实函数论

陳建功 著

科学出版社

實函數論

陳建功著

科學出版社

1958年8月

內容提要

從集的概念談起，通過實數和點集的理論，評論實函數的連續性，可微分性．導入黎曼積分，勒貝格積分的概念和基本性質及有關這些積分的運算工具．以此爲基礎，研討了直交函數級數的性質，這也就是理論到實踐一種示範．最後一章是綫性汎函分析，概括了很多的具體事實．

實 函 數 論

陳 建 功 著

*

科學出版社出版（北京朝陽門大街117號）

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年8月第一版　　書號：1306 字數：376,000

1958年8月第一次印刷　　開本：850×1168 1/32

(滬)0001—2,144　　印張：15 3/8

定价：(10) 2.80元

序

著者從1924年到1926年，在"國立武昌大學"（當時武昌高師改名爲武昌大學，乃是武漢大學的前身），講授實變數函數論，此時所編的講義，實際上是本書最初的底稿．1929年而後，此稿屢有修改增删，稱"實函數論"以授浙大學子．解放之後，改文言爲語體，滲入蘇聯教材．1952年著者調到復旦，講實函數論，聽講人數劇增，四五年來，教學相長，有所提高，遂將此稿問世．

第一章談談集的一般概念，通過序數的理論，在"選取公理"的假設下，闡明任何兩集之勢，孰大孰小，是可以相比的．在這個基礎上，我們在第二章的開端，就設置着整數的公理系統，建設了整數之間的四則算法，並且導出一系列的重要事項，由是引入有理數的理論．有理數的性質既明，乃能以（有理數的）基本數列定義實數，定義了兩數孰大孰小的關係，敷衍出實數的四則算法，這樣就形成了梅賴和康妥的無理數論，然後用一般進位法（包含十進位法）將一切實數記出；檢查數的記號，通過"小數"的理論，遂能區別實數之孰爲有理孰爲無理；順便奠定了實數的乘方和對數的基礎．另一方面，我們也用得德金特的（有理數體的）分割來定義實數，作出兩個分割的孰大孰小的規約以決定實數的自然順序，並且定義了實數的四則運算．最後將此實數論與上述的實數統一，讀者庶幾明白兩種理論是一而二二而一的．

除開實數，對於實函數最基本的概念是第三章所述的點集，在有度的空間中，從"緻密性"的概念出發，我們引進開集，閉集以及點集的包，核，境界的概念，闡明了點集的疏朗性和稠密性；通過點集的連絡性的概念，詳明了區域與連續點集的性質．掩蓋定理在實函數論，是一個重要的簡化工具，我們建立了這種定理的最一般

的形式.

本書稱實數值的函數爲實函數,而非"實變函數",事實上實函數中主變的未必是實數值的變數. 第四章論實函數的連續性,半連續性以及不連續性. 首先陳述連續函數的性質及其應用, 闡明連續映照的性質,研討兩個連續點集間的一一對應問題,說明連續曲綫有充實空間而無餘隙的可能.

其次述半連續函數的性質, 證明了半連續函數是連續函數列的極限函數,指出當一個上半連續函數小於一個下半連續函數時,必有連續函數介在其間——好斯多爾夫的定理. 順着指出半連續函數是一概連續函數. 最後對於一個實變的函數,特別加以研討,指出這種函數的第一種不連續點的全體,成一可列點集.

第五章專論裴勒的函數,這是連續函數列的極限.

第六章專門研討實變函數的微分理論. 首先指出區間上所定義的實函數之極值點是可列的, 其次指出中值定理可以有種種的拓廣,各有各的應用. 利用中值定理(不用其他深刻的工具),證明了 e 的超越性. 普通的高階導數給它兩種拓廣,指出廣義二階導數恆等於 0 的連續函數,只有一次函數. 利用這個薛瓦茲定理,我們證明恆等於 0 的三角級數就是 0. 凸函數的特徵,也可用廣義的二階導數來表明,順着敍述了凸函數的若干重要性質,例如我們指出凸函數的不可以微分的點是可列的.

