技术中，将信号作为时间函数来研究。按能否用明确的时间函数关系描述，可将信号分为确定性信号和随机信号（即非确定性信号）两大类，见图1-1所示。

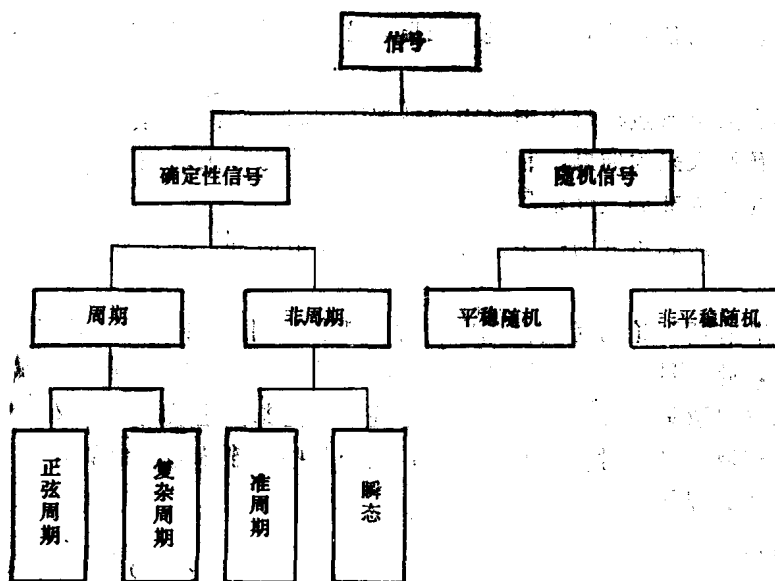


图1-1 信号分类

确定性信号是指可用明确的数学关系来描述的，或者说若信号被表示为一确定的时间函数，对于指定的某时刻，可以确定一相应的函数值的信号，见图1-2，例如，简谐信号等。确定性信号又分为周期信号和非周期信号。

周期信号包括简谐周期信号和复杂的周期信号，所谓复杂的周期信号就是由基频整数倍信号组合而成的信号。

非周期信号包括准周期信号和瞬态信号。准周期信号是由一些不同频率的简谐信号合成的信号，但是它没有周期性，组成它的简谐分量中总会有一个分量与另一个分量的频率之比为无理数。复杂的周期信号的诸简谐分量中任意两个分量的频率比都是有理数，这是准周

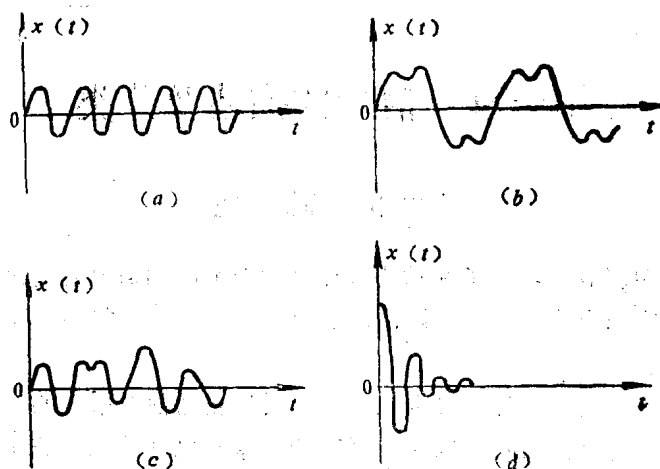


图1-2 确定性信号

- (a) 简谐波信号; (b) 复杂周期信号;
(c) 准周期信号; (d) 瞬态信号。

期信号与复杂周期信号的不同点。瞬态信号其时间函数为各种脉冲函数或者衰减函数，如图1-2(d)所示。瞬态信号也可说或是除准周期信号以外的一切可以用时间函数来描述的非周期信号。

随机信号具有随机特点，每次观测的结果都不相同，无法用精确的数学关系式来描述，更不能由此准确预测未来的结果，而只能用概率统计的方法来描述它的规律，所以此种信号称为随机信号，也称为非确定性信号。

根据信号波形的形态可分为：连续时间信号与离散时间信号，并简称为连续信号与离散信号。

连续信号：若在所讨论的时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点之外）都可给出确定的函数值，此信号称为连续信号，见图1-3(a)所示。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的（只取某些规定值）。对于时间和幅值都是连续的信号又称为模拟信号。

