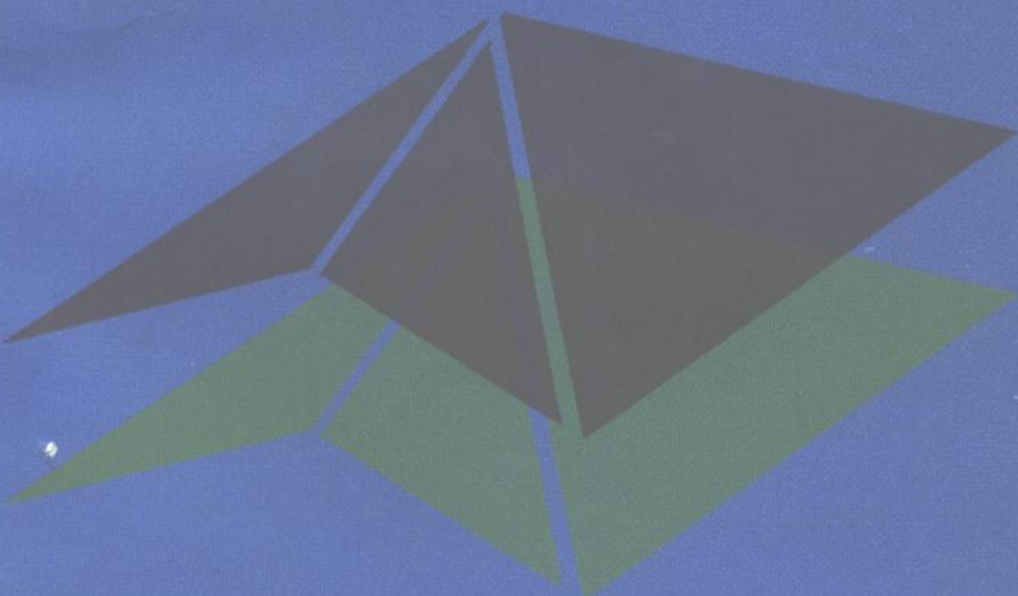
模糊数学与计算机应用

吴万铎　吴万钊　著



電子工業出版社

内 容 提 要

模糊数学是一门新兴学科，近年来不但应用在自然科学方面，而且已在经济管理学、语言学等众多社会科学领域也得到广泛应用。模糊数学与计算机技术更是息息相关。二者之结合，既增强了用模糊数学方法处理问题的能力，又提高了计算机的“智力”。

本书共分为两篇。第一篇介绍模糊数学知识和应用方法，以及在许多领域的应用实例；第二篇详尽给出多种实用的应用程序，并简介了阅读程序必需的BASIC语言知识。全书在内容处理上深入浅出，侧重应用实际，用以满足众多学科人员的需求。

本书应用程序已制成应用系统软盘两块，可直接在IBM-PC及其兼容机上运行。有需要者，可写信到电子工业出版社东北特约编辑部与作者联系（吉林工学院64信箱）。

模糊数学与计算机应用

吴方铎　吴万[illegible]　编著

责任编辑　林　培

电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路）

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

妙峰山印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/16　印张：11　字数268千字

1988年12月第一版　1988年12月第一次印刷

印数：1—14,000册　定价：4.20元

ISBN7-5053-0418-6/TP·53

前　言

近年来随着科学技术的迅猛发展，软科学的兴起，计算机技术的普及推广，使得模糊数学这门新兴学科呈现出旺盛的生命力和渗透力。它不但应用在自然科学领域，而且已渗透到象经济学、管理学、语言学、哲学、历史学、心理学等等这样的社会科学领域。并且在一些国家已引起了企业界和工商界的特殊兴趣和竞争，难怪有人赞叹：二十世纪末将是充满了模糊定量的世界。

模糊数学的发展应用同计算机技术是息息相关的，因此把二者结合起来奉献给读者是我们的一个尝试。

全书共分为两篇。第一篇介绍模糊数学知识和应用方法，以及在许多领域的应用实例；第二篇详尽给出多种实用的应用程序（包括两个实用系统软件包），并简介了阅读这些实用程序所必需的BASIC语言知识。全书在内容处理上，力图深入浅出，集理论与应用于一体，尽量结合应用实际，用以满足众多学科人员的需求。

