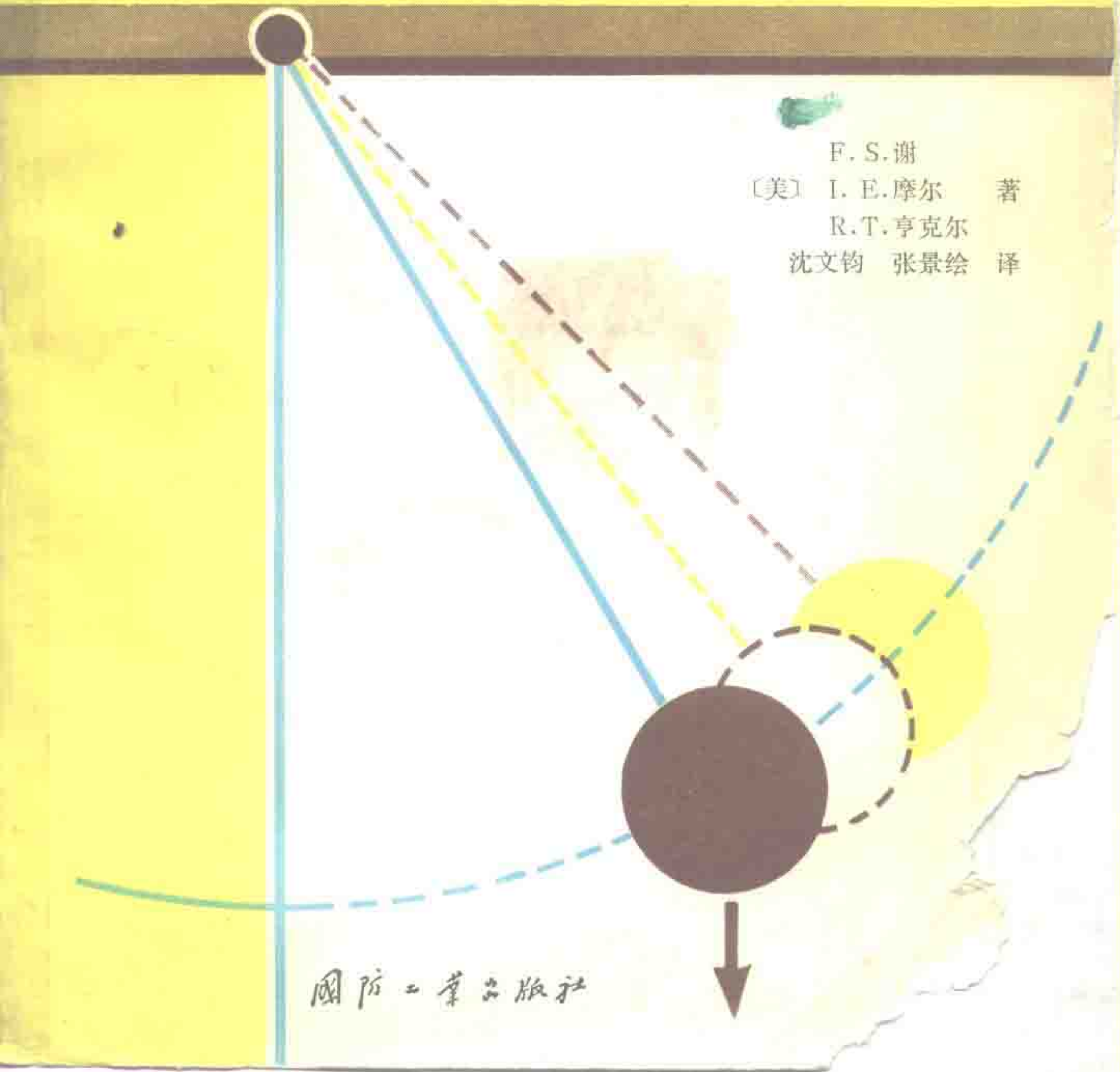
机械振动——理论及应用



F. S. 谢
〔美〕 I. E. 摩尔　著
R. T. 亨克尔
沈文钧　张景绘　译

国防工业出版社

机 械 振 动

——理论及应用

F. S. 谢
〔美〕I. E. 摩尔 著
R. T. 亨克尔

沈文钧 张景绘 译

国防工业出版社

内 容 简 介

本书介绍振动理论的基本内容及应用。全书共分九章，主要内容包括：振动的一般概念，单自由度、多自由度系统的线性振动理论及分析方法，非线性振动的分析方法及应用数字计算机实现工程计算的计算机求解。书中编有解各种工程振动问题的计算程序(使用 FORTRAN 语言)。除第一章外，各章均附有习题及计算机习题。

