管理数学（上册）

上海

吴德涛 主编

管理数学

上册

上海科学普及出版社

管 理 数 学

上 册

主　编　吴德涛

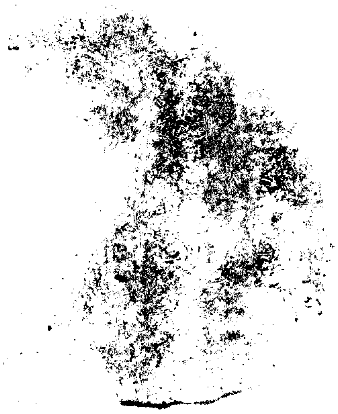
副主编　岑咏霆　崔晓明　汪瑞华

编　委　汪瑞华　岑咏霆　张黛华　吴德涛

徐克绍　崔晓明　蒋仲刚

上海科学普及出版社

责任编辑 陈泽加



管理数学
上 册
吴德涛 主编
上海科学普及出版社出版发行
(上海曹杨路 500 号 邮政编码 200063)

各地新华书店经销 常熟文化印刷厂印刷
开本787×1092 1/16 印张 14.5 字数 353000
1990 年 8 月第 1 版 1990 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—5000

ISBN 7-5427-0325-O/G·130 定价: 5.80 元

前　言

《管理数学》是管理工程类各专业的一门基础课程。

鉴于现有的工科通用课本《高等数学》及《概率论与数理统计》不适宜作管理工程类各专业的教材，因此我们将近年来所用的有关讲义改编成《管理数学》，以适应普通高等院校和成人高等院校的需要。

《管理数学》的编写原则是：根据数学各分科的特点，按照科学性、系统性、实用性、通俗性的要求，采用归科分章、前后衔接、总成一体的方法，力求达到深入浅出、切合实际、简明易懂的目的。

本书的每一章都配备有习题，并且给出了答案。它可作为管理工程类各专业的基础课程教材，也可作为高等教育自学考试的阅读课本，还可作为广大管理人员的参考读物。

本书由上、下两册组成。上册包括解析几何、微积分学、级数概论、微分方程，下册含有线性代数、概率理论、数理统计、模糊数学。共计二十八章，其中第一、二、三、十一、十二章由汪瑞华编写，第四、五、六、七、十三、十四、十五、十六章由崔晓明编写，第八、九、十章由徐克绍编写，第十七、十八章由蒋仲刚编写，第十九、二十章由高俊芳编写，第二十一、二十二、二十三、二十四、二十五章由吴清编写，第二十六、二十七、二十八章由岑咏霆编写。上册由崔晓明统稿，下册由汪瑞华统稿。全书由吴德涛、岑咏霆编审，最后由吴德涛定稿。参加审稿的还有张黛华、蒋仲刚。

限于编者水平，书中缺点或错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九九〇年六月

目　录

第一章 直角坐标系

§1-1 有向线段

一、直向直线，轴

确定了正方向的直线叫做有向直线，也叫做轴。如果在轴上取定原点(一般以0表示这一点)和单位长度，那末这条有向直线就称为数轴(或叫做坐标轴)，如图1-1。

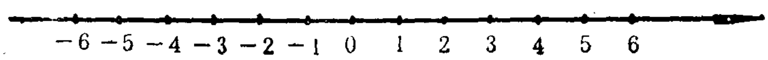


图 1-1

这样，任意一个实数都可以用数轴上的一个点来表示。反之，数轴上的任一点也代表一个实数。数轴上的点和实数一一对应。点所对应的实数称为误点的坐标。

二、有向线段，有向线段的数量

确定了起点和终点的线段叫做有向线段。有向线段的方向，就是从起点到终点的方向。将表示起点的字母写在前面，表示终点的字母在后面。一条有向线段的长度，连同表示它方向的正负号，叫做这条有向线段的数量。如果有向线段的方向与它所在直线的方向相同，它是正向的线段，它的数量取正号；如果相反，就是负向的线段，它的数量取负号。