本书特别注意到把模糊数学与计算机技术紧密结合，书中给出了一些用模糊数学方法来处理实际问题的BASIC语言应用程序。这些程序既可以直接用于解决某行业（学科）的应用实际问题，又可稍加修改，用于解决其它行业（学科）的问题。应用程序中采用了菜单技术、自动建库技术，并配有大量的汉字提示，使操作更为简单。

由于用模糊数学方法制成系统软件来处理实际问题在国内尚不多见，并且这项工作艰巨，笔者水平有限，经验不足，一定存在不妥之处。这里也只能是抛砖引玉，欢迎读者、用户提出宝贵意见，使这些软件更加完善。

著名优化专家、哈尔滨工业大学数学系冯英竣教授，在百忙中审阅了本书，并提写了序；自动控制专家、吉林工学院电子系苏魁武教授和吉林工业大学应用数学系李树根副教授也分别审阅了本书，并提出了宝贵的建设性的意见，在此一并表示衷心感谢。

感谢吉林工业大学应用数学系研究生陈庄、杨印生、夏再龙、刘心报等同学热情地帮助审阅本书和抄写了部分手稿。

书中的应用程序已制成带有若干数据库的BASIC语言应用系统软盘两块，可直接在IBM-PC及其兼容机上运行。有关软盘销售事宜可写信到电子工业出版社东北特约编辑部与作者联系。

编著者

一九八六年六月

序

数学这门学科是在生产实践活动的推动下发展起来的。人们在生产实践活动中不断对数学提出新的问题，常常发现原来的数学工具不够用了，促使人们进行新的探索，寻找新的数学方法；由此推动数学这门学科不断向前发展。当今在经济、社会、管理、决策等软科学的研究领域中遇到的大量模糊现象，仅用传统数学的工具进行定量的研究将发生困难。特别是研究的系统日趋复杂的时候，复杂性与精确性的矛盾变得更加突出，常常需要吸取人脑对复杂事物进行模糊度量的特点给予巧妙的解决。在这种背景下，一门新的学科——模糊数学在1965年由美国控制论专家L.A.Zadeh教授创立了。

模糊数学从1965年至今，不过二十多年的历史，但是它的发展十分迅速，它的应用已扩展到许多科学技术领域。目前在管理科学、系统工程、经济学、心理学、社会学、生态学、未来学、语言学、历史学、军事学以及人工智能、自动控制，遥感技术、信息处理、天气预报、图象识别、地震预测、医疗诊断、交通运输、商品质量评价、教学和科研评估、企业考评和产品质量评定、人才预测和规划、体育训练、农作物选种、化合物及地矿物的分类、图书情报分类等多学科多领域都得到了应用。模糊数学这门学科已经显示出它的强大生命力，并且越来越受到重视。

模糊数学与计算机技术是息息相关的。模糊数学产生的背景之一，就是用数学手段把人脑对复杂事物进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制和模糊决策的本领移植到电子计算机上来。模糊数学与计算机技术的结合既增强了用模糊数学处理实际问题的能力，又提高了计算机的智力，提高了自动化水平，使计算机如虎添翼。

本书的特点是注意到把模糊数学与计算机技术紧密结合。除了介绍模糊数学的基础知识和应用方法之外，还详尽给出多种实用的应用程序以及为了掌握这些实用程序所必需的BASIC语言知识。本书的内容深入浅出，集理论与应用于一体，提供了许多应用领域的实例。相信这本书的出版一定能够满足众多学科人员的需要，促进模糊数学这门学科更加广泛的应用。

哈尔滨工业大学　冯英浚

目　　录

第一篇　模糊数学

第一篇　模糊数学

引论　模糊数学的发展概况

一、什么是模糊数学

一见到“模糊”二字，人们立刻容易想到一种模模糊糊的现象。那么对于数学这门定量精确的学科怎么也模糊起来了呢？其实“模糊”是译自英文Fuzzy，它有“模糊”、“不分明”的意思。

模糊数学是用数学方法研究和处理模糊性现象的数学。所谓模糊性是指客观事物中的不分明性，模糊性的根源在于客观事物的差异之间存在着中介过渡。这样的事例在日常生活中屡见不鲜，如说一个人的身材是“高个”、“中等个”、或“矮个”，这就是一种模糊概念，人们很确难切地说清究竟多高算“高个”，等等。又如区分一个人的学习成绩是“好”、“一般”或“差”等等。这些有差异的或对立的概念，都没有绝对分明的界限。

