

高等学校教材

# 弹性力学

第三版

下册

徐芝纶

高等教育出版社

0343  
x92  
(3)2

356854

高等学校教材

# 弹性力学

(第三版)

下册

徐芝纶



高等教育出版社

DW 14/02

本书分上、下两册。上册为数学弹性力学部分，下册为应用弹性力学部分。

本书第一版获“1977~1981年度全国优秀科技图书”奖。

本书第二版获1987年“全国优秀教材特等奖”。

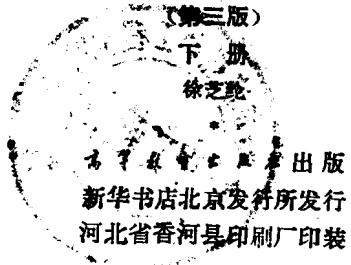
(京)112号

高等学校教材  
弹性力学

(第三版)

下册

徐芝纶



高等教育出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 12.125 字数 300 000

1982年9月第1版 1990年5月第3版 1992年5月第1次印刷

印数 0 001—2 610

ISBN 7-04-002893-X/TB·159

定价 4.00 元

# 目 录

## (下 册)

<b>第十三章 薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法</b> .....	1
§ 13-1 有关概念及计算假定 .....	1
§ 13-2 弹性曲面的微分方程 .....	4
§ 13-3 薄板横截面上的内力及应力 .....	7
§ 13-4 边界条件. 扭矩的等效剪力 .....	12
§ 13-5 简单例题 .....	17
§ 13-6 简支边矩形薄板的纳维叶解法 .....	22
§ 13-7 矩形薄板的李维解法及一般解法 .....	26
§ 13-8 圆形薄板的弯曲 .....	31
§ 13-9 圆形薄板的轴对称弯曲 .....	35
§ 13-10 轴对称弯曲问题的实例 .....	37
§ 13-11 圆形薄板在静水压力下的弯曲 .....	41
§ 13-12 变厚度矩形薄板 .....	44
§ 13-13 变厚度圆形薄板 .....	47
§ 13-14 文克勒地基上的基础板 .....	51
§ 13-15 薄板的温度应力 .....	55
<b>第十四章 用差分法及变分法解薄板的小挠度弯曲问题</b> .....	64
§ 14-1 差分公式. 内力及反力的差分表示 .....	64
§ 14-2 差分方程及边界条件 .....	67
§ 14-3 差分法例题 .....	71
§ 14-4 差分法中对若干问题的处理 .....	75
§ 14-5 瑞次法的应用 .....	83
§ 14-6 瑞次法应用举例 .....	88

§ 14-7	伽辽金法的应用 .....	92
§ 14-8	伽辽金法应用举例 .....	94
§ 14-9	主应力与主弯矩 .....	97
<b>第十五章</b>	<b>薄板的振动问题 .....</b>	<b>103</b>
§ 15-1	薄板的自由振动 .....	103
§ 15-2	四边简支的矩形薄板的自由振动 .....	106
§ 15-3	两对边简支的矩形薄板的自由振动 .....	110
§ 15-4	圆形薄板的自由振动 .....	113
§ 15-5	用差分法求自然频率 .....	115
§ 15-6	用能量法求自然频率 .....	119
§ 15-7	用能量法求自然频率举例 .....	122
§ 15-8	薄板的受迫振动 .....	125
<b>第十六章</b>	<b>薄板的稳定问题 .....</b>	<b>133</b>
§ 16-1	薄板受纵横荷载的共同作用 .....	133
§ 16-2	薄板的压曲 .....	137
§ 16-3	四边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲 .....	138
§ 16-4	两对边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲 .....	142
§ 16-5	圆形薄板的压曲 .....	147
§ 16-6	用差分法求临界荷载 .....	150
§ 16-7	用能量法求临界荷载 .....	153
§ 16-8	用能量法求临界荷载举例 .....	156
<b>第十七章</b>	<b>各向异性板 .....</b>	<b>164</b>
§ 17-1	各向异性体的物理方程 .....	164
§ 17-2	各向异性板的平面应力问题 .....	166
§ 17-3	各向异性板的小挠度弯曲问题 .....	168
§ 17-4	构造上正交各向异性的薄板 .....	172
§ 17-5	小挠度弯曲问题的经典解法 .....	176
§ 17-6	用差分法解小挠度弯曲问题 .....	180
§ 17-7	用变分法解小挠度弯曲问题 .....	182
§ 17-8	压曲问题及振动问题 .....	185

