研究生教材

工程优化的算法与分析

张可村 编著

西安交通大学出版社

研究生教材

工程优化的算法与分析

张可村 编著

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书阐述了最优化方法的理论、算法，归纳出算法在计算机上实现的公式与步骤，并对如何建立数学模型，如何选择优化方法，对新算法及其发展动向做了适当的介绍.

本书从工程角度出发，注重基本思想与基本方法，强调可行性、实用性并注意理论的系统性、严密性，推理细致，便于自学.

本书为理工科研究生，计算数学、应用数学、力学、物理及化学等专业高年级学生的选修教材，也可供工程技术人员自学、参考.

工程优化的算法与分析

张可村 编著

责任编辑 李亚东 刘影

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安双桥头印刷厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.875 字数 349千字

1988年1月第1版 1988年5月第1次印刷

印数：1—3500册

ISBN 7-5605-0008-0/O·5 定价：2.85元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的。因此，在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题，大纲，组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

符 号 说 明

本书采用符号，除了书中特别说明外，均按如下规定。

1. E^n 表示 n 维欧氏空间。

2. 大写英文字母或带下标的大写英文字母表示集合或矩阵。

例如 A, B, …, Z 或 A_1, B_2,…, Z_{10}等。

3. 小写英文字母或带上标的小写英文字母表示 E^n 空间中的向量或集合中的元素。

例如 a,b,x,y,z^1,v^1,w^5等等。

4. 带下标的小写英文字母，或希腊字母表示数或E^n中向量的分量。

例如 n 维向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$等。

5. $\|\cdot\|$ 表示E^n空间向量或矩阵的模或范数。

例如 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$则

$$\|a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$ ，“T”表示转置。

6. (x,y)表示向量 x 与 y 的内积或数积，或点积。

例如 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$

则 $$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

7. n 元函数$f(x)$的梯度记为$f'(x)$。即

$$f'(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$$

8. $\in$表示属于，$\in$表示不属于，$\forall$表示任意。

序　言

“做出最合理的规划，选择最佳策略，获得最佳方案。”这是每个人、每个行业所努力寻求的，而这也正是“优化”的基本出发点.因此，优化理论在工程中的应用必将日益广泛，掌握这门知识的要求也会日益强烈和普遍。

目前国内外许多大学已在研究生和本科高年级学生中开设工程优化这门课。然而，已出版的有关书籍，要么涉及数学理论概念太多，阅读困难；要么缺少适当的基本理论和数学推导，过于浅近，很难找到合适的教材。正是鉴于这种状况，本书作者着手编写适用的讲义。经过七次的使用，不断修改，不断补充国内外新的理论和应用研究成果，以及作者本人的研究成果，最后得到本书。

针对理工科学生，怎样将纯数学理论应用于不同的工程实际问题之中，这是本书作者编写的宗旨。因此作者着意将数学基础，优化算法与分析，应用实例三者有机地结合起来。在编写中采用先宏观后微观，先共性后个性的阐述方法。具体地说，把算法分成若干类，首先从共性出发，介绍算法的构思与形成过程，突出理论根据和关键所在，然后很自然地归纳出算法在计算机上实现的公式和步骤；接着研究算法的个性，介绍同类中的各种有名的算法，讨论它们之间的内在联系。另外，在引入数学概念和描述数学模型等方面，作者采用了一些自己总结的较为简捷清晰的处理。总之一个目的，力求有针对性和系统性，使学生在短时间里抓住实质，而不致因算法的名目繁多茫然无措，为在工程实际中应用奠定较好的基础。多次教学实践表明，这样的编写基本起到了预期效果，学生反映也较好。

采用本书作教材时，非数学专业的读者授课学时50—60，“*”所示部分可酌情讲授，跳过也不影响系统性。全书授课学时70—80。

由于水平所限，错漏之处在所难免，恳请读者指正。

本书写作过程中，曾得到西安交通大学副校长蒋德明教授，数学系系主任游兆永教授，研究生院副院长张文修教授的支持和鼓励；上海科技大学王德人教授审阅了全书，并提出宝贵意见；另外，西安交通大学研究生院、数学系和计数教研室领导曾给予大力支持；使用过此书初稿的研究生和计数专业学生对本书提出过有益的建议，在此一并致谢。

张可村

1987.8.于西安交通大学

目　录

第一章　工程优化的数学基础和基本理论

本章将简要介绍优化方法中常用的数学概念和理论。在具备了高等数学和线性代数的基础，并熟练掌握此章所介绍的内容之后，就可顺利学习本书中介绍的各类优化方法，同时也为在此领域内进行更深入的研究打下了基础。

§1.1　凸　集

工程优化的基本任务就是解决 n 元函数 $f(x)$ 在某一区域 D 上的极值问题，即

$$\min_{x\in D} f(x) \qquad \text{或} \qquad \max_{x\in D} f(x)$$

在建立求解这类问题的各种数值方法时，总是首先在某一特殊集合（如凸集）上对于某一类特殊函数（如凸函数）进行，然后再推广应用到一般情况。为此，本节着重讨论凸集的一些基本理论和基本概念。