精确数学是建立在集合论的基础上的，根据集合论的要求，一个对象对于一个集合，要么属于它，要么不属于它，二者必居其一，且仅居其一，绝不允许模棱两可。因此一个集合所包含的事物（叫做集合的“外延”）必须明确，由于集合论本身的这个要求，就大大地限制了它的应用范围，而使它无法处理日常生活中大量的模糊现象与概念。我们把这种由于概念外延的模糊，而造成的划分上的不确定性，称作模糊性。

随着科学的发展，一些在过去与数学关系不大的学科，如教育学、心理学、语言学、管理学等社会科学，都迫切需要定量化和数学化，这就不可避免地遇到大量的模糊概念，由于这些学科的特点，人们不可能一切都迁就现有的数学方法而改变这些学科本身的规律，而只能改造数学，使它应用的面更为广泛。模糊数学正是在这样的背景下诞生的。

美国著明的控制论专家L.Zadeh（扎德）教授，为了从根本上解决问题，重新研究了数学的基础——集合论。他发现“集合”这个概念实质上是舍弃了问题的模糊性而抽象出来的，而舍弃的东西却是解决现代科学中许多问题所必不可少的精华。一九六五年扎德教授发表了第一篇关于模糊数学的论文：《Fuzzy Sets》（模糊集合）提出了处理模糊事物的新的数学概念——“模糊子集”，并引进“隶属函数”的概念，来描述模糊与不模糊之间的过渡。因而他首次成功地运用数学方法描述模糊概念，为数学的发展和应用开辟了一个崭新的道路。扎德教授所创立的模糊数学不是让数学放弃它的严谨性，使数学变得模模糊糊，而是用定量的数学方法去处理具有模糊性的现象。

二、计算机科学与模糊数学

一方面模糊数学从它诞生的那天起便与计算机科学的发展息息相关，相辅相成，模糊数学创始人扎德就是长期从事计算机工作的，由于他所从事的工作性质，使他经常考虑这样一些问题：“人脑思维”、“大系统”等等。为了解决这些问题，他提出了模糊子集概

念，并提出解决计算机的“智力”问题。

另一方面，没有模糊数学，计算机的发展也会受到限制。然而利用模糊数学构造模型，编制程序，可以更广泛、更接近地模拟人脑的思维，从而提高计算机的“智力”。

计算机的计算速度、“记忆力”是超人的，可以每秒钟进行几百万次乃至上亿次计算；能够存贮若干个图书馆的资料。但是计算机在模糊识别和模糊判定方面远远不及人类。例如看电视时，要把图象调得更清晰一些，这对于一个四、五岁的小孩来说，是轻而易举就能办到的事情，但对计算机来说却很困难。因为“更清晰一些”这个概念是不明确的，也就是说“清晰”，“不清晰”、“更清晰”都没有明确的界限，因此无法用精确数学来描述它，而只有人脑才有对模糊事物进行识别和判别的能力。从这个角度来说，计算机的“智力”还不如一个小孩。

随着科学的发展，需要更广泛地借助于计算机这个有力的工具，这就要求提高计算机的“智力”，使它能够模拟人脑的思维方法，去应付复杂多变的环境。模糊数学就是要使计算机去吸收人脑识别和判定的模糊特点，使部分自然的量词语言能够作为算法语言直接进入程序，以算法语言的程序指挥计算机去完成更复杂的任务。这样就可使计算机“聪明”起来。笔者曾利用模糊数学的方法，在借助计算机来模拟人的部分思维判断方面作了一点尝试（见第二篇部分内容）。

三、模糊数学的发展

目前模糊数学仅有二十年左右的历史（在我国有近十年左右），这作为一门学科来说是太年轻了，虽然它的资历很浅，然而却显示出极强大的生命力和渗透力。在创立这门学科后不太长的时间里，从应用方面看，已经在迅速扩散，它已用于图象识别、天气预报、地质地震、交通运输、轻工纺织、医疗诊断、信息控制、系统工程、人工智能、自动控制、企业考评和质量评定、人才预测和规划、科研、教学管理评估、图书馆情报分类等多方面。现在模糊数学已经渗透到社会科学中的经济学、心理学、教育学、语言学、未来学、生态学、历史学、法学、军事学、哲学、管理学等多种学科，并产生了一定的效果。例如有人把语法学、模糊数学、泛函分析、数理语言学等学科相互交叉、渗透，形成了“模糊数理语言学”，国际学术界认为这对研制新一代计算机系统很有启发和帮助。