本书适用于工科院校有关专业的师生及从事振动研究和计算工作的工程技术人员阅读。

Mechanical Vibrations Theory and Applications
second edition
Francis S. Tse, Ivan E. Morse, Rolland T. Hinkle
Allyn and Bacon Inc 1978

*

机 械 振 动
——理论及应用
F.S. 谢
〔美〕I. E. 摩尔 著
R.T. 亨克尔
沈文钧 张景绘 译

*

国防工业出版社 出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

$787\times1092^{1}/_{16}$ 印张22 507千字
1984年8月第一版 1984年8月第一次印刷 印数：0,001—9,000册
统一书号：15034·2632 定价：2.95元

译 者 序

原书是机械工程和应用力学方面的阿林（Allyn）和培根（Bacon）丛书中的一本。

该书与其它一些振动专著相比，具有以下特点：

（1）内容较全面。作为教材，可使学生获得较深厚的理论基础。该书叙述简洁明了，概念清晰，讲授和阅读都较容易。正如原书序言中所述，低学时和高学时的课程都可选用该书作为教材。作为参考书，由于内容较全面，也可供工程技术人员查阅。

（2）该书介绍了大量工程实际问题，可使初学者对振动有较多的感性认识；也可使解决实际振动问题的技术人员有范例可寻，对解决系统的简化和建立计算模型的难点实有帮助。

（3）求解动力学问题的各种方法该书都有介绍，如频域分析的传递函数或机械阻抗法，求固有频率的传递矩阵法、矩阵迭代法及多种近似方法，求系统响应的模态分析法（包括复模态理论）、直接积分法和冲击谱的计算方法，非线性振动的图解法和常用的解析方法，等等，便于工程技术人员选用。

（4）编著了数字计算机求解一章，介绍的计算机程序包括了各类工程振动问题。使用FORTRAN语言。每个程序都与相应章节内容相对应，用以配合基本概念和计算方法的教学，可改变过去振动课传统的教学内容和方法，适应广泛应用计算机的要求，译者曾做过尝试，效果良好。程序多以子程序形式编写，对于工程技术人员，不但可直接引用书中的程序来计算工程实际问题，也可方便地引用书中的子程序组合成各种应用程序。

（5）各章都有较多的习题，且习题类型较全。值得特别指出的是，除第一章外，各章都编写有计算机习题，使学生在初学时就可做实际振动问题的计算。

总之，原著不但是一本较好的教材，也是一本易于工程技术人员直接使用的参考书。

全书由张景绘整理校对。参加翻译工作的还有姚天长、张希农。

感谢唐照千教授的指导。

对本书翻译中的错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

译　　者

序　言●

振动是研究振荡运动的。研究的基本目标是确定振动对系统性能及安全性所产生的影响，以及控制它的影响。随着高性能机器和环境控制的进展，对振动的研究已成为大多数工程课题的一部分。

本书仍保留了第一版的格式，但对全书的内容做了实质性的修订。鉴于工业界广泛使用国际单位制（SI），本书在题目中也使用了SI单位制。

本书的任务是：首先，建立对工程实际的感性认识；其次提供适当的基础理论；最后，对更广泛的应用问题推广这些概念。本书着重关于物理量的工程含义，而数学的结构形式起着支柱作用。整个教程在给出一般概念之前，都通过应用实例给学生一个参考构架，避免陷于过分的抽象。为了进一步加强工程实际，还介绍了离散系统的详细数字计算，可使学生能解答有意义的数学问题。

前三章是单自由度系统。在第一章中叙述振动的一般概念。在第二章中，通过对包括质量、弹簧、阻尼器和激振元件的一般模型的研究，导出时间域和频率域分析的理论。该章还为以后章节提供了模态分析的基础。在第三章中的应用问题表明模型中的元件实际上是等效量。尽管采用同样的理论，但在工程问题中，系统的外貌可能大大不同于模型。第三章的重点是将问题有系统地讲授，全都是对问题的综合和分类，不会遇到陌生的概念。

在第四章中，通过两个自由度系统引出离散系统，详细论述了坐标耦合。在第五章中叙述了求固有频率的常用方法。在第六章中使用矩阵技术，并将能量用矩阵表示，对前两章的内容做了进一步的讨论。因此，学生在学习中，对很多的坐标变换不应感到太别扭。

第七章讨论连续系统的一维波动方程和梁的方程。编写这些内容是为了表明连续系统和离散系统的相似性。第八章解释有关非线性系统某些共有的现象，这些现象不能由线性理论所预示。该章包括两个主要部分，分别对应非线性系统的几何法和解析法。

