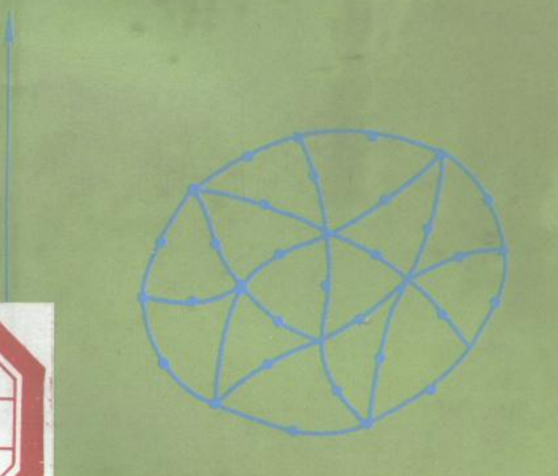
弹性力学及其数值方法

夏志皋　江理平　唐寿高　编著



同济大学出版社

弹性力学及其数值方法

夏志皋
江理平 编著
唐寿高

同济大学出版社

内容提要

本书根据作者们长期的教学经验和有关研究成果，以及国内外有关教材、文献资料撰写而成。全书共分10章，内容包括：应力、应变状态分析；弹性本构关系；弹性力学的基本方程及弹性力学问题的提法；平面问题和空间问题的解析解法；弹性薄板弯曲问题；变分法；有限单元法；有限差分法；加权残值法和边界单元法等。本书的特点是在阐述必备的基本理论和基本解法的基础上，着重介绍近几十年才发展起来的、应用越来越广的各种近似解法。因此，具有较强的实用性。本书主要作为工程力学专业及土建结构、工民建专业的教材，也可供有关专业的研究工作者和工程技术人员参考。

责任编辑　解明芳
封面设计　李志云

弹性力学及其数值方法
夏志皋　江理平　唐寿高　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：10.25　字数：290千字
1997年5月第1版　1997年5月第1次印刷
印数：1—4000　定价：9.00元
ISBN 7-5608-1754-8/O·151

前　言

目前，工程专业大学生采用的弹性力学教材内容以经典基础理论和解析解法为主。由于课程内容偏重于理论，不仅使学生学习比较困难，而且不易用于解决工程实际问题。电子计算技术的发展为力学学科的发展和应用带来了广阔的前景，对弹性力学亦是如此。它不仅促进了基础理论的研究，使最小二乘法、差分法等经典的数值方法获得了新的活力，而且开发了各种与电子计算技术相结合的现代数值计算方法，使弹性力学能更好地解决工程实际问题。

为了使力学教育能充分地反应这一新的变化，适应科学技术和国民经济发展的需要，力学教育的改革势在必行。就弹性力学教材而言，其内容、体系、教学方法、手段等都必须加以革新。其中，处理好经典理论、方法和现代计算方法的关系也是一个重要的问题，本书试图在这方面作一些尝试。简单地讲，就是在讲清基本原理、概念，保证必要的基础理论知识的前题下，精简经典解析法的内容，突出实用性强的现代计算方法。

本书的第一章至第四章由江理平执笔，第五章至第七章由夏志皋执笔，第八章至第十章由唐寿高执笔，全书由夏志皋最后定稿。本书作者长期从事弹性力学的教学和科研工作，书中充分反映了笔者的教学经验、体会、心得以及部分科研成果。同时，也充分吸取了国内外教材中的宝贵经验。由于笔者的学识和水平所限，不足之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