例 1-1

轴L上的每一小格表示一个单位长度，A、B、C、D是轴上的四个点，求有向线段AC、CD、BC、DA的数量(图1-2)。

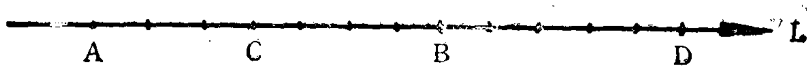


图 1-2

［解］ 有向线段AC与轴同向，它的长度是3，所以

$$AC=3.$$

同理

$$CD=9.$$

有向线段BC与轴异向，它的长度是4，所以

$$BC=-4.$$

同理

$$DA=-12.$$

三、数轴上的有向线段

在数轴上，有向线段的数量总是等于终点的坐标减去起点的坐标。如果在数轴上，A、B两点的坐标分别是x_1和x_2(图1-3)，那末不论A、B的位置如何，总有

$$AB = x_2 - x_1,$$
$$BA = x_1 - x_2.$$

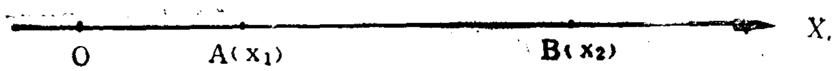


图 1-3

如果只考虑有向线段的长度，而不考虑它的方向，则有向线段 AB 的长度用 $|AB|$ 来表示，也叫做 A、B 两点的距离。显然 $|AB| = |BA|$ 并且它们是个非负数。

§1-2 平面直角坐标系

一、坐标系

平面内有公共原点 O 的两条互相垂直的数轴——x 轴和 y 轴，构成了平面直角坐标系。两条轴一般如图 1-4 的位置放置。x 轴叫做横轴，y 轴叫做纵轴，建立了坐标系的平面叫做坐标平面。

二、点的坐标

坐标平面内的点和有序的实数对之间有一一对应的关系，即坐标平面内任意一点 P(见图 1-4)，可以用唯一的一对实数(x, y)表示；x, y 其实是点 P 在 x 轴及 y 轴上垂足的坐标。任何一对实数(x, y)，在平面内能确定唯一的点，该点在 x 轴及 y 轴上垂足的坐标正好是 x 与 y。我们称 x 为 P 点的横坐标，y 叫做 P 点的纵坐标，这样 $P(x, y)$ 就表示 P 点的直角坐标(一般简称坐标)。