在第九章中编制的数字计算内容是为了配合前面各章所介绍的一系列课题，可分配到各章与教材同时讲授。表9-1所列出的程序无论对有阻尼的还是无阻尼的离散系统的计算以及计算结果的绘图都可满足，该表还给出了详细的说明，可帮助学生使用这些程序。所有程序都以对话形式编写，为使用这些程序，具备FORTRAN语言的起码知识是必需的。

前五章是振动基础内容的主要部分，可作为三年级的一学期即低学时振动课的教材。针对具体的课程教学目的要求，第3-5节的若干部分可做为阅读材料，第3-6～3-8节、4-9节、5-4～5-6节可以不讲，这并不会失掉整个内容的连贯性。

作为四年级的一学期即中等学时的教材，教师可选用第一章～第四章、第六章、第七章及第八章的一部分。有些课题如等效粘性阻尼可以不讲。

另外，作为三年级或四年级程度的一年连续课的高学时的教材，本书有足够的内容。

● 本序言有删节。——译者

一般，在机械振动中，讲授振动基本内容的第一教程即前五章的内容是必修的，讲授其它部分内容的第二教程是选修的。整个教材可对学生的进一步研究打下良好的基础。

十分感谢很多朋友、学生和职员对我们的建议，感谢构成这个研究领域的很多著者，感谢本书参考文献中列出的诸位作者。特别感谢L.K.詹姆斯博士对第九章的建议，K.G.马内编制了附录C中的子程序＄PLOTF。

F.S.谢

I.E.摩尔

R.T.亨克尔

目 录

第一章 导 论

1-1 主 要 目 的

振动的研究对象是动力系统的振荡运动。动力系统是由具有质量而且各部分可作相对运动的物质所组成的。一切具有质量和弹性的物体都能产生振动。质量是物体所固有的，而其弹性是由于物体各部分的相对运动所引起的。所考虑的系统可以很简单，也可以很复杂，它们的形式可以是一个结构、一台机器或其部件，或是一组机器。系统的振荡运动一般可能是不好的，但也可能是无关紧要的，而且也可能是为完成某种任务所需要的。

设计人员的任务是：对于不好的振动要设法抑制；通常情况下是不希望存在振动的，而当振动有用时则使之增强。机器中异常的振动能使机件松脱，机器失灵甚或发生破坏事故。另一方面，铸造车间的振动器和试验机中的激振器则都需要振动。很多仪器的性能都有赖于对其各种部件的振动特性进行有效的控制。

我们的主要研究任务是分析动力系统的振荡运动以及和运动有联系的力。研究振动的最终目的是确定其对所考虑系统的性能和安全性的影响。振荡运动分析是达到此目的的重要步骤。

我们的讨论将从说明振动系统的基本元件开始，引入一些专用术语和概念，并先讨论简谐运动。这些内容在整本书中都将用到。其它概念和术语则将在需要的适当地方再引述。

1-2 振动系统的元件

组成振动系统的元件示于图 1-1 。它们是经过理想化的，称作（1）质量，（2）弹簧，（3）阻尼器，（4）激振。前面三个元件表征物理系统。例如，可以说所给定系统是由如图中所布置的一质量、一弹簧和一阻尼器所组成的。能量可存贮在质量和弹簧中，而在阻尼器中以热的形式耗散能量。能量是通过施加激振作用输给系统的。如图 1-1 所示，一激振力作用于系统的质量 m 上。

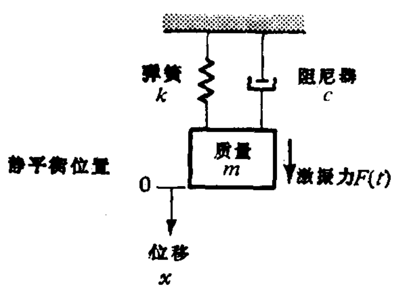


图1-1 振动系统的元件

质量 m 被视作刚体。它进行振动，并按物体的速度变化情况得到或失去动能。按照牛顿第二定律，质量和其加速度的乘积等于作用于质量上的力，而加速度的方向就是力作用的方向。功等于力乘以力作用方向上的位移。功可转变为质量的动能，当功为正值时，动能增加，而当功为负值时则动能减少。

弹簧 k 具有弹性，并假定其质量可以忽略。当弹簧变形时，如螺旋弹簧伸长或缩短时，将存在弹簧力，因此弹簧力只有在弹簧两端间有相对位移时才会存在。使弹簧变形所做的功转变为势能，亦即存贮在弹簧内的应变能。线性弹簧是符合虎克定律的弹簧，即其