模糊数学是一个新兴的数学分支，由于它与传统数学方法不同，因此在学习模糊数学时，要注意它与精确数学的区别。另外模糊数学还需要进一步完善。需要注意的是，模糊数学仅适用于有模糊现象而又可以量化的领域，对那些原来就用经典数学方法取得了很好效果的领域，就没有必要再把它模糊化。现实世界中可以量化的模糊事物是广泛存在的，通过广泛开展模糊数学的应用，逐步改进方法，发展理论，可以进一步促进这门新兴学科健康地向前发展。

第一章　准备知识　集合及其运算

集合论不但是现代数学的基础，同时也是学习模糊数学所必备的知识。已学过集合论的读者可略去本章不读。

本章概要：主要介绍集合的概念；集合的表示法；集合的运算。

§1.1　集合的概念

我们知道，在人脑中若形成一个概念，必须弄清它的内涵和外延。所谓内涵就是事物的内在含意；所谓外延就是说有哪些事物符合此概念。这两方面是相辅相成的，实际上就是一个"集合"，因此人脑中概念的形成，总要涉及到某一个"集合"。下面给出集合的描述性定义：具有某种属性的事物的全体叫做集合。集合中每一个事物，叫做这个集合的元素。一般集合用大写字母A、B、C…来表示；集合中元素用小写字母a、b、c、…表示。如

$a\in A$，读作"a属于A"

$a\overline{\in}A$，读作"a不属于A"

任意一个元素a及任意一个集合A之间要么$a\in A$，要么$a\overline{\in}A$，二者必居其一、而且仅居其一。这就是普通集合论的最基本的要求。

§1.2　集合的表示法

1　枚举法（当元素个数为有限时用）

例 1　设A为某学习小组的集合

$A=\{$王平，张立，李军$\}$

设B为成绩评定集合

$B=\{$优，良，中，差$\}$

例 2　设C为1到10的自然数集合

$C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

2　描述法

用记号$A=\{x|\,p(x)\}$ 表示A是由满足条件$p(x)$的全体x构成的集合。

例 3　$A=\{x|\,x$是偶数$\}$

$B=\{x|\,x$是1986年所种玉米$\}$

$C=\{x|\,x^2-1=0\}$

$D=\{x|\,1\leqslant x<3\}$

其中前两个集合中的$p(x)$是用语言描述的，而后两个是用等式和不等式表达的。

§1.3 集合的运算

客观事物浩如烟海，千头万绪，但是我们在考虑一个具体问题时，总是把议题限制在某一个范围内，称为论域。用大写字母U，V，X，Y，…表示；论域中每个元素，用小写字母u，v，x，y，…表示。

设给定一个论域U，U中某一部分元素的全体叫做U中的一个集合，常用大写字母A，B，C等表示。

下面介绍集合论中几个基本运算及符号表示。

1 包含

设A，B是论域U的两个集合，如果对任意的$u\in U$，由$u\in A\Rightarrow u\in B$，则称B包含A，记作$B\supseteq A$。如图1-1。

如果$B\supseteq A$与$A\supseteq B$同时成立，则称A、B两个集合相等，记作$A=B$。

2 交集

设A、B为论域U的两个集合，则A、B的交集定义为

$$A\cap B=\{u \mid u\in A \text{且} u\in B\}$$

如图1-2阴影部分。

3 并集

设A、B为论域U的两个集合，A、B的并集定义为

$$A\cup B=\{u \mid u\in A \text{或} u\in B\}$$

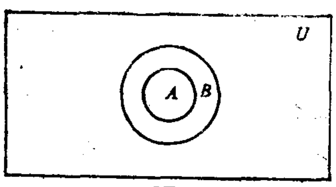
如图1-3阴影部分。

4 补余集

设A为论域U的集合，A的余集定义为

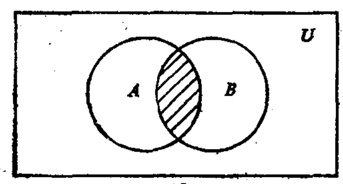
$$\overline{A}=\{u \mid u\in U \text{但} u\overline{\in} A\}$$