例 1-2 在直角坐标系中作出下列各点：

(1) $A(-3, 5)$；

(2) $B(1, \sqrt{2})$；

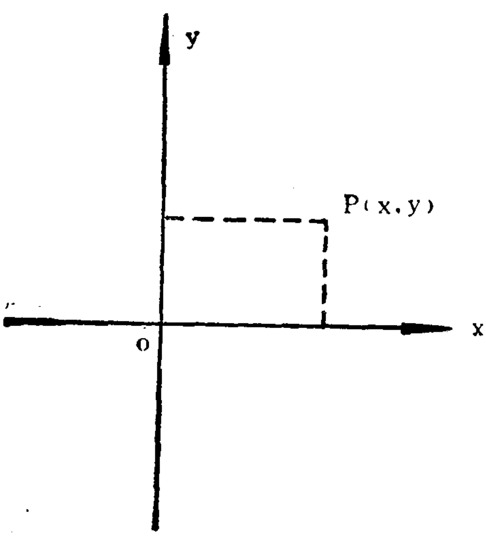


图 1-4

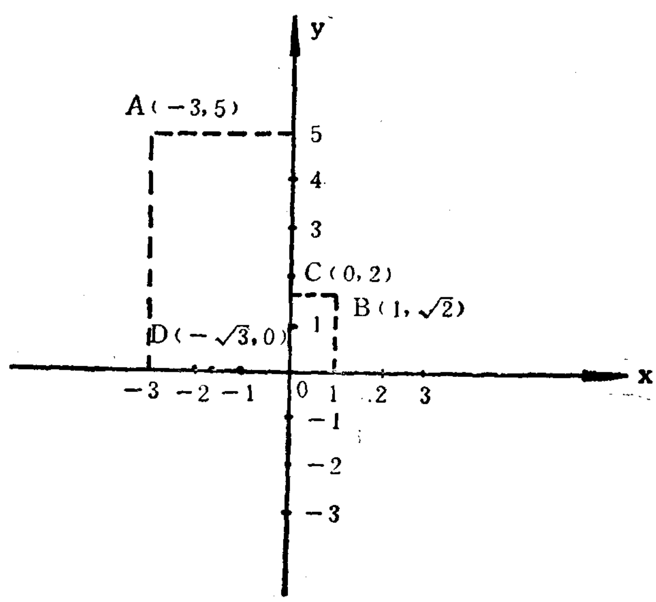


图 1-5

(3) $C(0, 2)$;

(4) $D(-\sqrt{3}, 0)$.

[解] 作图1-5，需注意 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 可利用勾股定理来作图(见图1-6)。

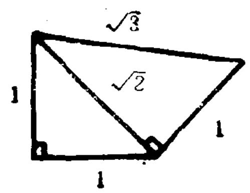


图 1-6

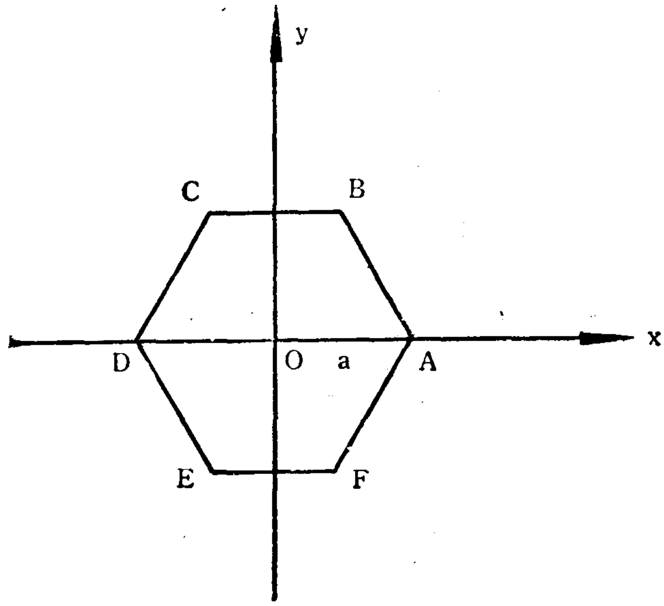


图 1-7

例1-3 有一正六边形(图1-7)，它的中心在原点，两个顶点落在 x 轴，这个正六边形边长 a，求它各顶点的坐标。

[解] 利用正六边形性质，计算可得。

$$A(a, 0);\ B\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right);\ C\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right);$$

$$D(-a, 0);\ E\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right);\ F\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

三、象限与坐标的符号

在坐标平面中由两条坐标轴将平面分成四个部分，称为第 I、II、III、IV 象限(图1-8)，于是我们就可把点所在的位置与它的坐标符号列成表1-1。

表 1-1

点所在位置	第 I 象限	第 II 象限	第 III 象限	第 IV 象限
坐标符号	(+, +)	(−, +)	(−, −)	(+, −)

需要说明的是，在坐标轴上的点不属于任何象限，在 X 轴正方向上的一点坐标的符号是 $(+, 0)$；负方向上的一点是 $(-, 0)$；在 y 轴正方向上的点 $(0, +)$；负方向上的点 $(0, -)$，原点 $C(0, 0)$。

例1-4 在坐标系中已知 $A(-2, 3)$，分别作出它关于 x 轴，y 轴和原点的对称点(图1-9)。

［解］ 由对称的性质可得到点 $A(-2, 3)$ 关于 x 的轴的对称点 $B(-2, -3)$；关于 y 轴的对称点 $C(2, 3)$；关于原点的对称点 $D(2, -3)$。