在本章中,我們爲便利計, 引入零集——測度爲 0 的點集, 但是測度的理論還要在下面來講. 用了零集的概念,通過黎斯的有關普通函數(一切不連續點都是普通的)的定理, 我們證明單調函數幾乎處處可以微分. 於是我們就能證明富弼尼的有關單調函數級數之逐項微分定理. 利用富弼尼定理,我們證明有界變差函數 $f(x)$ 的全變差函數 $T(x)$ 的導數 $T'(x)$ 幾乎處處等於 $|f'(x)|$. 我們指出有界變差函數可以寫成兩個增加函數之差也可以寫成一個跳躍函數(可能是 0)與一個連續函數的和. 通過勒貝格的密度定

理，建立了（當日阿-楊格-沙克斯的）導數定理：除開一個零集，在其他任一點的四個(極限)導數中之任何兩導數，若不相等則此兩導數，至少有一個是無窮；假如這兩導數居左右異側則一個是 $+\infty$，一個是 $-\infty$，這是微分的理論中最主要的定理，另一方面，我們舉例說明處處不可以微分的連續函數是存在的.

第七章專論點集的測度主要是談歐幾里得空間中的勒貝格測度．我們證明了謝爾兵司基的測度的掩蓋定理，省略了維太利的定理；凡是要用後者來建立的事項，都可以用測度的掩蓋定理，應用的時候，比較簡便．有了這個準備，在第八章中，對於黎曼積分，黎曼-斯帝捷積分特別對於勒貝格積分，我們才能暢所欲言．曲綫的長在適當的限制下，是用積分來表達的；爲了要說明這個表達公式，我們首先說明若當曲綫和有長曲綫的意義，並且證明了若當的曲綫定理． 但是光是利用勒貝格積分，還不能將任一有長曲綫的長表達出來，爲此我們引進區間函數的概念，有長曲綫的長乃是一種區間函數的積分． 在一般的可測點集上，證明了收斂定理和勒維 (Levi) 的定理，並且建立了平均值定理，赫耳竇不等式、敏高夫斯基不等式等工具性質的命題． 對於區間上的勒貝格積分，我們證明了第二平均值定理和分離積分公式；爲着要闡明積分函數(不定積分)的本質，我們引入黎斯的階梯函數的概念，首先用階梯函數來指明黎曼積分的特徵以及綫性點集上可測函數的特徵，然後指出勒貝格積分的特徵；最後我們證明區間上函數成一勒貝格積分函數的充要條件是它具有絕對連續性．對於含有若干個實變數的函數，我們建立了有關累次積分的富畢尼定理． 利用勒貝格積分的性質，證明了若當區域上的柯西定理，這是複變函數論的基礎定理，這是在較輕的條件下建立的． 最後通過彼隆(Perron)的積分概念，給黎曼積分與勒貝格積分以理論上的統一.

對於有限區域上之直交函數級數，我們闢了第九章來論述，這是積分的一種應用． 三角級數是古典的直交函數級數，在理論上

以及實用上都是很重要的，因此對於它，我們特別有所陳述．我們指出有同一富理埃級數兩個（週期，可積）函數，是幾乎處處相等的，這是通過富理埃級數之分項積分定理證明的．利用這個分項積分定理我們闡明了三角函數敍列在區間$[0, 2\pi]$上的完備性．我們也研討一般的直交函數系在其直交區間上的完備性，順着建立了一般性的派色伐耳等式，指出餘弦函數敍列在區間$[0, \pi]$上是完備的．任何直交函數敍列在其直交區間上對於$x^n(n = 0,1,2)$具有完備性的話，它是完備的；通過這個定理，顯然地我們能導出一系列的結果——特殊派色伐耳等式等等，爲了節省篇幅，沒有把他們寫出來．

建立了黎曼-勒貝格的定理——0(1)定理——之後，接着指出全連續函數的富理埃級數勻斂於此函數，並且指出有界變差函數的富理埃級數“有界地”收斂於此函數．對於三角級數的絕對收斂，我們建立了魯辛（Лузин）的定理，並且指出三角級數處處絕對收斂的充要條件是它表示一個楊格連續函數的富理埃級數．另一方面，通過飛耶的算術平均定理，建立着瓦也斯脫拉司的勻迫定理；事實上，我們改進了飛耶定理爲勒貝格的形式，由是證明了富理埃級數幾乎處處可用算術平均求和的事實．對於三角級數的實質收斂，我們給出普賴斯納的（對數因子）條件．關於一般的直交函數級數的實質收斂，我們指出孟孝夫和拉特馬吼的（對數平方）條件是最佳的．

對於一般的直交函數級數的無條件（實質）收斂，我們給它一個充足條件．從權產生的直交多項式級數，當其權滿足適當條件時，我們建立了一系列的係數定理，其中有些結果，拓廣着三角級數論中相應的古典定理——齊革蒙特定理，別隆許兼因定理等等．