如图1-4阴影部分。



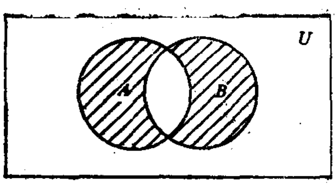
$B\supseteq A$

图 1-1



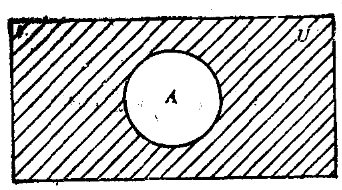
$A\cap B$

图 1-2



$A\cup B$

图 1-3



$\overline{A}$

图 1-4

例 设$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{2\}$

则有$A\supseteq B$；$A\cap B=\{2\}$；$A\cup B=\{2, 4, 6\}$；

$\overline{A}=\{1, 3, 5\}$

5 直积（笛卡尔乘积）

设U、V是两个论域，记

$$U\times V=\{(u, v)|u\in U, v\in V\}$$

那么把$U\times V$叫做U与V的直积。

用普通语言来说，就是在U中取一个元素u，又在V中取一个元素v，把它们搭配起来成为(u, v)，叫做序偶。所有这样的序偶(u, v)的全体构成的集合就是直积。即它是两个集合间的无约束搭配。下面举例进一步说明。

例1 扑克牌有四种花色，它们组成一个集合

$U=\{$黑桃，红桃，方片，梅花$\}$

牌的号码有13种，组成一个集合

$V=\{2, 3, \cdots, J, Q, K, A\}$

而具体得到一张牌是由U和V的元素搭配而成的，我们可以记作

（红桃，3），（方片，K），（黑桃，9），（梅花，A）等等，总共有$13\times 4=52$种（“大、小王”除外）。它们既不是U中元素，也不是V中元素，而是由U和V搭配起来的新元素$(u, v)=$（花色，号码）。

例2 取几种图形构成的论域U

$U=\{$菱形，矩形，圆形$\}$

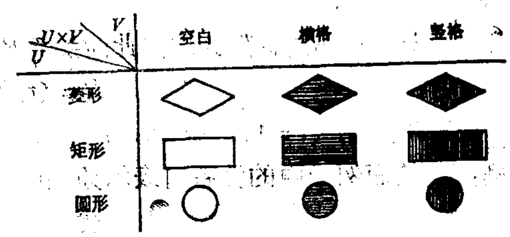


图 1-5

和几种图案构成的另一论域V

$V=\{$空白，横格，竖格$\}$

则$U\times V$共有9个元素，如图1-5。

§1.4 关 系

一、关系的概念

定义：所谓从U到V的关系R，是指论域为直积$U\times V$的一个子集，即$R\subseteq U\times V$，记作

$$U\xrightarrow{R}V$$

对于$U\times V$中元素(u, v)，若$(u, v)\in R$，则说u与v有关系R；若$(u, v)\overline{\in}R$，则说u与v没有关系R。

例 设$U=\{$王平，张立，李军$\}$

$V=\{$优，良，中，差$\}$

在某次考试中，王平得优，张立得良，李军得良，则构成一个关系。

$R=\{(王平，优),(张立，良),(李军，良)\}$
可见R是$U\times V$的一个子集

二、关系的表示法

前面例中关系可以列成表格1-1
其中1表示$(a,b)\in R$，0表示$(a,b)\overline{\in}R$。例如在表1-1中，1的位置对应着横行中的王平，纵列中的优，这表示（王平，优）$\in R$；类似的，0表示（王平，良）$\overline{\in}R$；…。

一般地，对有限域上的关系可用图来表示。例如前例中关系可以表为图1-6

表 1-1

R	优	良	中	差
王平	1	0	0	0
张立	0	1	0	0
李军	0	1	0	0

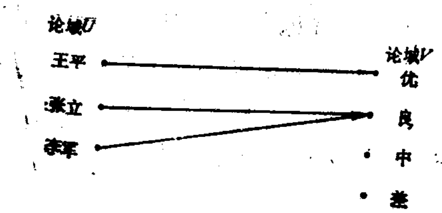


图 1-6

画法是，若$(a,b)\in R$，则从a到b连一条直线。否则，不连。

2.用矩阵表示

设论域U、V都是有限论域，此时关系R可用一个矩阵R来表示：

$$R=(r_{ij})_{m\times n}$$

其中R是矩阵，r_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 是R中元素，$r_{ij}\in\{0,1\}$。

例如在前面例子中的关系可表示为矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}优 & 良 & 中 & 差\end{array} \\ R= & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}王平\\ 张立\\ 李军\end{array}\end{array}$$