弹簧力与弹簧变形成正比，其比例常数，以单位变形产生的力计量，称作刚度，或弹簧常数 k。

阻尼器 c 既无质量又无弹性。只有当阻尼器两端有相对运动时阻尼力才存在。输入阻尼器的功或能量转化为热，故阻尼元件是非保守的。粘性阻尼，在阻尼力与速度成正比的情况下，则称为线性阻尼。粘性阻尼或等效粘性阻尼是工程上常用的假设。粘性阻尼系数 c 的计量单位是单位速度所产生的力。平常还会遇得很多种非线性阻尼形式，例如一物体在液体中运动受到摩擦阻力近似地与速度平方成正比，但精确地说，其幂指数值与很多变量有关。

能量是通过激振作用输给一系统的。激振力可以作用在质量上，而激振运动可作用在弹簧和阻尼器上。作用在质量 m 上的激振力 $F(t)$ 示于图 1-1 。激振按预定的时间函数变化，故在任一时刻的激振都是已知的。另一方面，如系统悬挂在一支承物上，则可通过给此支承物以一定的运动来使激振作用于此系统。在机械上，激振往往由运动部件的不平衡所引起。动力系统因激振的作用而产生的振动称为强迫振动。然而，强迫振动常定义为由一周期性激振引起和保持的振动。

如果振动是周期性的，则系统的运动经过相同的时间间隔后会重复产生，如图 1-2 所示。系统产生重复运动所需的最小时间间隔称为周期 τ，即完成一个运动循环所需的时间。频率 f 是单位时间内运动重复的次数。在相等时间间隔内并不重复的运动称为非周期运动。

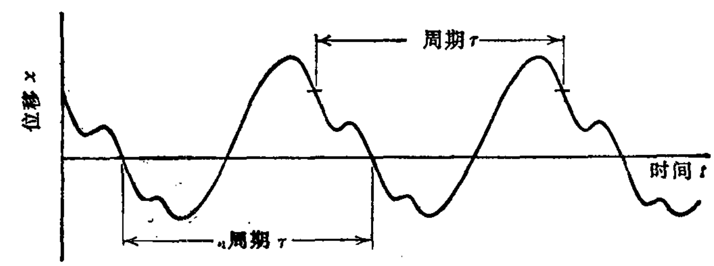


图1-2 周期运动

动力系统可以由某些初始条件或时间等于零时的扰动使之产生运动。如果零时刻以后就无扰动或激振作用，则系统的振荡运动称为自由振动。故自由振动表征系统振动的固有性质或固有模态。初始条件是一种能量输入。如使一弹簧变形，输入的是势能。如给一质量以某一初速度，则输入的是动能。故初始条件是由于起始时储入系统的能量而引起的。

如果系统中不存在阻尼，就没有能量耗散。初始条件将使系统振动，而无阻尼系统的自由振动将不会随时间增长而消失。如果系统中有阻尼存在，阻尼器就会消耗能量，而自由运动最后将会停止，系统将保持静平衡位置。因为所储能量决定于初始条件，故从初始状态渐弛为静平衡状态的自由振动同样能表征系统的固有性质。

除非另外专门说明，为简化计，通常都采用集中质量、线性弹簧和粘性阻尼器的假设。具有这些特性的系统被称为线性系统。线性系统的一个重要特性是适用叠加原理。例如，同时有两个激振作用在系统上时的综合运动就是每一激振单独作用所产生的运动的线性组合。图 1-1 中各元件的 m、c 和 k 值常称作系统参数。对于任一给定的问题，这些参数值均假定是时间不变量(不随时间而变的)，故方程式中的系数或参数都是常数。系统的运动方程就成为具有常系数的线性微分方程，它很容易求解。

应注意，图 1-1 中的理想化元件组成的是振动系统的模型，实际上此系统可能是很复杂的。例如，螺旋弹簧实际上同时具有质量和弹性。为了将其简化成理想的弹簧，要末忽略其质量，或者将其质量的适当部分与系统的其它质量集中起来考虑。最后的模型就成为集中参数系统或离散系统。例如，梁的质量和弹性是沿其长度连续分布的。如果连续系统可以用有限数目的集中参数近似地表征，则一梁或更一般地说一弹性体或一连续系统的振动特性就可用此处理方法来研究。这方程对于研究某些很复杂的结构例如飞机是一种很实用的近似方法。