离散信号：离散信号在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，而在其它时间没有定义，见图1-3(b)所示。

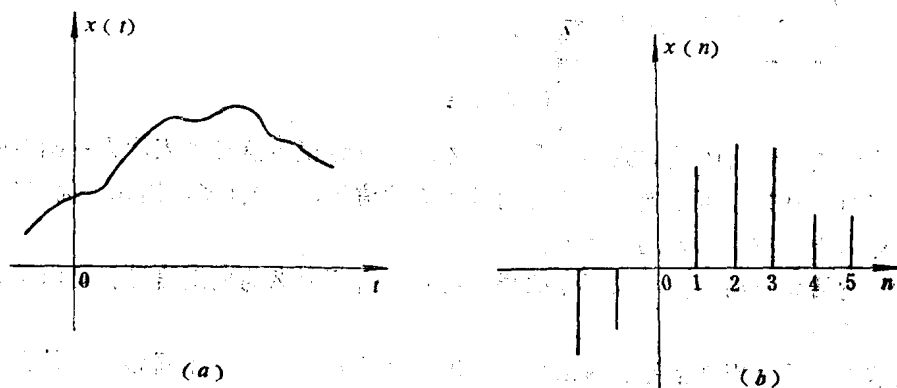


图1-3 连续信号与离散信号

- (a) 连续信号; (b) 离散信号

第二节 周期信号的频谱分析

傅里叶级数

一、周期信号的定义

周期信号是依一定的时间间隔周而复始出现，且无始无终的信号，它满足下列关系式

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad (1-1)$$

式中， $n=0,1,2,\dots$ （任意整数）； T 为周期（正的常数）。

如图1-4所示，由于周期信号是每隔一定的时间 T ，按相同规律重复变化，因此，它在一个周期内的特性可表征全时间域的特性。

在工程上常遇到很多周期信号，其中最为典型的是正弦信号，常用下式表示

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \omega t \\ &= A \sin(\omega t + n2\pi) \\ &= A \sin \omega(t + n \frac{2\pi}{\omega}) \end{aligned} \quad (1-2)$$

二、周期信号的频谱

1. 三角形式的傅里叶级数

在数学上对任一在有限期间的周期函数 $x(t)$ 凡满足狄里赫利条件者都可展成三角形式的傅里叶级数，即

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t \\ &\quad + a_2 \cos 2\omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \dots \\ &\quad + a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t + \dots \end{aligned}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1-3)$$

式中静态分量（直流分量）为

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

余弦分量的幅值为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_1 t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos 2\pi n f_1 t dt \end{aligned} \quad (1-5)$$

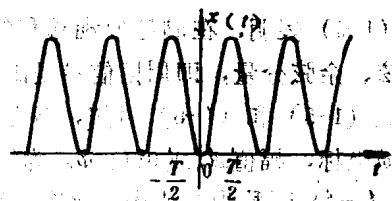
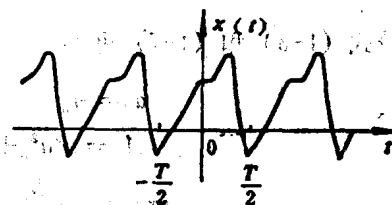
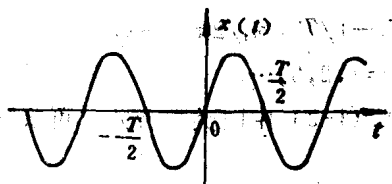


图1-4 周期信号

正弦分量的幅值为

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin 2\pi n f_1 t dt \quad (1-6)$$

式中 T ——周期；

$\omega_1 = 2\pi/T$ ——圆频率；

$f_1 = 1/T = \omega_1/2\pi$ ——频率；

$n = 1, 2, 3, \dots$ 。

将式(1-3)中同类项合并，可改写为

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (1-7)$$

比较式(1-3)和(1-7)可得

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= A_0 \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan \varphi_n &= -\frac{b_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1-8)$$