吴家龙教授审阅了全部书稿，给予了许多关心和帮助，对此，表示衷心的感谢！

敬以本书献给培养了我们，并为之服务了数十年的母校——同济大学建校 90 周年！

作　者

1996 年秋于同济园

目 录

第一章 绪论……………………………………………… (1)
§1-1 弹性力学的任务、内容和研究方法………………… (1)
§1-2 弹性力学的基本假设 ……………………………… (2)
第二章 弹性力学问题的建立…………………………… (4)
§2-1 应力和一点的应力状态 …………………………… (4)
§2-2 和坐标轴倾斜的微分面上的应力 ………………… (8)
§2-3 平衡微分方程 静力边界条件……………………… (10)
§2-4 位移分量和应变分量 几何方程…………………… (12)
§2-5 应变协调方程………………………………………… (16)
§2-6 广义虎克(Hooke)定律 …………………………… (18)
§2-7 弹性力学的基本方程及三类边值问题……………… (20)
§2-8 解决问题的两条途径………………………………… (23)
§2-9 解的唯一性定律 逆解法和半逆解法……………… (28)
§2-10 圆柱体的扭转 圣维南原理 ……………………… (29)
习 题 ……………………………………………………… (33)
第三章 弹性力学平面问题 …………………………… (37)
§3-1 平面应变问题和平面应力问题……………………… (37)
§3-2 化平面问题为双调和方程的边值问题……………… (43)
§3-3 代数多项式解答……………………………………… (45)
§3-4 若干典型实例………………………………………… (48)
§3-5 平面问题的极坐标方程 …………………………… (60)
§3-6 平面轴对称应力问题………………………………… (67)
§3-7 具有小圆孔的平板均匀拉伸………………………… (74)
§3-8 楔形体问题…………………………………………… (78)
§3-9 半平面问题…………………………………………… (81)
习 题 ……………………………………………………… (84)
第四章 弹性力学空间问题 …………………………… (88)

§4-1　一点的应力状态和应变状态分析 …………… (88)
§4-2　柱形杆的扭转 ………………………………… (100)
§4-3　实例 ………………………………………… (108)
§4-4　薄壁杆的扭转 ………………………………… (114)
§4-5　轴对称情况下基本方程的柱坐标形式 …… (118)
§4-6　借助于拉甫(Love)位移函数求解空间
轴对称问题 ………………………………… (121)
习　题……………………………………………… (127)
第五章　薄板的弯曲……………………………… (129)
§5-1　一般概念和基本假设 ……………………… (129)
§5-2　基本关系式　弹性曲面微分方程 ………… (130)
§5-3　矩形薄板的边界条件 ……………………… (139)
§5-4　矩形薄板的纳维解法 ……………………… (143)
§5-5　矩形薄板的李维解法 ……………………… (147)
§5-6　圆形薄板的弯曲 …………………………… (152)
§5-7　圆形薄板的轴对称弯曲 …………………… (156)
习　题……………………………………………… (158)
第六章　弹性力学的变分解法…………………… (162)
§6-1　弹性体的应变能 …………………………… (162)
§6-2　位移变分方程　最小势能原理 …………… (165)
§6-3　利用位移变分原理的近似解法 …………… (170)
§6-4　瑞利-李兹法和伽辽金法的应用 ………… (174)
§6-5　应力变分方程　最小余能原理 …………… (186)
§6-6　利用应力变分原理的近似解法 …………… (191)
习　题……………………………………………… (195)
第七章　平面问题的有限单元法………………… (199)
§7-1　基本量及其关系的矩阵表示 ……………… (199)
§7-2　有限单元法基本思想的概述 ……………… (202)
§7-3　位移模式　解答的收敛准则 ……………… (204)
§7-4　单元分析 …………………………………… (208)