虽然有种种限制，但由于下列原因，用集中参数处理方法来研究振动问题还是很有效的。（1）很多物理系统基本上都是离散系统；（2）其概念可推广用于连续系统的振动分析；（3）很多物理系统要是作为弹性体来分析研究则太复杂，故常用相当的离散系统来研究；（4）集中参数假设并不改变对一问题的基本了解，而只是使分析简便，并利于用计算机求解。

到目前为止，我们所讨论的都只是作直线运动的系统。对于作旋转运动的系统，其元件为（1）物体转动惯量 J；（2）扭转机械，其弹簧常数为 k_t；（3）扭转阻尼器，其扭转阻尼系数为 c_t。角位移 θ 相当于直线位移 x，而激振扭矩 $T(t)$ 相当于激振力 $F(t)$。这两种类型系统的比较示于表 1-1，更详细的比较将示于表 2-2 和表 2-3，从比较中可明显看出，对于做直线运动的系统的概念很容易推广到做扭转运动的系统。

表1-1　直线运动的系统和旋转运动的系统的比较

直线运动的系统	弹簧力 $= kx$	阻尼力 $= c\dfrac{dx}{dt}$	惯性力 $= m\dfrac{d^2x}{dt^2}$
旋转运动的系统	弹簧力矩 $= k_t\theta$	阻尼力矩 $= c_t\dfrac{d\theta}{dt}$	惯性力矩 $= J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

1-3　振动运动举例

为了说明振动运动的不同类型，让我们用图 1-1 所示四种元件的不同组合以形成简单的动力系统。

图 1-3（a）中的弹簧-质量系统将用来说明无阻尼的自由振动。质量 m 开始时静止于静平衡位置，其上作用着两个大小相等而方向相反的力，即等于弹簧常数 k 和弹簧静挠度 δ_{st} 的乘积的弹簧力和由于质量 m 的重量而存在的重力 mg。现在假定此质量 m 从静平衡位置被移开 x_0 距离，然后以零初速度释放。如分离体图所示，质量被释放时，弹簧力等于 $k(x_0+\delta_{st})$，此力比质量受到的重力大 kx_0，因此释放后，质量将向原平衡位置运动。

由于弹簧从平衡位置有初始变形 x_0，故相应地有势能储于弹簧内。因为没有阻尼器消耗能量，此系统是保守的。当质量向上运动经过平衡位置时，系统的势能为零。此时势能已转化为质量的动能。当质量运动至平衡位置以上时，弹簧被压缩，于是从质量的动能又得到势能。当质量达到其最高位置时，其速度等于零，所有的动能又转化为势能。随着弹簧和质量间势能和动能的相互交换，系统就围绕其平衡位置以固有频率进行周期性振荡。故固有频率表征着两种形式的储能元件——质量和弹簧间的能量交换率。