式(1-3)表明，在满足狄利赫利条件的情况下，任何周期函数都可分解成静态分量及许多正弦、余弦分量，即周期信号是由许多个不同频率的正弦和余弦信号迭加而成的。

由式(1-5)和(1-6)可知，各分量的幅值 A_n 及相角都是 $n\omega_1$ 的函数。若以圆频率（频率）为横坐标，幅值 A_n 或相角 φ_n 为纵坐标绘制成如图1-5所示的线图，则称为频谱。其中 $A_n-\omega$ （ A_n-f ）图称为幅值谱。该图直观地表示出各频率分量的相对大小。图中每条线代表某一频率分量的幅值，称为谱线。连接各谱线顶点的曲线（如图1-5中虚线所示）称为包络线，它反映各分量幅值的变化情况。由于 n 是整数序列，相邻频率的间隔 $\Delta f = f_1 =$

$\frac{1}{T}$ （ $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ），即各频率成分都是 $f_1(\omega_1)$ 的整数倍。通常把频率为 $f_1(\omega_1)$ 的分量称为基频（基波），频率为 $2f_1, 3f_1, \dots$ 等分量分别称为二次谐波、三次谐波等。同理，还可画出分量的相位 φ_n 对频率 $n f_1(n\omega_1)$ 的线图，该图称为相位频谱或简称相位谱。幅值谱和相位谱的例子如图1-5所示。

综上所述，周期信号的频谱只会出现在 $0, f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$ （ $0, \omega_1, 2\omega_1, \dots$ ）等离散频率点上，此频谱称为离散谱，它完全揭示了信号的频率结构。

例1-1 求图1-6中周期性方波信号的频谱。

解 在 $x(t)$ 的一个周期中可表示为

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \frac{T}{4} \\ -A & |t| \geq \frac{T}{4} \end{cases}$$

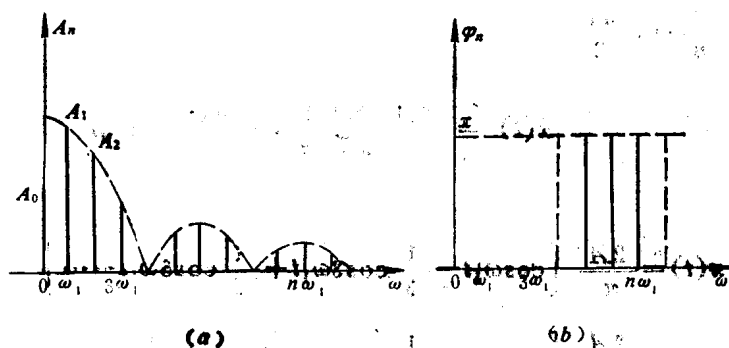


图1-5 周期信号的频谱
(a) 幅值谱; (b) 相位谱。

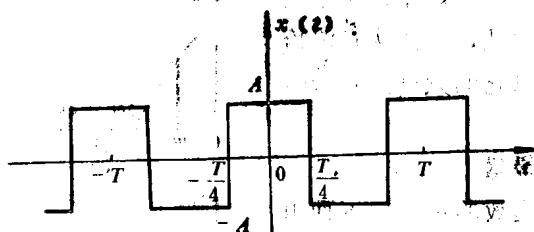


图1-6 周期性方波

因为信号波形相对于纵轴是对称的, 所以

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} A dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} (-A) dt + \int_{\frac{3T}{4}}^T A dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} 2A dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} (-A) dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[2At \Big|_0^{\frac{T}{4}} - At \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right]$$

$$= 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} A \cos n\omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} (-A) \cos n\omega_1 t dt + \int_{\frac{3T}{4}}^T A \cos n\omega_1 t dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[2A \int_0^{\frac{T}{4}} \cos n\omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} (-A) \cos n\omega_1 t dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[\frac{AT}{\pi n} \sin \frac{n2\pi}{T} t \Big|_0^{\frac{T}{4}} - \frac{AT}{2\pi n} \sin \frac{n2\pi}{T} t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right]$$

$$= \frac{2A}{\pi} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_1 t$$

或写作

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2A}{\pi} \left[\cos\omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right] \\ &= \frac{2A}{\pi} \left[\cos\omega_1 t + \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t + \pi) + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t + \dots \right] \end{aligned}$$