以上介绍了U到V的关系。一般来说$U\neq V$，当$U=V$时，关系的表示更简单。

第二章　模糊集合基本知识

本章概要：介绍模糊子集的基本知识。首先给出特征函数的概念；然后研究模糊子集的概念；介绍模糊子集的表示法和运算法则。

§2.1　特征函数——模糊数学的过渡

我们已经知道，在普通集合论中，一个元素u和一个集合A的关系只能是$u\in A$，或$u\overline{\in}A$。除此之外，我们说，集合还可以通过特征函数来刻划，并且每个集合都有一个特征函数。

定义：设A是论域U中的一个集合，对任意的$u\in U$，令

$$C_A(u)=\begin{cases}1, & \text{当} u\in A\\ 0, & \text{当} u\overline{\in}A\end{cases}$$

则称$C_A(u)$为集合A的特征函数。

如图2-1为特征函数的图形。

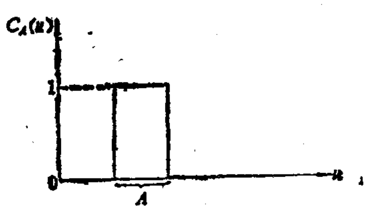


图 2-1

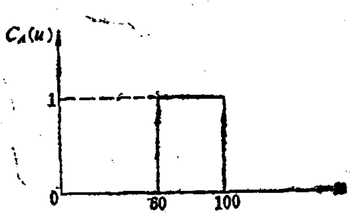


图 2-2

任意一个特征函数都唯一确定一个子集

$$A=\{\,u\,|C_A(u)=1\,\}$$

同时任意一个集合A都有唯一确定的一个特征函数与之对应。在这种意义下，我们说集合A与其特征函数是等价的，记作$A\Longleftrightarrow C_A$。

例　$A=\{$及格以上同学$\}$。则特征函数图形如图2-2所示。A的特征函数$C_A(u)$在u_0处的值称为u_0对A的隶属（程）度。

当$u\in A$，隶属度是$100\%=1$，表示u绝对属于A；当$u\overline{\in}A$，隶属度是0，表示u绝对不属于A。特征函数具有下列运算性质：

1　$C_{A\cup B}(u)=\max\{C_A(u),\ C_B(u)\}$

2　$C_{A\cap B}(u)=\min\{C_A(u),\ C_B(u)\}$

3　$C_{\bar{A}}(u)=1-C_A(u)$

§2.2 模糊集合及其表示法

一、概念

定义1：所谓给定论域U上的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，是指对于任意$u\in U$，都确定了一个数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$，$0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\leqslant 1$，那么$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$叫做$u$对$\underset{\sim}{A}$的隶属程度。$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$叫做$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。

在模糊子集定义中要注意两点：

1 模糊子集$\underset{\sim}{A}$完全由隶属函数来刻划，在某种意义上说$\underset{\sim}{A}$与$\mu_{\underset{\sim}{A}}$等价，记作$\underset{\sim}{A}\Longleftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}$。这与前面普通集合论中，$A\Longleftrightarrow C_A$是类似的。

2 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$表示$u$对$\underset{\sim}{A}$的隶属（程）度大小，当$\mu_{\underset{\sim}{A}}$的值域$=\{0,1\}$时，隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$退化为一个普通子集的特征函数$C_A(u)$；$\underset{\sim}{A}$便退化为一个普通子集$A$。因此普通子集是模糊子集的特殊情形，而模糊子集是普通集合概念的推广。

为了更好地理解模糊集合的概念，下面举一具体例子来说明。

例 设论域$U=\{$王平，张立，李军$\}$，评语为“学习好”，这是一个模糊概念。假设三人都是学习好，但又不完全一样。如果用普通集合的观点，选取特征函数

$$C_A(u)=\begin{cases}1, & \text{学习好}\in A\\ 0, & \text{学习差}\overline{\in} A\end{cases}$$

这时其特征函数分别为

$C_A(\text{王平})=1$，$C_A(\text{张立})=1$，$C_A(\text{李军})=1$。

它们反映不出三者的差异。但是如果用模糊子集的概念，选取$[0,1]$区间的数，来表示他们属于$\underset{\sim}{A}$（学习好）的程度，例如分别为$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\text{王平})=0.9$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\text{张立})=0.85$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\text{李军})=0.93$这样可以把三者按学习好的程度用$[0,1]$区间的量值表示。同时确定了一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，它表示出这三人对“学习好”这个概念的隶属程度。

如果论域U是有限集时，可以用向量来表示模糊子集$\underset{\sim}{A}$。对于上例可写成

$$\underset{\sim}{A}=\{0.9,\ 0.85,\ 0.93\}$$

对于一般的模糊子集$\underset{\sim}{A}$，可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n\}$$