§7-5 荷载向结点的移置 荷载列阵 …………… (214)
§7-6 结构的整体分析 ………………………… (215)
§7-7 简例及解题步骤 ………………………… (220)
§7-8 较精密的平面单元 ……………………… (227)
§7-9 计算实例 ………………………………… (230)
习 题…………………………………………… (233)
第八章 有限差分法………………………………… (235)
§8-1 差分公式的导出 ………………………… (235)
§8-2 梁弯曲问题的差分解 …………………… (238)
§8-3 平面问题的差分解 ……………………… (242)
§8-4 平面问题的差分解举例 ………………… (248)
§8-5 矩形薄板弯曲问题的差分解 …………… (252)
§8-6 矩形薄板弯曲问题的差分解举例 ……… (255)
§8-7 基于差分半离散的线法 ………………… (258)
习 题…………………………………………… (267)
第九章 加权残值法………………………………… (270)
§9-1 加权残值法的基本概念 ………………… (270)
§9-2 加权残值法的基本方法 ………………… (272)
§9-3 用加权残值法解梁弯曲问题举例 ……… (275)
§9-4 用加权残值法解薄板弯曲问题举例 …… (280)
§9-5 离散型加权残值法 ……………………… (286)
习 题…………………………………………… (292)
第十章 边界单元法………………………………… (294)
§10-1 弹性力学基本公式的下标记法 ………… (295)
§10-2 弹性力学边界积分方程 ………………… (296)
§10-3 弹性力学边界单元法 …………………… (304)
§10-4 二维弹性力学边界单元法 ……………… (309)
§10-5 边界单元法应用例题 …………………… (312)
习 题…………………………………………… (316)
主要参考文献……………………………………… (317)

第一章 绪　论

§1-1 弹性力学的任务 内容和研究方法

弹性力学，又称弹性理论，是研究弹性体在受到外力、温度变化以及支座沉陷等外界因素作用下所产生的应力、应变和位移的大小和分布规律的一门学科。

弹性力学作为固体力学的一个分支，与材料力学、结构力学有不少共同之处。它们的基本任务都是解决各种结构或构件的强度和刚度问题，在处理问题的基本方法上来看，它们均要从静力学方面、几何学方面和物理学方面进行研究。然而，弹性力学与材料力学、结构力学相比较，还是有许多不同的方面。在研究对象方面，材料力学主要研究杆状构件，结构力学主要研究的是杆状构件系统，而弹性力学既研究杆状构件，也研究板、壳、水坝等的实体结构。在研究的范围方面，弹性力学只限于分析构件在弹性阶段的应力、应变和位移的情况，即只限于对“完全弹性”体的研究，而对于材料力学，还会涉及到材料的塑性阶段以及蠕变、疲劳等问题。在研究的方法上，为了计算上的方便，材料力学要对杆件的应力分布与变形状况作一些近似的假定，所得结果也往往是近似的，初等的，是在一定条件下使用的。而弹性力学只从基本假设出发，所得结果比较精确，可以校核材料力学相应问题结果的精度。例如，对直梁受横力弯曲问题，材料力学对梁的变形作了平截面的假定，从而得出梁的弯曲应力沿横截面按线性分布的近似结果，但实际上，按弹性力学的解析解表明，梁的弯曲应力沿横截面为非线性分布，由此，可以校核材料力学的结果，对梁的跨度与高度不同的比值所带来的误差。又如，材

料力学在计算带孔杆件拉伸时,认为拉应力在沿孔径的净截面上的分布是均匀的,但按照弹性力学分析结果,拉应力在沿净截面方向上不仅不是均匀分布的,而且在孔边附近会产生高度的应力集中现象。

弹性力学的经典解法存在一定的局限性,当弹性体的边界条件和受载情况复杂一点,往往无法求得偏微分方程边值问题的解析解。为此,人们对弹性力学的数值解方面作了大量的研究,差分法、变分法等相继问世。值得一提的是近30年来发展起来的有限单元法,由于电脑的普及及相应软件的成熟,已成为工程技术人员与力学工作者应用与研究弹性力学问题的有力手段,此外,一些半数值解法,如加权残值法、边界元法等也日益为专业人员认识和使用,为了让读者能及时了解并掌握这些很有实用价值的弹性力学数值解法,本书将系统地介绍这些方法,并例举典型算例来证实这些解法的结果虽然在理论上有一定的近似性,但应用在工程上常常是足够精确的。