在第二章内将指出，这一周期运动是正弦运动或简谐运动。因为是保守系统，故

偏离平衡位置的最大位移或振幅将不会随循环增多而减小。这一讨论意味着固有频率是系统的一种特性，与m和k值大小有关，而与初始条件或振荡的幅度无关。

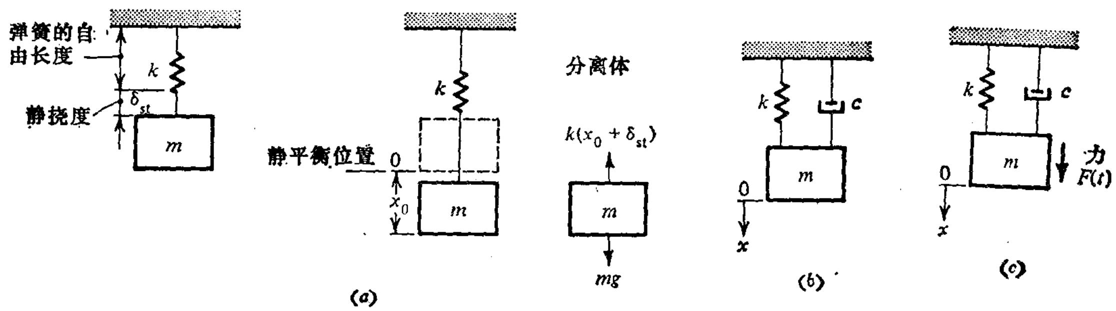


图1-3 简单振动系统

（a）无阻尼自由振动；（b）有阻尼自由振动；（c）强迫振动

有阻尼的质量-弹簧系统示于图 1-3(b)。质量在静止时只受到弹簧力和重力的作用，因阻尼力是与速度成正比的。现在，当质量从静平衡位置被移动x_0距离，随后以零初速度被释放时，弹簧力就如前例一样使质量趋向恢复到平衡位置。然而除弹簧力外，质量还受到方向与运动反向的阻尼力作用，其结果的运动与系统中阻尼的大小有关。如果阻尼甚小，此系统就称为亚阻尼的，而运动将是振荡性的。阻尼的存在将使（1）振荡最终消失和（2）系统的振荡较之无阻尼情况为慢。换句话说，每一次随后的振荡循环的振幅将减小，而具有粘性阻尼的振动的频率低于无阻尼的固有频率。如阻尼甚大，运动将是非振荡性的，而此系统就称作过阻尼的。质量被释放后就将简单地趋向回复到其静平衡位置。如果阻尼的大小刚好使其结果的运动处于上面列举的两种情况的分界线上，因此系统就称为临界阻尼状态。图 1-3(a) 和 (b) 所示系统的自由振动情况示于图 1-4。

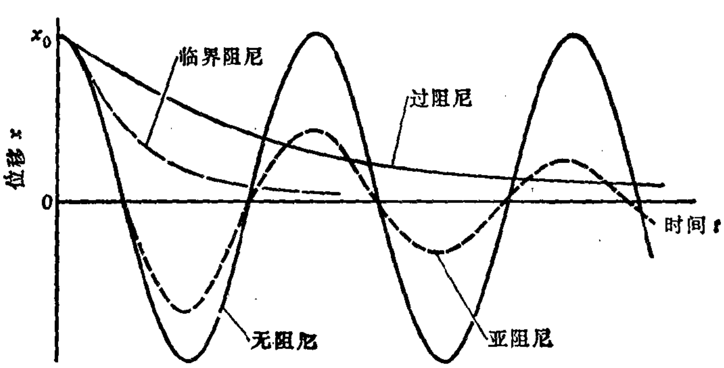


图1-4 图1-3(a)和(b)所示系统的自由振动(初始位移$=x_0$；初始速度$=0$)

所有物理系统的阻尼量级往往或者甚大，或者甚小。当一系统中的阻尼很小时，如一钢结构或单摆情况，阻尼作用可以忽略不计。大多数机械系统的阻尼很小，故可近似地作为无阻尼系统处理。有时候一系统中须专门设置阻尼以得到需要的性能。例如，振动测量仪器中常设置数量相当于临界阻尼值70%的阻尼。

如果一激振力作用在系统的质量上，如图 1-3(c) 所示，则最后的合成运动将同时

与初始条件和激振作用有关。换句话说，运动情况与供给系统能量的方式有关。我们假定在这里讨论的激振是正弦性的，一旦使这系统进入运动后，它就将趋于既按固有频率振动，也随激振频率振动。如系统有阻尼，则运动中不被正弦激振所支持的部分将最后消失，这就是瞬态运动，是以系统的固有频率进行振动的，亦即是以自由振动方式振荡的。

被正弦激振所支持的运动称为稳态振动或稳态响应。所以稳态响应必须以激振频率运动而与初始条件或系统的固有频率无关。在第二章中将指出，稳态响应是由系统的微分方程的特积分所描述的，而瞬态运动由补函数所描述。

当激振频率等于系统的固有频率● 时就会发生共振。一个无阻尼系统以其固有频率保持振动并不需要有能量输入，所以，任何能量输入都将使振动的振幅增大，而无阻尼系统在共振时的振幅将无限地增大。在有阻尼的系统中，输入的能量消耗于阻尼器中。在稳态条件下，每一循环中净能量输入等于系统的能量消耗，因此对于有阻尼的系统而言，共振时的振幅是有限的，由系统的阻尼大小决定。

1-4 简谐运动

简谐运动是周期性运动的最简单形式。在以后的章节中将指出：（1）对于更复杂的问题采用傅立叶分析技术时，谐和运动仍是基本概念；（2）用向量表示谐和运动能使稳态分析大为简化。在这一节中，我们将详细地讨论简谐运动和其向量运算方法。

简谐运动是一种往复运动，可以用圆函数——正弦函数或余弦函数来表述。考虑图1-5中水平轴上点P的运动，如距离OP为

$$OP=x(t)=X\cos\omega t \tag{1-1}$$

其中t＝时间，ω＝常数，和X＝常数，则P点相对于原点O的运动就是正弦运动或简谐运动●。由于圆函数在2π弧度后就重复其数值，故运动在$\omega\tau=2\pi$时完成一次循环，即