其中$\mu_i\in[0,1]$，$(i=1,2,\cdots,n)$是第i个元素对模糊子集$\underset{\sim}{A}$的隶属度。下面介绍扎德的表示法。

二、表示法

1 有限论域

若论域为U，且

$$U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n\}$$

则U上的模糊子集$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)}{u_i}=\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_1)}{u_1}+\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_n)}{u_n}$$

其中$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)$（$i=1, 2, \cdots, n$）为隶属度，$u_i$为论域$U$中元素。当隶属度为零时，也可略去不写。用这种记号，前面的例子可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.9}{\text{王平}}+\frac{0.85}{\text{张立}}+\frac{0.93}{\text{李军}}$$

注意：扎德记号不是分式求和，只是一种符号，其中"分母"是论域U中的元素，"分子"是相应元素的隶属度。

例 1　在教师评定职称时，选取论域

$$U=\{\text{教学，科研，外语}\}$$

评语"很好"是一模糊概念，用$\underset{\sim}{A}$表示。对某教师的评定为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.8}{\text{教学}}+\frac{0.75}{\text{科研}}+\frac{0.65}{\text{外语}}$$

这就区分出了该教师在教学、科研、外语方面"很好"的程度，给人以清晰的定量分析。

2　无限论域

当论域为无限论域时。取一连续实数区间，这时U的模糊子集$\underset{\sim}{A}$可以用实函数来表示。

扎德记号从有限论域推广到一般，不论U是有限，还是连续或其它情形，都可使用这样的记号

$$\underset{\sim}{A}=\int_{u\in U}\left(\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u}\right)$$

此处，积分号不是高等数学中积分的意义，也不是求和号，而只是表示各个元素与隶属度对应关系的一个总括形式。

当然，给出隶属函数的解析式也能表示出一个模糊集。

例2　以年龄为论域，取$U=[0, 100]$，扎德给出"年老"$\underset{\sim}{O}$（Older）、"年轻"$\underset{\sim}{Y}$（Young）两个模糊子集的隶属函数如图2-3。

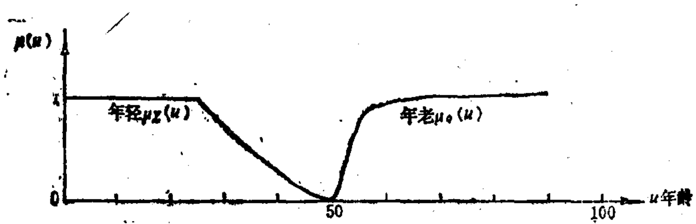


图 2-3

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(u)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & \text{当 } 50<u\leqslant 100\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(u)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & \text{当 } 25<u\leqslant 50\end{cases}$$

三、运算

两个模糊子集间运算，实际上是逐点对隶属度做相应的运算。

定义 2：设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$为论域U上的模糊子集，则$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的交、并、余集的隶属函数分别为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(u)=\min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)\}$$
$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(u)=\max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)\}$$
$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(u)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

以后为方便起见，用符号“$\vee$”代替max，用符号“$\wedge$”代替min，称之为最大-最小运算。

例 1　设论域$U=\{u_1,\ u_2\}$

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}$$
$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}$$

求：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$，$\overline{\underset{\sim}{A}}$。

〔解〕 $$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\frac{0.2\vee0.5}{u_1}+\frac{0.7\vee0.3}{u_2}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}$$
$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\frac{0.2\wedge0.5}{u_1}+\frac{0.7\wedge0.3}{u_2}=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}$$
$$\overline{\underset{\sim}{A}}=\frac{1-0.2}{u_1}+\frac{1-0.7}{u_2}=\frac{0.8}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}$$

例 2　已知论域$U=\{u,\ v,\ x,\ y,\ z\}$，其隶属度为$\{u\mapsto1$ ○，$v\mapsto0.9$○，$x\mapsto0.4$▢，$y\mapsto0.2$♢，$z\mapsto$□。

$$\underset{\sim}{A}\text{（圆块）}=\frac{1}{u}+\frac{0.9}{v}+\frac{0.4}{x}+\frac{0.2}{y}+\frac{0}{z}$$
$$\underset{\sim}{B}\text{（方块）}=\frac{0}{u}+\frac{0.3}{v}+\frac{0.6}{x}+\frac{0.1}{y}+\frac{1}{z}$$