第十章是泛函分析．在歐幾里得空間中的可測點集e上，一切勒貝格可積函數的$p(p \geqslant 1)$次乘冪之可以積分的，成一空間$L^p(e)$．首先在$L^p(e)$中，我們研討函數列關於指數p的弱斂和強

斂然後決定 $L^p(e)$ 中綫性泛函數的形式．只要 e 是可析的有度空間中之一可測點集時，我們證明 $L^p(e)$ 中存在着完備的直交函數敍列，成立着派色伐耳等式．在 $L^p(e)$ 中我們建立了分解定理和延拓定理．在區間 (a,b) 上的一切連續函數，成一空間 $C(a,b)$，我們證明 $C(a,b)$ 上的綫性泛函數是一個黎曼-斯帝捷積分，我們也充分地研討了這種泛函敍列的收斂問題．

其次對於完備的有度空間，我們建立了收縮映照的不動點定理．由是導出一階微分方程的匹加爾定理，弗賴霍耳毋積分方程之解的唯一性定理等等．另一方面，對於 $C(a,b)$，我們證明了阿爾日拉的緻密性定理，由是導出一階微分方程的彼阿諾定理，我們又將阿爾日拉定理拓廣，來研究“曲綫”敍列的性質．

對於綫性有模空間，我們指出它的共軛空間是一巴拿赫空間，證明了漢與巴拿赫的延展定理，研討了有界點的弱斂性質．對於綫性運算子，我們證明它的有界性等價於連續性，它的逆運算子也具有綫性．我們引入了沙波列夫的廣義函數，解釋了量子力學中 δ 函數的意義，最後陳述綫性運算方程和綫性運算子的譜以結束本章．

陳 建 功

1957 年 8 月

目　　錄

第一章

集的一般概念

1. 集 凡可供吾人思惟的，不問它有形或是無形，都叫做物．具有某特種條件的物，稱它們的全部，謂之一集．集的理論創自德人康妥[1)]，從十九世紀末葉，逐漸發展；到了今日，集論不但成爲數學的一分科，並且是全部數學的基礎．本章敍述集論的梗概，用做探討實函數的準備．

例如中國人民的全體是一集．從 1 到 100 的一百個自然數成一集．又如一定圓內的一切點的全部，也是一集．構成集的物，稱爲集的元素；上述第一個集的元素是中國人民，第二個集的元素是自然數，第三個集的元素是點．

有兩集 A 和 B，假如它們所含的元素完全相同，那末說兩集相同，用記號

$$A = B$$

表示 A 和 B 相同．假如 a 是 A 的一個元素，那末說，A 含有 a，或是說，a 屬於 A，記號是

$$a \in A.$$

假如 A 中任何元素都屬於 B，那末說 A 是 B 的一部分，或是說 A 是 B 的一個子集，用記號

$$A \subseteq B$$

來表示．假如 A 是 B 的一個子集，但 B 至少有一元素不屬於 A，那末說，A 是 B 的一個眞子集，用

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A$$

---

1) 康妥(Georg Cantor, 1845—1918)的父親是丹麥人，他的誕生地是列寧格勒．

來表示．例如中國人民的全體是 B，上海市人民的全體是 A；那末 $A \subset B$．

不含元素的集稱爲空集．例如滿足 $x^2+1=0$ 的實數 x 是一空集．空集用記號 0 表示，所以

$$A = 0$$

的意義是：A 是空集．空集是任何集的子集．

2. 映照　假如對於兩集 A 和 B，有方法 φ，使 B 的任一元素 b，對應着 A 的唯一元素 a_b，那末說，用表示法(映照法) φ 將 B 的元素 b 表示(映照)於 A 的元素 a_b．稱 a_b 是 b 的像，b 是 a_b 的原像．記號

$$\sum_{b \in B} a_b$$

表示像 a_b 的全體(的集)，稱爲 B 在 A 上的像，這個像是從映照法 φ 得到的．

上面"唯一"的意義是指一個元素只有一個像．當 B 中元素 b 與 b' 相異時(寫做 $b \neq b'$)，

$$a_b \neq a_{b'}$$

成立．就是說：相異的元素對應於不同的像，此時稱 φ 具有單調性．具有單調性的 φ 將 B 映照於 A，假如 B 的像與 A 相同，就是說：

$$A = \sum_{b \in B} a_b$$

成立的時候；稱 A 和 B 成一一對應，φ 是它們的對應法．此時，A 的任一元素 a，必有它的原像 b_a；所以 A 也映照於 B，這是 φ 的逆映照，用 φ^{-1} 來記它．我們寫着

$$\varphi(B) = A,\ \ \varphi^{-1}(A) = B;$$

$$a_b = \varphi(b),\ \ b = \varphi^{-1}(a_b).$$

A 和 B 的一一對應，就是有單調的 φ 能使上面最初兩關係成立的意思；或是說 A 的元素和 B 的元素，可以設法使他們兩兩相對．我們用記號

$$A \sim B$$

表示 A 和 B 可成一一對應;此時稱 A 與 B 對等. 例如

A 是 1, 2, 3, 4 四個自然數;