§1-2 弹性力学的基本假设

用弹性力学分析各种实际构件的力学性质时,必然会遇到许多复杂的因素而引起数学上的麻烦。为此,我们必须对客观事物加以抽象,忽略次要因素,提出一些基本假定。本书中对所有问题的研究,如无特别指出,将按下列六条基本假设为前提。

1. 连续性假设

弹性力学作为连续介质力学的一部分,将弹性体假定成连续密实的物体而忽略组成物体的质点之间的空隙以及材料在制造过程中产生的微缺陷。从这条假设出发,认为物理量如应力、应变和位移等都是连续的,从而可以表示成坐标的连续函数,在数学推导时能方便地运用连续和极限的概念。

2. 均匀性假设

即假定物体由同一类型的均匀材料组成的,因而在物体内

各部分的物理性质是相同的，不会随坐标的位置的改变而发生变化。根据这条假设，就可以从物体内部取出任一部分进行分析，再将分析的结果运用到整个物体中去。

3. 各向同性假设

假定物体在不同方向上具有相同的物理性质，从而使应力与应变的关系不随坐标方向的改变而改变。

4. 线性完全弹性假设

即对应于一定的温度，应力与应变呈线性的一一对应的关系。这样，在引起物体变形的外加因素除去以后，将完全恢复其原来的形状和大小，而弹性常数与应力应变的大小无关。

5. 小变形假设

假定物体在外界因素作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸。根据这条假设使问题得到简化，尤其是使得基本方程为线性的偏微分方程组。

6. 无初始应力的假设

假定物体在受到外界因素作用之前，物体处于无应力状态。根据这个假定，由弹性力学求得的应力仅仅是由于荷载作用、温度改变等外界因素所引起的。如物体内有初应力的存在，只须与弹性力学求得的应力相加即可。

第二章　弹性力学问题的建立

由于弹性力学研究的问题本质上是超静定问题，因而必须从静力学、几何学和物理学三方面进行研究。由静力学出发，将分析一点的应力状态，建立平衡微分方程和静力边界条件；经几何学分析，进一步确立位移与应变的几何关系以及应变协调关系的方程式；再从物理学方面考虑应力和应变之间所固有的联系，即本构关系。在建立了以上三个方面的全部基本方程以后，可以综合简化成以位移或者应力作为基本未知量的偏微分方程组作为具体的求解途径。因为偏微分方程的直接求解往往十分困难，通常采用逆解法与半逆解法来获得所求问题的解。在使应力分量或位移分量满足给定的边界条件时，常常要用到局部性原理，使问题得以简化。这些就是本章的主要内容。

§2-1　应力和一点的应力状态

首先从静力学观点出发，分析物体内任意一点的应力及其相应的应力状态。

一般将外界作用在物体上的力称为**外力**，具体的又可根据作用在物体内部或表面而区分为**体力**和**面力**。为了表示物体内某一点 M 所受体力的大小和方向，取包含 M 点的微小体积 ΔV，图 2-1(a)所示。设作用在 ΔV 上的体力为 ΔQ，则体力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta V$，令 ΔV 向 M 点趋于无限小，即可定义体力矢量 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \boldsymbol{F}$$