一、集　合

集合的表示法　用 D 表示 n 维欧氏空间 E^n 中一集合，定义为：

$$D=\{x|\,g(x)\leqslant 0,x\in E^n\}$$

其中，$g(x)$ 为某一给定的实函数；$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

例如，$D=\{x|\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\leqslant 1\}$，当 $n=2$ 时，表示圆心在

坐标原点，半径为1的圆；当$n=3$时，表示球体。

集合的运算　设有三个集合A、B、C。

交集　既属于B又属于C的元素的全体构成的集合A，称为B和C之交集．记为

$$A=B\cap C$$

并集　若A中的元素不属于B便属于C，且B、C中的任何元素都属于A，称A是B、C之并集。记为

$$A=B\cup C$$

差集　属于B但不属于C的元素的全体构成的集合A，称为B与C的差集。记为

$$A=B\setminus C$$

邻域　设$x^0\in E^n$和数$\delta>0$，

$$O(x^0,\delta)=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}<\delta\right\}$$

称$O(x^0,\delta)$为x^0的δ邻域；若将花括号中的“$\leqslant$”改成严格不等号“$<$”，则称$O(x^0,\delta)$为x^0的去心δ邻域

内点　设$D\subset E^n$，若$x^0\in D$，且存在$\delta>0$，有

$$O(x^0,\delta)\subset D$$

称x^0是D的内点。

边界点　若x^0的任何δ邻域，既含D的点，又含不属于D的点，称x^0为D的边界点。

聚点　若x^0的任何去心δ邻域至少含D的一个点，称x^0是D的聚点。

导集　D的全部聚点所构成的集合称为D的导集。记为D'。

闭包　称$\overline{D}=D\cup D'$为D的闭包。

开集　由内点构成的集合。

闭集　若$D'\subset D$，称D为闭集。

紧集　若D中任何无穷点列都有收敛的子列，称D为紧集。

习　　题

1. 在E^2中画出并集、交集、差集的几何直观图。

2. 设集合$A=\left\{0,1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},\cdots,\ 2n+1,\frac{1}{2n+2},\ \cdots\right\}$

　1)A是开集还是闭集？理由何在？

　2)写出A的边界点所组成的集合。

　3)证明A的闭包$\overline{A}$就是集合A，即$A=\overline{A}$。

3. 在E^3中，用不等式或等式表示如下集合：

　1)位于第八挂限的点的全体。

　2)位于各坐标轴上的点的全体。

二、凸集的定义及其基本性质

常见的凸集有三种，一般凸集（简称凸集）；严格凸集；强凸集（也称均匀凸集）。设集合$X\subset E^n$

定义1　若对于任意的x、$y\in X$和数λ（$0\leqslant\lambda\leqslant 1$），都有

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in X$$

则称X为凸集。

几何意义　凸集X内任意两点间"连线"上的点都含于X中。如图1-1-1和图1-1-2所示的三角形和圆。

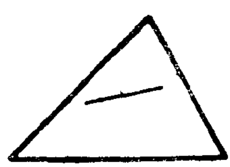

图 1-1-1

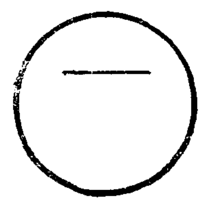

图 1-1-2

定义2　若对于任意的x、$y\in X(x\neq y)$和数$\lambda(0<\lambda<1)$，都有　$\lambda x+(1-\lambda)y\in X$的内点，则称$X$为严格凸集。

从上面的两个定义易知，严格凸集一定是凸集，但反之不一

定成立。例如图 1-1-1 所示的三角形是凸集但不是严格凸集，因为当 x、y取在三角形的同一边上时，显然与定义 2 矛盾。

定义3 若存在常数 $\gamma>0$，使对任意 x、$y\in X$和任意向量 $z\in E^n$，只要 $\|z\|\leqslant\gamma\|x-y\|$，都有

$$\frac{1}{2}(x+y)+z\in X$$

则称X为强凸集。

几何意义 在E^2中，强凸集X表示以x、$y\in X$为边的平行四边形中心的某一δ邻域都包含于X中。其中 $\delta\leqslant\gamma\|x-y\|^2$。如图1-1-3所示。

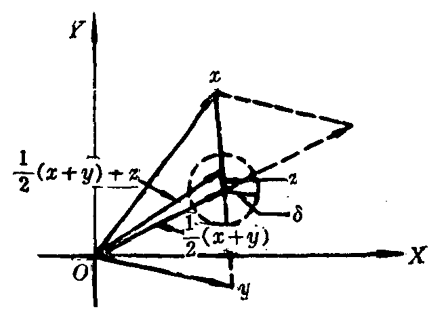

图 1-1-3

注意：常数γ与x、y无关，z只限制了大小。

思 考 题

证明 圆是强凸集。（提示：利用弓形的高和弦长平方之比的极限求常数γ）

凸集的性质

性质1 设X_1、X_2是凸集，则$X_1\cap X_2$是凸集。

（证明留给读者练习）

性质2 设X是凸集，则对于任意$x^i\in X$和数λ_i，$i=1,2,\cdots,m$都有$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x^i\in X$（其中 $\lambda_i\geqslant 0$；$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$）。

证 采用数学归纳法。显然，$m=1,2$结论成立。设 $m=k$ 时