B 是紅,黃,黑,白四個球;

C 是東,南,西,北四個概念;

容易明白 $A\sim B$, $B\sim C$, $A\sim C$. 又如

A 是自然數的全體: 1, 2, 3, 4, …,

B 是偶數的全體: 2, 4, 6, 8, …,

C 是奇數的全體: 1, 3, 5, 7, …,

也容易明白三集 A, B, C 是兩兩對等的. 但是應該注意的是

$$B \subset A \quad 和 \quad B \sim A$$

可以同時成立. 就是說:有些集可以和它的一個眞子集對等.

3. 有限集和無限集 在說明有限集和無限集的意義之前,先證明下面的

補助定理 設 n 和 n' 都是自然數, $n' < n$, 又設 M_n 是最初 n 個自然數的集. 假如集 A 對等於 M_n, 則 A 不能對等於 $M_{n'}$.

證明 我們用數學歸納法來證明 M_n 和 $M_{n'}$ 不是對等的. 顯然, M_2 不與 M_1 對等.

設 k 是一個自然數. 在 M_k 不與它的任何眞子集對等的假設下來證明 M_{k+1} 也是如此就够了. 假如有 M' 適合於

$$M' \subset M_{k+1} \quad 和 \quad M' \sim M_{k+1} \tag{1}$$

那末 M_{k+1} 的元素 $k+1$ 必對應於 M' 的某一元素 l. 這個元素 l 不會是 $k+1$, 因爲從 M_{k+1} 和 M' 里分別除去 $k+1$ 和 l, 而得 M_k 和 M'', 假如 l 是 $k+1$, 那末從(1)得着

$$M'' \subset M_k, \quad M_k \sim M''. \tag{2}$$

然而由假設, M_k 不和它的任何眞子集對等, 所以(2)不成立. 這就是說: l 不等於 $k+1$. l 既不等於 $k+1$, 可能 M' 並不含有 $k+1$, 是必

$$M''_l \subseteq M_k.$$

此時從 M_{k+1} 除去 $k+1$，從 M' 除去 l 而得 M''，又得着不可以同時成立的兩關係(2)．這樣說來，$k+1$ 必屬於 M'．M' 中的 $k+1$ 應該對應於 M_{k+1} 中的某元素 v．現在變更對應的情況如下：

使 M_{k+1} 中的 $k+1$ 與 M' 中的 $k+1$ 相對應，

使 M_{k+1} 中的 v 與 M' 中的 l 相對應．

其餘諸元素間的對應都仍其舊．

如是仍不失 M_{k+1} 和 M' 的對應關係，但是這樣的一一對應的不可能實現，已詳於上文，所以(1)是不能成立的．補助定理證畢．

由此結果，$A \sim M_n$ 時，A 不能再與其它的 $M_{n'}$ 對等，稱這個自然數 n 為 A 的**計數**，或是 A 的元數個數．

集有兩種：有 M_n 與之對等的集，無 M_n 與之對等的集，前者謂之**有限集**，後者謂之**無限集**．從這個定義就得着

定理 **可與其眞子集對等的集一定是無限集．**

4. 可列集與不可列集 可列集有無限的和有限的：有限集都是可列集．空集也算是可列集，可與自然數集(就是自然數的全體)

$$N: 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

成一一對應的無限集叫它做**可列無限集**．

定理 1. **無限集必含有一個可列無限子集．**

證明 設 A 是一無限集．從 A 中取一元素 a_0．除 a_0 而外，A 中必有元素 a_1，否則發生

$$A \sim M_1$$

的矛盾．設 k 是一自然數，A 中取出元素 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ 後必餘有元素 a_{k+1}，否則發生無限集 A 對等於 M_{k+1} 的矛盾．

所以 A 含有如下的無限可列子集：

$$A_1: a_1, a_2, a_3, \cdots$$

定理證畢．

有限集不能與其眞子集對等，已詳於前節．那末，無限集是否