求：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$，$\overline{\underset{\sim}{A}}$，$\overline{\underset{\sim}{B}}$。

〔解〕 $$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\text{（圆块或方块）}=\frac{1}{u}+\frac{0.9}{v}+\frac{0.6}{x}+\frac{0.2}{y}+\frac{1}{z}$$
$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\text{（亦圆亦方）}=\frac{0}{u}+\frac{0.3}{v}+\frac{0.4}{x}+\frac{0.1}{y}+\frac{0}{z}$$
$$\overline{\underset{\sim}{A}}\text{(不圆)}=\frac{0}{u}+\frac{0.1}{v}+\frac{0.6}{x}+\frac{0.8}{y}+\frac{1}{z}$$
$$\overline{\underset{\sim}{B}}\text{(不方)}=\frac{1}{u}+\frac{0.7}{v}+\frac{0.4}{x}+\frac{0.9}{y}+\frac{0}{z}$$

关于模糊子集的交、并等运算可推广到n个模糊集合上去。对于无限论域，可表示为如图2-4所示：

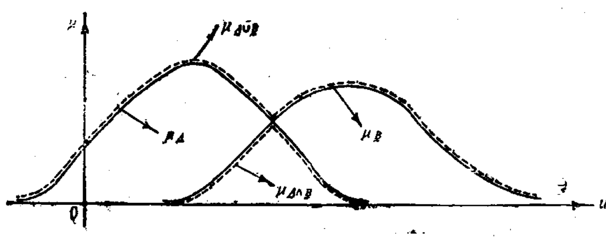


图 2-4

§2.3 λ 水平截集

一、引例

λ水平截集是在模糊集合与普通集合相互转化中的一个重要概念，在模糊决策中也经常用到。下面看一个引例。

例1 设某班有u_1，u_2，…，u_8八个同学，在某次考试中按百分制评分，再将分数除以100，即得隶属度，设结果如下

$u_1=100$分，隶属度$\mu(u_1)=1$

$u_2=92$ 分，隶属度$\mu(u_2)=0.92$

$u_3=35$ 分，隶属度$\mu(u_3)=0.35$

$u_4=68$ 分，隶属度$\mu(u_4)=0.68$

$u_5=82$ 分，隶属度$\mu(u_5)=0.82$

$u_6=74$ 分，隶属度$\mu(u_6)=0.74$

$u_7=80$ 分，隶属度$\mu(u_7)=0.80$

$u_8=55$ 分，隶属度$\mu(u_8)=0.55$

现在教学管理部门要了解“及格”者（60分以上），“优良”者（80分以上）和“优秀”者（90分以上）都有哪些人。经过统计得如下结果：

“及格”者集合$A_{0.6}=\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7\}$

“优良”者集合$A_{0.8}=\{u_1, u_2, u_5, u_7\}$

“优秀”者集合$A_{0.9}=\{u_1, u_2\}$

这实际上是按不同的水平确定了几个普通集合。这些普通集合是对原来的模糊集$\underset{\sim}{A}$的隶属度先确定一个限定值λ（$0\leqslant\lambda\leqslant 1$）之后，再把隶属度$\mu(u)\geqslant\lambda$的元素挑选出来而得到的。对于上例来说，就是由

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{u_1}+\frac{0.92}{u_2}+\frac{0.35}{u_3}+\frac{0.68}{u_4}+\frac{0.82}{u_5}+\frac{0.74}{u_6}+\frac{0.8}{u_7}+\frac{0.55}{u_8}$$

分别确定水平限定值$\lambda=0.6$，0.8，0.9而得到的。

二、λ 水平截集定义

定义：设给定论域U上的模糊子集$\underset{\sim}{A}$，对任意$\lambda\in[0,1]$，称普通集合

$$A_\lambda=\{u \mid u_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\lambda,\ u\in U\}$$

为$\underset{\sim}{A}$的**λ水平截集**。

这样，按定义，上例结果可写成

$A_{\lambda=0.6}=\{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7\}$

$A_{\lambda=0.8}=\{u_1, u_2, u_5, u_7\}$

$A_{\lambda=0.9}=\{u_1, u_2\}$

取一个模糊集的λ水平截集A_λ，也就是将隶属函数按下式转换成特征函数

$$C_{A_\lambda}(u)=\begin{cases}1, 当\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\lambda\\ 0, 当\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)<\lambda\end{cases}$$