矢量 $\boldsymbol{F}$ 在 x, y, z 坐标轴上的投影 X, Y, Z 称为物体在 M 点的

体力分量,并规定沿坐标轴正方向为正,沿坐标负方向为负,它们的量纲为[力][长度]$^{-3}$。

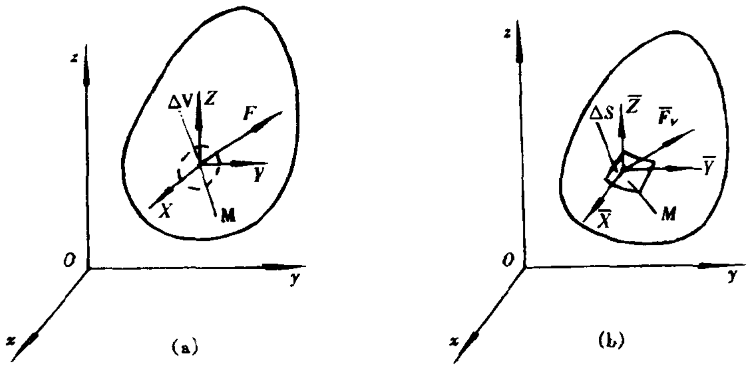


图 2-1

面力,如图 2-1(b)所示,在物体表面(外法线为 ν) 某一点 M 取微分面 ΔS,设作用于 ΔS 上的面力为 $\Delta\overline{Q}$,则面力的平均集度为$\Delta\overline{Q}/\Delta S$,令 ΔS 向 M 点趋于无限小,即得面力矢量 $\overline{\boldsymbol{F}}_\nu$ 的定义

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\overline{Q}}{\Delta S}=\overline{\boldsymbol{F}}_\nu$$

面力矢量 $\overline{\boldsymbol{F}}_\nu$,同样可以沿 x, y, z 坐标轴方向投影,得到$\overline{X_\nu}$, $\overline{Y_\nu}$, $\overline{Z_\nu}$的三个分量,其方向与坐标轴正方向一致为正,反之为负,它们的量纲为[力][长度]$^{-2}$。

物体受外界因素(如外力、温度变化等)的作用下,在其内各部分之间要产生相互的作用。这种物体内的一部分与其相邻的另一部分之间的相互作用力,称为**内力**。

为了具体地反映内力的分布情况,我们运用截面法引进内力集度,即**应力**的概念。假设过物体内某一点 M 作一个截面将物体分成两部分,并令截面在 M 点附近的微分面 ΔS 的外法线为 ν。在微分截面 ΔS 的两边,我们用 $\Delta\boldsymbol{P}$ 与 $\Delta\boldsymbol{P}'$分别表示被割开的物体的两部分在 ΔS 上的内力,它们是作用力与反作用力

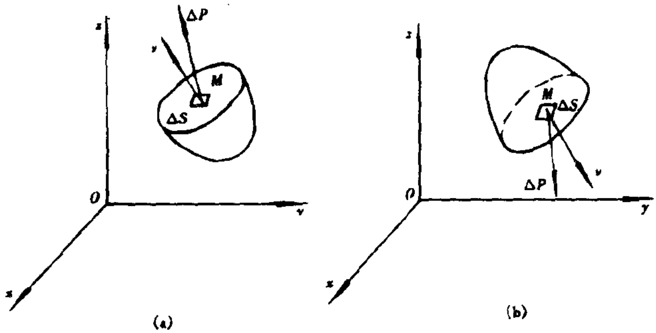


图 2-2

的关系，见图 2-2。留下图 2-2(a)的那部分，则 ΔS 上内力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta S$，令 ΔS 向 M 点趋于无穷小，则得到过 M 点在外法线为 ν 的微分面上的应力矢量 $\boldsymbol{F}_\nu$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} = \boldsymbol{F}_\nu \tag{2-1}$$

应力矢量 $\boldsymbol{F}_\nu$ 的下标，表示了其所在微分面的法线方向。根据计算的要求，我们对应力矢量 $\boldsymbol{F}_\nu$ 有两种分解方法，一种方法是沿 x, y, z 坐标轴方向投影，用 X_ν, Y_ν, Z_ν 作为其分量；另一种方法是沿微分面法线方向以及法线 ν 和矢量 $\boldsymbol{F}_\nu$ 构成的平面与微分面相交的切线方向投影，分别用 σ_ν 和 τ_ν 来表示，σ_ν 称为正应力，τ_ν 称为剪应力，见图 2-3 所示。