<b>第十八章 薄板的大挠度弯曲问题</b> .....	190
§ 18-1 基本微分方程及边界条件 .....	190
§ 18-2 无限长薄板的大挠度弯曲 .....	194
§ 18-3 变分法的应用 .....	199
§ 18-4 圆板的轴对称问题 .....	203
§ 18-5 用摄动法解圆板的轴对称问题 .....	205
§ 18-6 用变分法解圆板的轴对称问题 .....	210
<b>第十九章 壳体的一般理论</b> .....	216
§ 19-1 曲线坐标与正交曲线坐标 .....	216
§ 19-2 正交曲线坐标中的弹性力学几何方程 .....	219
§ 19-3 关于壳体的一些概念 .....	222
§ 19-4 壳体的正交曲线坐标 .....	224
§ 19-5 壳体的几何方程 .....	226
§ 19-6 壳体的内力及物理方程 .....	231
§ 19-7 壳体的平衡微分方程 .....	236
§ 19-8 壳体的边界条件 .....	240
§ 19-9 薄壳的无矩理论 .....	244
<b>第二十章 柱壳</b> .....	250
§ 20-1 柱壳的无矩理论 .....	250
§ 20-2 容器柱壳的无矩计算 .....	252
§ 20-3 顶盖柱壳的无矩计算 .....	258
§ 20-4 弯曲问题的基本微分方程 .....	260
§ 20-5 圆柱壳在法向荷载下的弯曲 .....	263
§ 20-6 轴对称弯曲问题 .....	268
§ 20-7 轴对称弯曲问题的简化解答 .....	272
§ 20-8 容器柱壳的简化计算 .....	275
§ 20-9 圆柱壳在任意荷载下的弯曲 .....	278
§ 20-10 顶盖柱壳的三角级数解答 .....	279
§ 20-11 顶盖柱壳的半无矩理论及梁理论 .....	284
<b>第二十一章 回转壳</b> .....	295

§ 21-1 中面的几何性质 .....	295
§ 21-2 回转壳的无矩理论 .....	297
§ 21-3 轴对称问题的无矩计算 .....	300
§ 21-4 容器回转壳的无矩计算 .....	303
§ 21-5 顶盖回转壳的无矩计算 .....	307
§ 21-6 非轴对称问题的无矩计算 .....	310
§ 21-7 球壳的轴对称弯曲 .....	314
§ 21-8 球壳轴对称弯曲问题的简化解答 .....	318
§ 21-9 球壳的简化计算 .....	323
<b>第二十二章 扁壳</b> .....	<b>328</b>
§ 22-1 中面的几何性质 .....	328
§ 22-2 基本方程及边界条件 .....	331
§ 22-3 无矩计算。重三角级数解答 .....	334
§ 22-4 无矩计算。单三角级数解答 .....	339
§ 22-5 静水压力作用下的无矩内力 .....	344
§ 22-6 合理中面 .....	349
§ 22-7 用混合法解弯曲问题 .....	352
§ 22-8 混合解函数的引用。级数解答 .....	354
§ 22-9 等曲率扁壳的计算 .....	357
§ 22-10 等曲率扁壳的简化计算 .....	358
§ 22-11 等曲率扁壳受均布荷载时的简化计算 .....	361
<b>内容索引</b> .....	<b>369</b>
<b>人名对照表</b> .....	<b>381</b>

# 第十三章 薄板的小挠度弯曲问题 及其经典解法

## § 13-1 有关概念及计算假定

在弹性力学里，两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面所围成的物体，称为平板，或简称为板，图 13-1。这两个平行面称为板面，而这个柱面称为侧面或板边。两个板面之间的距离  $t$  称为板的厚度，而平分厚度  $t$  的平面称为板的中间平面，简称为中面。如果板的厚度  $t$  远小于中面的最小尺寸  $b$ （例如小于  $b/8$  至  $b/5$ ），这个板就称为薄板，否则就称为厚板。

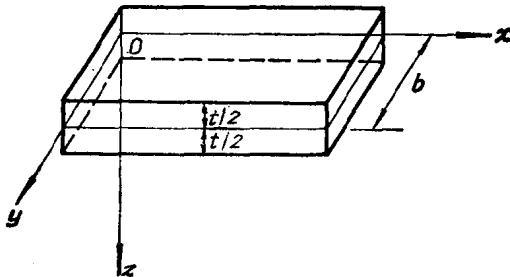


图 13-1

对于薄板，已经引用一些计算假定从而建立了一套完整的理论，可以用来较简便地计算工程上的问题。对于厚板，虽然也有这样或那样的计算方案被提出来，但还不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时，总可以把每一个荷载分解为两个分