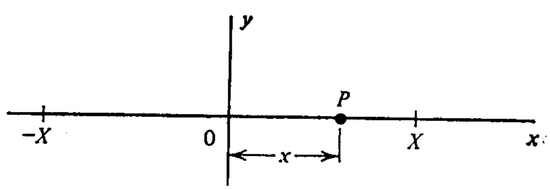


图1-5 简谐运动：$x(t)=X\cos\omega t$

$$\text{周期}\ \tau=\frac{2\pi}{\omega}\ \text{秒/周} \tag{1-2}$$

$$\text{频率}\ f=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega}{2\pi}\ \text{周/秒或赫兹●} \tag{1-3}$$

ω称为圆频率，以弧度/秒计。

● 共振有两种不同的定义。当有阻尼时，最大振幅发生在激振频率略小于固有频率时。

——译者

● 正弦、余弦或它们的组合函数可用来表述一简谐运动。例如使

$$x(t)=X_1\sin\omega t+X_2\cos\omega t=X\left(\frac{X_1}{X}\sin\omega t+\frac{X_2}{X}\cos\omega t\right)$$

$$=X(\sin\omega t\cos\alpha+\cos\omega t\sin\alpha)=X\sin(\omega t+\alpha)$$

其中$X=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$和$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}(X_2/X_1)$。显然，运动$x(t)$是正弦的，亦即是简谐的。余弦函数亦如此，不再赘述。

公式(1-1)中，$x(t)$表示x是时间t的函数。因其是隐函数，故在以下所有方程中，将省略(t)符号。

● 1965 年，Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) 采用新的符号和简写标准 (IEEE 标准№260)。用赫兹 (Hz) 代替周/秒 (cps) 作为频率单位。现在振动研究中已普遍采用 Hz 符号。

如$x(t)$表示振动系统中质量的位移，则速度和加速度是位移的一次和二次时间导数●，即

$$位移\ x=X\cos\omega t \tag{1-4}$$

$$速度\ \dot{x}=-\omega X\sin\omega t=\omega X\cos(\omega t+90^\circ) \tag{1-5}$$

$$加速度\ \ddot{x}=-\omega^2X\cos\omega t=\omega^2X\cos(\omega t+180^\circ) \tag{1-6}$$

这些公式表明谐和位移的速度和加速度也是具有相同频率的谐和函数。每一次微分使运动的幅度乘上因子ω和使圆函数的相位角改变90°。速度的相位角超前位移90°，加速度超前位移180°。

简谐运动可以用合并公式（1-4）和（1-6）来定义：

$$\ddot{x}=-\omega^2x \tag{1-7}$$

其中ω^2是一常数。当一质点作直线运动的加速度总是与其偏离运动途径上某一固定的位移成正比，且方向趋向此固定点时，就称此质点在作简谐运动。可看出，方程（1-7）的解是圆频率为ω的正弦和余弦函数形式。

两个具有相同频率但相位角不同的谐和函数之和还是一个频率相同的谐和函数。例如谐和运动$x_1=X_1\cos\omega t$和$x_2=X_2\cos(\omega t+\alpha)$之和为

$$\begin{aligned}x&=x_1+x_2=X_1\cos\omega t+X_2\cos(\omega t+\alpha)\\&=X_1\cos\omega t+X_2(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)\\&=(X_1+X_2\cos\alpha)\cos\omega t-X_2\sin\alpha\sin\omega t\\&=X(\cos\beta\cos\omega t-\sin\beta\sin\omega t)\\&=X\cos(\omega t+\beta)\end{aligned}$$

其中$X=\sqrt{(X_1+X_2\cos\alpha)^2+(X_2\sin\alpha)^2}$是合成谐和运动的幅值，$\beta=\mathrm{tg}^{-1}(X_2\sin\alpha)/(X_1+X_2\cos\alpha)$是其相位角。

两个频率不同的谐和运动相加不再是谐和运动。有意义的特殊情况是两者频率相差很小的情况，如x_1和x_2运动之和为

$$\begin{aligned}x&=x_1+x_2=X\cos\omega t+X\cos(\omega+\varepsilon)t=X[\cos\omega t+\cos(\omega+\varepsilon)t]\\&=2X\cos\frac{\varepsilon}{2}t\cos\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\end{aligned}$$

其中$\varepsilon\ll\omega$。合成运动$x(t)$可看作是一余弦波，其圆频率是$(\omega+\varepsilon/2)$，近似等于ω，而具有变化的幅度$[2X\cos(\varepsilon/2)t]$。此合成运动示于图 1-6。每当幅度达到一最大值，就称为一个拍，而拍频率f_b由两相邻的最大幅度决定，即

$$f_b=f_2-f_1=\frac{\omega+\varepsilon}{2\pi}-\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\varepsilon}{2\pi} \tag{1-8}$$