应力矢量的定义告诉我们，应力除了有大小、方向和作用点外，还必须明确是作用在过该点的哪一个微分面上，因为微分面不同应力矢量也不同。我们知道过物体内一点可以作无数个微分面，从而将经过物体内同一点的各个微分面上的应力情况，称为**一点的应力状态**。为了便于分析和计算一点的应力状态，我们可经过物体内任意一点 M 分别作三个与坐标平面平行的特殊微分截面，并且保留外法线方向与坐标轴正方向一致的部分，见图 2-4。在这三个微分面上的应力矢量分别为 $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$，它们的下标表示了微分面的外法线方向与 x, y, z 坐标轴方向一

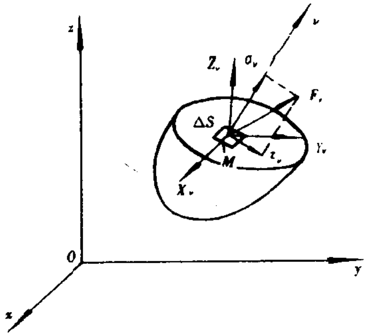


图 2-3

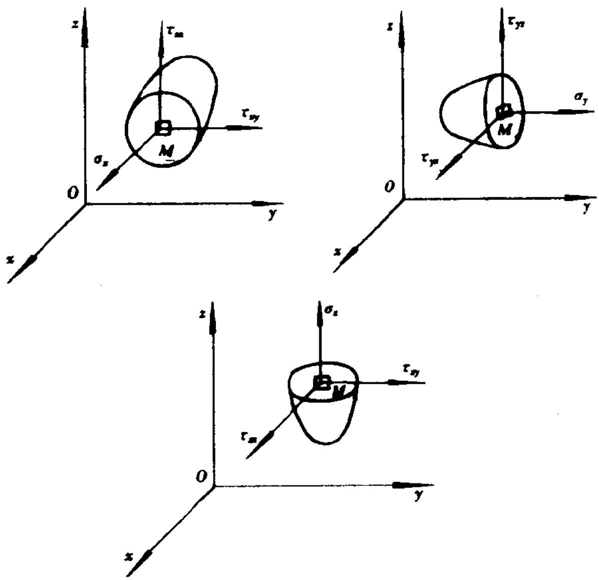


图 2-4

致。将它们分别向坐标轴投影,从而得到九个应力分量。这九个应力分量的整体构成一个二阶对称张量,称为应力张量,表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

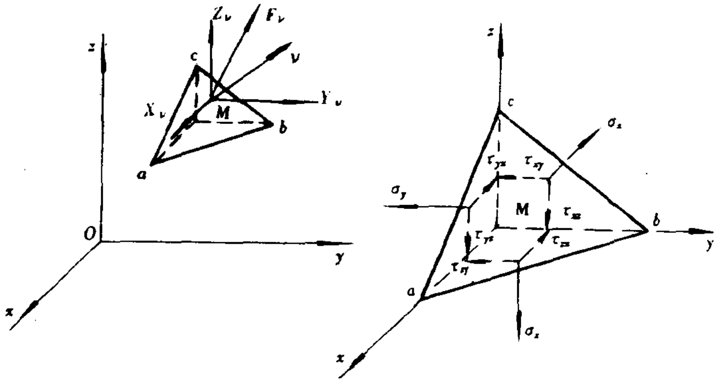
其中正应力的下标表示作用面的方位与它的方向，而剪应力的两个下标，第一个下标表示作用面方位，第二个下标表示它的方向。至于它们的正负号，可按如下规定：当微分面外法线指向与坐标轴正方向一致时，这些应力分量以沿坐标轴正方向为正；当微分面外法线指向与坐标轴负方向一致，则这些应力分量以沿坐标轴负方向为正，与上述情况相反，则为负的应力。

如果知道了物体内某一点的这 3 个特殊微分面上的 9 个应力分量，又知道了过这一点的任意一个微分面的外法线的方向余弦，则由下一节所导出的关系式，便完全可以确定该点的应力状态。