荷载,一个是作用在薄板中面之内的所谓纵向荷载,另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载,可以认为它们沿薄板厚度均匀分布,因而它们所引起的应力、形变和位移,可以按平面应力问题进行计算,如第二章至第七章中所述。横向荷载将使薄板弯曲,它们所引起的应力、形变和位移,可以按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时,中面所弯成的曲面,称为薄板的弹性曲面,而中面内各点在横向的(即垂直于中面方向的)位移,称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论,也就是只讨论这样的薄板:它虽然很薄,但仍然具有相当的弯曲刚度,因而它的挠度远小于它的厚度。如果薄板的弯曲刚度很小,以致挠度与厚度属于同阶大小,则须另行建立所谓大挠度弯曲理论,见第十八章。

薄板的小挠度弯曲理论,是以三个计算假定为基础的(这些假定已被大量的实验所证实)。取薄板的中面为  $xy$  面,图 13-1,这些假定可以陈述如下:

(1) 垂直于中面方向的正应变,即  $\epsilon_z$ , 可以不计。取  $\epsilon_z = 0$ , 则由几何方程(8-9)中的第三式得  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ , 从而得

$$w = w(x, y). \quad (13-1)$$

这就是说,在中面的任一根法线上,薄板全厚度内的所有各点都具有相同的位移  $w$ ,也就等于挠度。

由于作出了上述假定,我们必须放弃与  $\epsilon_z$  有关的物理方程

$$\epsilon_z = \frac{\bar{\sigma}_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}.$$

这样才能容许  $\epsilon_z = 0$ , 而同时又容许  $\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$ , 如下一节中所见。

(2) 应力分量  $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{zy}$  和  $\sigma_z$  远小于其余三个应力分量, 因而是次要的, 它们所引起的形变可以不计(注意: 它们本身却是维持

平衡所必需的,不能不计)。

因为不计  $\tau_{zx}$  及  $\tau_{zy}$  所引起的形变, 所以有

$$\gamma_{zx}=0, \quad \gamma_{yz}=0。$$

于是由几何方程(8-9)得

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}。 \quad (13-2)$$

与上相似, 必须放弃与  $\gamma_{zx}$  及  $\gamma_{yz}$  有关的物理方程

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}。$$

这样才能容许  $\gamma_{zx}$  及  $\gamma_{yz}$  等于零, 而又容许  $\tau_{zx}$  及  $\tau_{yz}$  不等于零, 如下一节中所见。

由于  $e_z=0, \gamma_{zx}=0, \gamma_{yz}=0$ , 可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩, 并且成为弹性曲面的法线。

因为不计  $\sigma_z$  所引起的形变, 所以由物理方程有

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ e_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}。 \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

这就是说, 薄板小挠度弯曲问题中的物理方程和薄板平面应力问题中的物理方程是相同的。

(3) 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移, 即

$$(u)_{z=0} = 0, \quad (v)_{z=0} = 0。 \quad (13-4)$$

因为  $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ , 所以由上式得出

$$(e_x)_{z=0} = 0, \quad (e_y)_{z=0} = 0, \quad (\gamma_{xy})_{z=0} = 0。$$

这就是说,中面的任意一部分,虽然弯曲成为弹性曲面的一部分,但它在  $xy$  面上的投影形状却保持不变。

### § 13-2 弹性曲面的微分方程

薄板的小挠度弯曲问题是按位移求解的,取为基本未知函数的是薄板的挠度  $w$ 。因此,我们要把所有的其它物理量都用  $w$  来表示,并建立  $w$  的微分方程,即所谓弹性曲面微分方程。

首先把形变分量  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  用  $w$  来表示。将方程(13-2)对  $z$  进行积分,积分时注意  $w$  只是  $x$  和  $y$  的函数,不随  $z$  而变,即得

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z + f_1(x, y), \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z + f_2(x, y),$$

其中的  $f_1$  和  $f_2$  是任意函数。应用方程(13-4),得  $f_1(x, y) = 0$ ,  $f_2(x, y) = 0$ 。可见

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z。$$

于是可以把形变分量  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  用  $w$  表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}z。 \end{aligned} \right\} \quad (13-5)$$