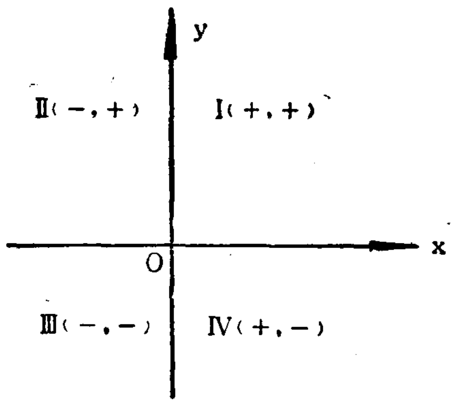


图 1-8

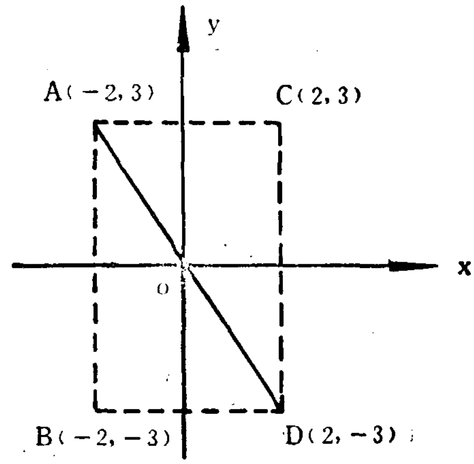


图 1-9

§1-3 两点间的距离

一、两点间的距离公式

已知 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，那末这两点间的距离为(见图1-10)：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

下面推导这个公式，在图1-10中：

$OB=x_1$，$OC=x_2$，则 $P_2A=CB=x_1-x_2$。

同理 $AP_1=y_1-y_2$。

在直角三角形 P_1AP_2 中，由勾股定理得：

$$|P_1P_2|^2=|AP_1|^2+|P_2A|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \quad (1\text{-}1)$$

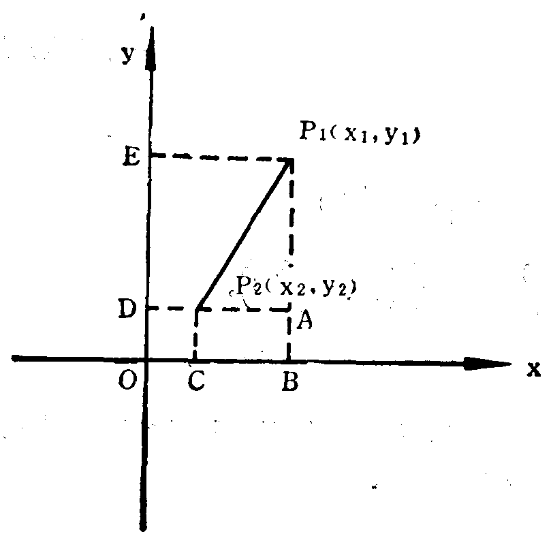


图 1-10

显然 $|P_1P_2|$ 也等于 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

二、任一点与原点的距离

读者很容易推得：从原点 O 到 $P(x, y)$ 的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}. \quad (1\text{-}2)$$

例 1-5 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点：$A(2, 3)$，$B(-3, 3)$，$C(0, -1)$，求 $\triangle ABC$ 的周长。

［解］ 利用两点距离公式计算：

$AB=\sqrt{(2+3)^2+(3-3)^2}=5,\quad BC=\sqrt{(-3-0)^2+(3+1)^2}=5,$

$AC=\sqrt{(2-0)^2+(3+1)^2}=\sqrt{20}.$

$AB+BC+AC=5+5+\sqrt{20}=10+2\sqrt{5},$

所以 $\triangle ABC$ 的周长等于 $10+2\sqrt{5}$.