其中f_1和f_2为两个组成运动的频率。更一般的情况，即x_1和x_2的幅值不同的情况，留待习题中讨论。

拍的现象在工程上是常见的。显然，拍可以作为频率测量的有效方法，即将一未知频率与一标准频率相比较或与之成拍。

● 符号$\dot{x}$和$\ddot{x}$分别表示函数$x(t)$的一次和二次时间导数，在全书中都采用这一表达形式，除非有定义重叠或模糊之处例外。

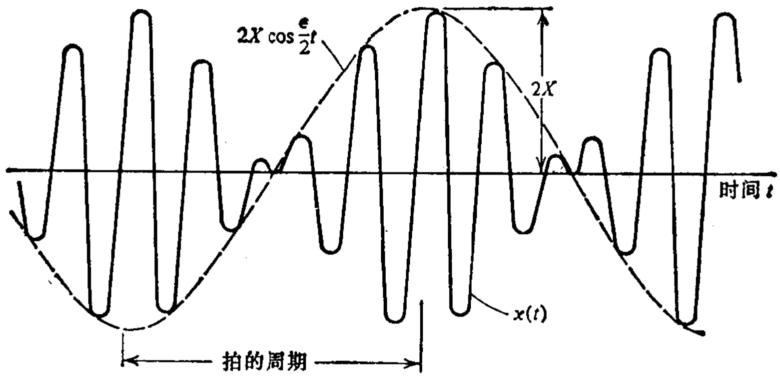


图1-6 拍的图解表示

1-5 谐和运动的向量表示法

用一个其大小不变㊀和等角速度为ω的旋转向量**X**来表示谐和运动是很方便的。图1-7中P点沿x轴距离中心O的位移是$OP=x(t)=X\cos\omega t$。这是旋转向量**X**在沿x轴的直径上的投影。同样，**X**在y轴上的投影是$OQ=y(t)=X\sin\omega t$。x轴名谓"实"轴（Re）和y轴名谓"虚"轴（Im），旋转向量**X**就可由下列公式表示㊁：

$$\mathbf{X}=X\cos\omega t+jX\sin\omega t=Xe^{j\omega t} \tag{1-9}$$

其中X是向量的长度或其大小，$j=\sqrt{-1}$称为单位虚数。

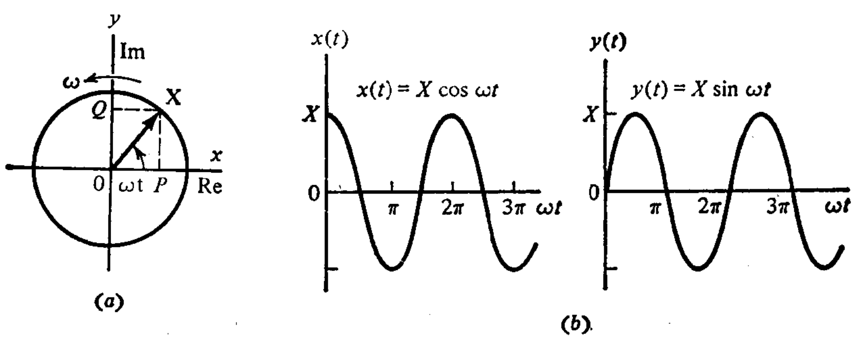


图1-7 用旋转向量表示的谐和运动

（a）向量表示法；（b）谐和运动

● 在复变量情况下，向量的长度称为绝对值和模，而相位角称作幅角或幅。在以下的讨论中，向量长度就是谐和运动的幅值或振幅。为避免混淆，将用大小作为向量长度的名称。

● 一个复数z可写成形式$z=x+jy$，其中x是z的实部而y是虚部。x和y都可以随时间变化。对某一特定时刻而言，x和y是实数，而z可作一复数处理。让图1-7(a)中的**X**为一复数，则向量**X**为

$$\mathbf{X}=x+jy=X(x/X+jy/X)=X(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$

其中$X=\sqrt{x^2+y^2}$是向量**X**的大小。令$\theta=\omega t$，并将正弦和余弦函数按马克劳伦级数展开，得

$$\mathbf{X}=X(\cos\theta+j\sin\theta)=X\left[\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)\right]$$

$$=X\left(1+j\theta-\frac{\theta^2}{2!}-j\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+j\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=X\left[1+\frac{(j\theta)}{1!}+\frac{(j\theta)^2}{2!}+\frac{(j\theta)^3}{3!}+\frac{(j\theta)^4}{4!}+\frac{(j\theta)^5}{5!}+\cdots\right]=Xe^{j\theta}=Xe^{j\omega t}$$

而式$e^{\pm j\theta}=\cos\theta\pm j\sin\theta$称为欧拉公式。