在这里,由于挠度  $w$  是微小的,弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似地用  $w$  表示为

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (a)$$

所以(13-5)式也可以改写为

$$\varepsilon_x = \chi_x z, \quad \varepsilon_y = \chi_y z, \quad \gamma_{xy} = 2\chi_{xy} z。 \quad (13-6)$$

因为曲率  $\chi_x, \chi_y$  和扭率  $\chi_{xy}$  完全确定了薄板所有各点的形变分量,所以这三者就称为薄板的形变分量。

其次,将应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  用  $w$  来表示。由物理方程(13-3)求解应力分量,得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将(13-5)式代入式(b),即得所需的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (13-7)$$

注意  $w$  不随  $z$  变化,可见这三个应力分量都和  $z$  成正比。

再其次,将应力分量  $\tau_{xz}$  及  $\tau_{zy}$  用  $w$  来表示。在这里,因为不存在纵向荷载,所以有  $X=Y=0$ ,而平衡微分方程(8-1)中的前二式可以写成

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

将表达式(13-7)代入,并注意  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned}$$

注意  $w$  不随  $z$  而变,将上列二式对  $z$  进行积分,得

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + F_1(x, y), \\ \tau_{zy} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + F_2(x, y). \end{aligned}$$

其中  $F_1$  及  $F_2$  是任意函数。但是,在薄板的下面和上面,有边界条件

$$(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0, (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0。$$

应用这些条件求出  $F_1(x, y)$  及  $F_2(x, y)$  以后,即得表达式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( z^2 - \frac{t^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \tau_{zy} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( z^2 - \frac{t^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (13-8)$$

最后,将应力分量  $\sigma_z$  也用  $w$  来表示。利用平衡微分方程(8-1)中的第三式,取体力分量  $Z=0$ ,得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}。 \quad (c)$$

如果体力分量  $Z$  并不等于零,我们可以把薄板每单位面积内的体力和面力归入薄板上面的面力,一并用  $q$  表示,以沿  $z$  轴的正方向时为正:

$$q = (\bar{Z})_{z=-\frac{t}{2}} + (\bar{Z})_{z=\frac{t}{2}} + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} Z dz。 \quad (d)$$

这只会对最次要的应力分量  $\sigma_z$  引起误差,对其他的应力分量则毫无影响。这样的处理,和材料力学中对梁的处理相同。

注意  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , 将表达式(13-8)代入式(c),得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{t^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 w。$$

对  $z$  进行积分,得

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{t^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 w + F_3(x, y), \quad (e)$$

其中的  $F_3$  是任意函数。但是,在薄板的下面,有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}}=0。$$

将式(e)代入,求出  $F_3(x, y)$ , 再代回式(e),即得表达式

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[ \frac{t^2}{4} \left( z - \frac{t}{2} \right) - \frac{1}{3} \left( z^3 - \frac{t^3}{8} \right) \right] \nabla^4 w \\ &= -\frac{E t^3}{6(1-\mu^2)} \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{t} \right)^2 \left( 1 + \frac{z}{t} \right) \nabla^4 w.\end{aligned}\quad (13-9)$$

现在来导出  $w$  的微分方程。在薄板的上面,有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}} = -q,$$

其中  $q$  是薄板每单位面积内的横向荷载,包括横向面力及横向体力,如式(d)所示。将表达式(13-9)代入,即得

$$\frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = q,$$

或

$$D \nabla^4 w = q, \quad (13-10)$$

其中的

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \quad (13-11)$$

称为薄板的弯曲刚度,它的因次是[力][长度]。

方程(13-10)称为薄板的弹性曲面微分方程,是薄板小挠度弯曲问题的基本微分方程。求解薄板的小挠度弯曲问题时,须按照薄板侧面上(即板边上)的边界条件,由这个微分方程求出挠度  $w$ ,然后就可以按公式(13-7)至(13-9)求得应力分量。

### § 13-3 薄板横截面上的内力及应力

在绝大多数的情况下,都很难使得应力分量在薄板的侧面上(板边上)精确地满足应力边界条件,而只能应用圣维南原理,使薄板全厚度上的应力分量所组成的内力整体地满足边界条件。因此,在讨论边界条件以前,先来考察这些应力分量所组成的内力。