§2-2　和坐标轴倾斜的微分面上的应力

为了导出过物体内某一点 M 的 3 个特殊微分面上的 9 个应力分量与通过 M 点的任意微分面上应力分量之间的关系式，不妨用过 M 点的 3 个与坐标平面平行的微分面以及一个与坐标倾斜的微分面构成一个微小的四面体，如图 2-5(a)所示，并假想把四面体从物体内脱离出来。取 M 点为原点，各坐标面受力如图 2-5(b)所示。

现在考虑其平衡关系：微分面△Mbc，△Mac，△Mab 的外法线方向均指向坐标轴的负向，因而在这 3 个微分面上 9 个正的应力分量的方向必须指向坐标轴的负向。设与坐标倾斜的微分面△abc 的外法线 ν 的方向余弦为 l, m, n，它的面积为 ΔS，在△abc 上的应力矢量 $\boldsymbol{F}_\nu$ 的 3 个分量为 X_ν，Y_ν，Z_ν，四面体 Mabc 受到的体力分量为 X, Y, Z。各微分面其几何关系为



(a)　　　　　　(b)

图 2-5

$$\left.\begin{array}{l}\triangle \text{Mbc 面积} = \Delta S l \\ \triangle \text{Mac 面积} = \Delta S m \\ \triangle \text{Mab 面积} = \Delta S n\end{array}\right\} \tag{2-3}$$

首先考虑平衡条件$\sum X=0$，得

$$X_\nu \Delta S - \sigma_x \Delta S l - \tau_{yx} \Delta S m - \tau_{zx} \Delta S n + \frac{1}{3} X \Delta S \Delta h = 0 \quad \text{(b)}$$

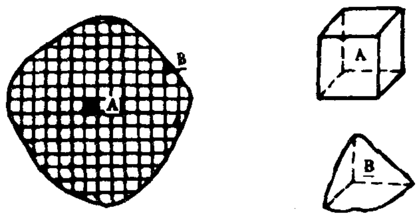
其中 Δh 为微分面 abc 到 M 点的距离，将(b)式两边除以 ΔS 再令 $\Delta h \to 0$，即使倾斜微分面无限接近 M 点，整理后便可得到所求关系式。同理，又可从平衡条件$\sum Y=0$，$\sum Z=0$ 得到另外两式，即：

$$\left.\begin{array}{l}X_\nu = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_\nu = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_\nu = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\end{array}\right\} \tag{2-4}$$

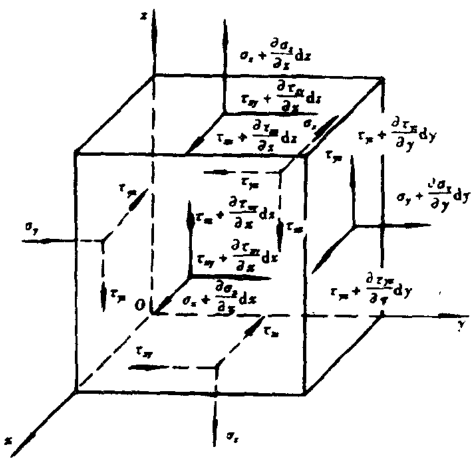
这样，只要知道了一点的九个应力分量，利用公式(2-4)，可以十分方便地求出通过同一点的各个微分面上的应力分量。

§2-3 平衡微分方程 静力边界条件

如果将物体分成若干个任意形状的单元体，当物体受外力(如体力和面力)作用后处于平衡状态，则每一个单元体也是平衡的；反之，每一个单元体的平衡，也保证了整个物体的平衡。因此，不妨用三组分别与坐标平面平行的截面，将物体分割成无数个微分平行六面体(在体内)或微分四面体(在表面)，见图 2-6(a)。



(a)



(b)

图 2-6