周期性方波的频谱见图 1-7 所示。由上述可见，由于对称方波的偶次性，其偶次谐波恰恰落在频谱的零值点，所以它的频谱只包含奇次谐波。

2. 指数形式的傅里叶级数

傅里叶级数也可写成指数的形式。下面由三角函数形式的傅里叶级数间接导出指数形式的傅里叶级数。

根据欧拉公式

$$\cos n\omega_1 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t})$$

$$\sin n\omega_1 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

则式 (1-3) 可写作

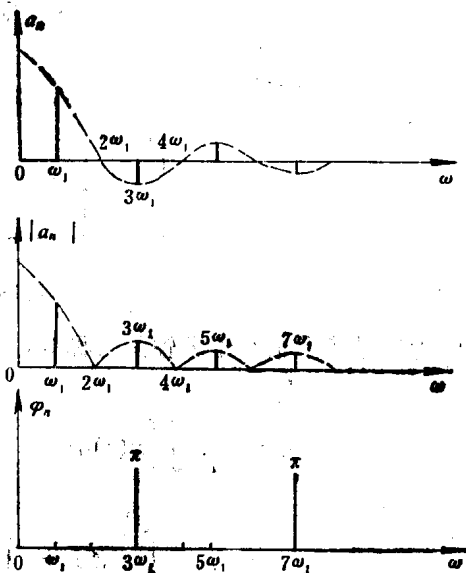


图1-7 对称方波信号的频谱

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_1 t} \right] \quad (1-9)$$

$$\text{令 } X_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad (1-10)$$

$$X_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

$$X_0 = a_0$$

$$\text{则 } x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[X_{-n} e^{-jn\omega_1 t} + X_n e^{jn\omega_1 t} \right]$$

将上式中第一个指数项中 $-n$ 用 n 代替，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_{-n} e^{-jn\omega_1 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} X_n e^{jn\omega_1 t}$$

于是可以得到 $x(t)$ 的指数形式的傅里叶级数，即

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1-11)$$

若将式 (1-5) 和 (1-6) 代入式 (1-10) 得

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1-12) \\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

由式 (1-8) 和 (1-10) 可以看出 X_n 与其它系数之间的关系为

$$\begin{aligned} X_0 &= a_0 = A_0 \\ X_n &= |X_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \\ X_{-n} &= |X_{-n}| e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \\ |X_n| &= |X_{-n}| = \frac{1}{2} A_n \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ |X_n| + |X_{-n}| &= A_n \end{aligned} \quad (1-13)$$

同样可画出指数形式表示的信号
的频谱。因为 X_n 一般是复函数，所以
称这种频谱为复数频谱。又因为 $X_n =$
 $|X_n| e^{jn\varphi}$ ，可以画出复数的幅值谱
 $|X_n|$ 和复数相位谱 φ_n ，
如图 1-8 (a)、(b) 所示。若 X_n 为
实数时，可用 X_n 的正负表示 φ_n 的 0，
 π ，因此常把幅值谱和相位谱合画在
一张图上，见图 1-8(c) 所示。

由于式 (1-11) 中不仅包括正频率
项，而且含有负频率项。因此，频谱
相对于纵轴左右对称。

比较图 1-7 和图 1-8 可知这两种
频谱表示的方法实质上是相同的，其
不同点只在于图 1-7 中每条谱线代
表一个分量的幅值，而图 1-8 中每条
谱线代表一个分量幅值的一半。图 1-8
出现的负频率是由于将 $\sin n\omega_1 t$ ，
 $\cos n\omega_1 t$ 写成指数形式时，从数学的
观点自然分成 $e^{jn\omega_1 t}$ 和 $e^{-jn\omega_1 t}$ 两项，