§1-4 线段的定比分点

如图1-11所示，设有向线段 P_1P_2 的两端点的坐标分别是 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$，点 P 在 P_1P_2 上，它把 P_1P_2 分成两个有向线段 P_1P 和 PP_2，P_1P 和 PP_2 作为有向直线 P_1P_2 上的有向线段，其数量的比通常用字母 λ 表示。

即 $$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$$

点 P 称为 P_1P_2 的定比分点，现在我们来求分点 P 的坐标 (x, y)。

从 P_1, P_2, P 分别作 y 轴的平行线交 x 轴于 M_1, M, M_2，由平面几何中平行线分线段成比例的定理，得

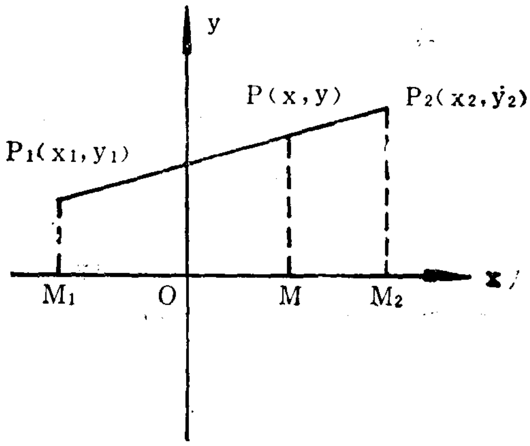


图 1-11

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x},$$

$$\therefore \qquad \lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}.$$

解关于 x 的方程，得 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

同法可得 $$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

归纳起来得到线段的定比分点公式：

设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$ 在线段 P_1P_2 上，且有

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

则点 P 的坐标 (x, y) 为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \quad \text{(定比分点公式)} \qquad (1\text{-}3)$$

当 P 是 P_1P_2 的中点时，$\lambda=1$，则有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad \text{(中点公式)} \qquad (1\text{-}4)$$

例 1-6　两点 $(x, 5)$ 和 $(-2, y)$ 间在线段在点 $(1, 1)$ 被平分，求 x, y。

［解］　由中点公式，得　$$\frac{x-2}{2}=1,\ x=4,$$

及　$$\frac{5+y}{2}=1,\ y=-3.$$

例 1-7　在 $A(1, 0)$ 和 $B(6, 3)$ 的连线上求一点 C 使 AC 等于 CB 的两倍

［解］　设点 $C(x, y)$，$\lambda=\dfrac{AC}{CB}=2$，

$$\therefore \quad x=\frac{1+2\times 6}{1+2}=\frac{13}{3},$$

$$y=\frac{0+2\times 3}{1+2}=\frac{6}{3}=2.$$

所求点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{13}{3}, 2\right)$。

例 1-8　$\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别是 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 求此三角形重心 M 的坐标 (x, y)（图 1-12）。

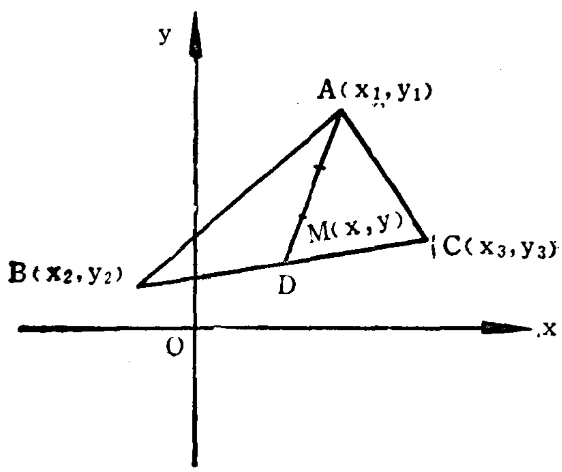


图　1-12

［解］　由平面几何三角形重心的性质可知 D 是 BC 中点，且 $AM:MD=2:1$。设 $D(x_D, y_D)$，则

$$x_D=\frac{x_2+x_3}{2},$$

$$y_D=\frac{y_2+y_3}{2}.$$

由定比分点公式得

$$x=\frac{x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

§1-5　三角形的面积计算公式

以 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形的面积计算公式是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值。} \qquad (1\text{-}5)$$

（说明：这个公式的推导，读者可以参阅有关的教学参考书。）

例 1-9　设四边形的四个顶点为 $A(-3, -4)$，$B(2, -2)$，$C(1, 6)$ 和 $D(-1, 3)$，求它的面积。

[解] 如图 1-13 所示，

$$S_{\Delta BCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}.$$

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix} \text{ 的绝对值是 } \frac{31}{2}.$$