从薄板内取出一个平行六面体,它的三边的长度分别为  $dx$ 、 $dy$  和  $t$ ,图 13-2。

在  $x$  为常量的横截面上,作用着应力分量  $\sigma_x$ 、 $\tau_{xy}$  和  $\tau_{xz}$ 。因

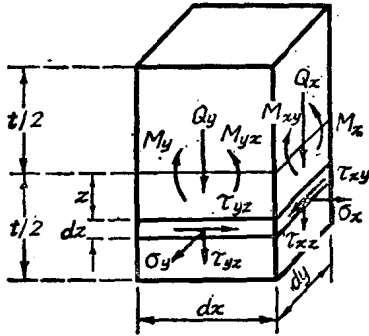


图 13-2

为  $\sigma_x$  及  $\tau_{xy}$  都和  $z$  成正比, 所以它们在薄板全厚度上的代数和分别等于零, 只可能分别合成为弯矩及扭矩。

在该横截面的每单位宽度上, 应力分量  $\sigma_x$  合成为弯矩

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x t dz) z = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz. \quad (a)$$

将(13-7)中的第一式代入, 对  $z$  进行积分, 得

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

与此相似, 应力分量  $\tau_{xy}$  将合成为扭矩

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{xy} dz. \quad (b)$$

将(13-7)中的第三式代入, 对  $z$  进行积分, 得

$$M_{xy} = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz = -\frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

应力分量  $\tau_{xz}$  只可能合成为横向剪力, 在每单位宽度上为

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz. \quad (c)$$

将(13-8)中的第一式代入,对  $z$  进行积分,得

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left( z^2 - \frac{t^2}{4} \right) dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \end{aligned}$$

同样,在  $y$  为常量的横截面上,每单位宽度内的  $\sigma_x$ 、 $\tau_{yz}$  和  $\tau_{xy}$  也分别合成为如下的弯矩、扭矩和横向剪力:

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (d)$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{yz} dz = -\frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = M_{xy}, \quad (e)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (f)$$

利用公式(13-11),各个内力的表达式可以简写为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = M_{yx} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (13-12)$$

其中的前三式也可以再改写为



$$\left. \begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \mu\chi_y), & M_y &= D(\chi_y + \mu\chi_x), \\ M_{xy} &= M_{yx} = D(1-\mu)\chi_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (13-13)$$

利用本节中导出的公式以及(13-10)和(13-11),从(13-7)、(13-8)、(13-9)三式中消去 $w$ ,可以得出各个应力分量与弯矩、扭矩、横向剪力或荷载之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{t^3}z, & \sigma_y &= \frac{12M_y}{t^3}z, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{t^3}z, \\ \tau_{xz} &= \frac{6Q_x}{t^3}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right), & \tau_{yz} &= \frac{6Q_y}{t^3}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right), \\ \sigma_z &= -2q\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{t}\right)^2\left(1+\frac{z}{t}\right). \end{aligned} \right\} \quad (13-14)$$

注意:以上所提到的内力,都是作用在薄板每单位宽度上的内力,所以弯矩和扭矩的因次都是[力],而不是[力][长度];横向剪力的因次是[力][长度]<sup>-1</sup>,而不是[力]。

还须注意:内力 $M_x$ 、 $M_{xy}$ 、 $Q_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{yx}$ 、 $Q_y$ 的正负号决定于表达式(a)至(f),而不能另行规定(也不必另行规定)。按照坐标 $z$ 及应力分量的正负号规定,图13-2中所示的内力是正的,相反的内力则是负的。

正应力 $\sigma_x$ 及 $\sigma_y$ 分别与弯矩 $M_x$ 及 $M_y$ 成正比,称为弯应力;剪应力 $\tau_{xy}$ 与扭矩 $M_{xy}$ 成正比,称为扭应力;剪应力 $\tau_{xz}$ 及 $\tau_{yz}$ 分别与横向剪力 $Q_x$ 及 $Q_y$ 成正比,称为横向剪应力;正应力 $\sigma_z$ 与荷载 $q$ 成正比,称为挤压应力。

在薄板弯曲问题中,一定荷载引起的弯应力和扭应力,在数值上最大,因而是主要的应力;横向剪应力在数值上较小,是次要的应力;挤压应力在数值上更小,是更次要的应力。因此,在计算薄板的内力时,主要是计算弯矩和扭矩,横向剪力一般都不须计算。根据这个理由,在一般的工程手册中,只给出弯矩和扭矩的计算公