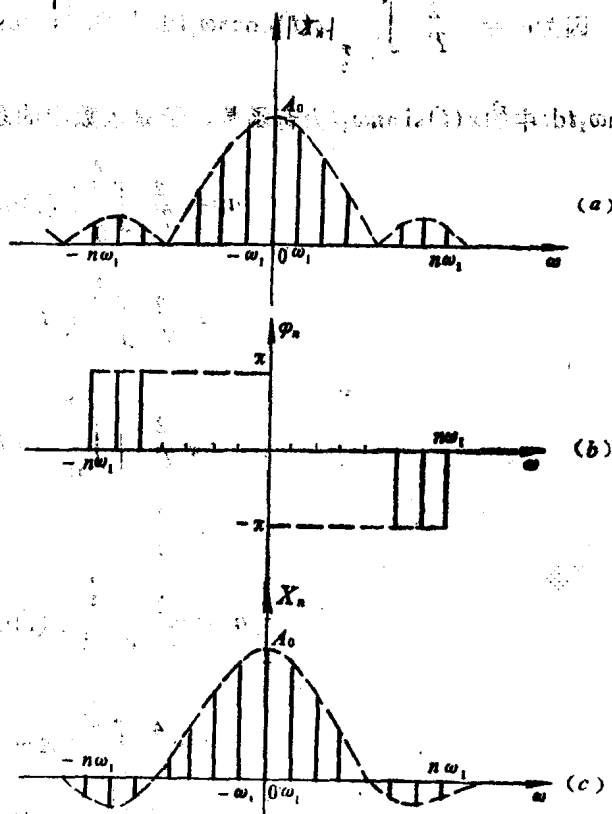


图1-8 周期信号的复数频谱

从而引入了一 $j n \omega_1 t$ 项。因此，负频率的出现完全是数学运算的结果，没有任何物理意义。

三、周期信号的对称性质与傅里叶系数的关系

为了在求周期信号谱时避免复杂的数学运算，下面简要地介绍有关周期信号的性质与傅里叶系数的关系。

若周期函数 $x(t)$ 是实函数，而且它的波形满足某种对称性质，则在其傅里叶级数中有些项将不出现，留下的各项系数的表示式也变得比较简单。

1. 偶函数

若信号波形对于纵轴是对称的，

即满足

$$x(t) = x(-t)$$

则 $x(t)$ 是偶函数，如图1-9所示。

在 $x(t)$ 的一个周期中可表示为

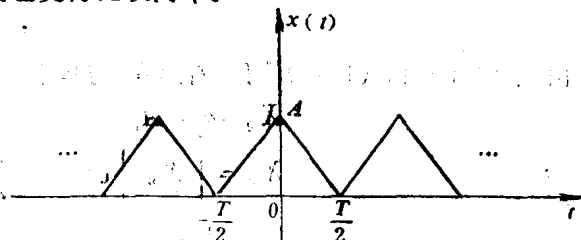


图1-9 偶函数周期三角波

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T}t & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ A - \frac{2A}{T}t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

因为 $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n \omega_1 t dt$ 中的 $x(t) \cos n \omega_1 t$ 为偶函数，而 $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n \omega_1 t dt$ 中的 $x(t) \sin n \omega_1 t$ 为奇函数，于是级数中的系数为

$$|a_n| = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} A dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2A}{T} t dt \right]$$

$$= \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n \omega_1 t dt$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) \cos n \omega_1 t dt$$

$$= \frac{4A}{n^2 \pi^2} \sin^2 \frac{n \pi}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt = 0$$

$$A_n = a_n$$

$$X_n = \frac{a_n}{2}$$

$$\varphi_n = 0$$

$$\text{所以 } x(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos\omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_1 t + \dots \right)$$

所以偶函数的傅里叶级数中不会含有正弦项，只含有直流项和余弦项。

2. 奇函数

若信号波形相对于纵坐标是反对称的，即满足 $x(t) = -x(-t)$

则此时 $x(t)$ 是奇函数，如图1-10所示。

在 $x(t)$ 的一个周期中可表示为

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

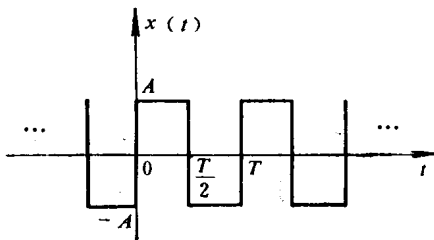


图1-10 奇函数周期方波

由式 (1-4)、(1-5)、(1-6) 可得级

数中的系数为

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_1 t dt \\ &= \frac{2A}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 -\sin n\omega_1 t dt + \frac{2A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_1 t dt \\ &= \frac{2A}{n\pi} (-\cos n\pi + 1) \\ &= \frac{2A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} & n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{故 } x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right)$$