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 6 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix} \text{ 的绝对值是 } \frac{19}{2}.$$

∴ $$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}(31+19)=25.$$

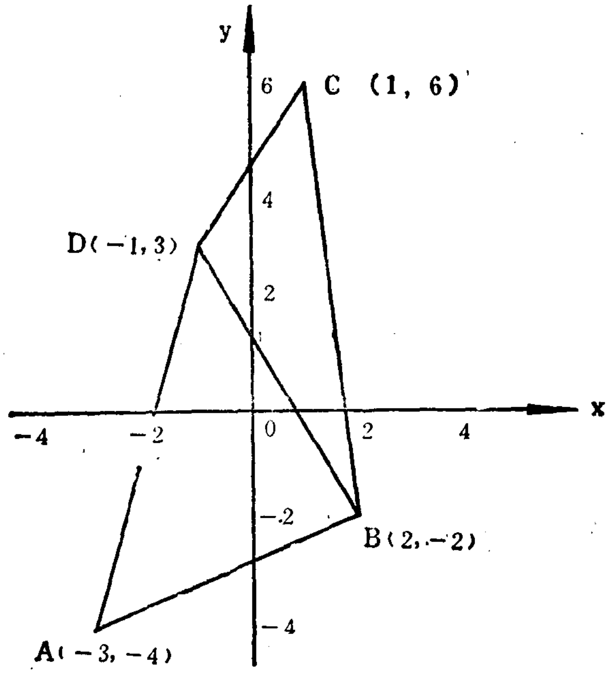


图 1-13

§1-6 平面曲线方程的概念

在代数中，我们已经知道方程 $3Ax+By+C=0$ 在直角坐标系中代表一条直线；方程 $xy=K$（K 是常数）是双曲线；方程 $y=ax^2+bx+c$ 是抛物线等。现在我们进一步研究平面内的任意曲线和含有 x, y 的方程 $F(x, y)=0$ 之间的关系。

一、曲线和方程的概念

一条曲线可以看作是适合于某种条件的点的轨迹（或集合），也就是说：

(1) 在这曲线上的点都适合某种条件；

(2) 适合某种条件的点都在这曲线上。

例如，与定点的距离等于 4 的点的轨迹是以定点为圆心，4 为半径的圆，显然，在这个圆

上的点都适合条件与定点的距离等于4，而适合这个条件的点都在这个圆上。

在直角坐标系内，由于点可以用坐标(x, y)来表示，所以点所适合的条件可以用含x和y的方程来表示。如果以已知定点做坐标原点，方程就是

$$x^2+y^2=4^2.$$

这个方程就是适合条件的圆方程。

对于曲线与方程之间的对应关系，给出下面定义：

定义　如果某曲线上的点与一个二元方程$F(x, y)=0$的解具有如下的对应关系：

1．曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

2．以这个方程的解为坐标的点，都是曲线上的点，那末，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的图象或轨迹。

方程中所含的x和y，就是点的坐标(x, y)。因为它们随着点的移动而改变，所以把x，y叫做流动坐标。

例1-10　判定$A(-3, \sqrt{7})$和$B(5, 4)$两点是否在曲线$x^2+y^2=16$上。

[解]　将A点的坐标代入所给方程，得

$$(-3)^2+(\sqrt{7})^2=16.$$

这就是说，A点的坐标满足所给方程，所以点$A(-3, \sqrt{7})$在曲线$x^2+y^2=16$上。

将B点的坐标代入所给方程，得

$$5^2+4^2\neq 16.$$

这就是说，B点的坐标不满足所给方程，所以点$B(5, 4)$不在曲线$x^2+y^2=16$上。

二、由曲线求它的方程

已知曲线求它的方程一般可采用以下步骤：

1．建立适当的直角坐标系，并设$P(x, y)$为已知曲线上的任意点(即动点)；……(取点)

2．按题意用等式写出动点所要适合的条件；……(列式)

3．用动点的流动坐标x和y之间的关系式表示上述条件，即得方程；……(代换)

4．化简方程；……(化简)

5．证明化简所得的方程即为已知曲线的方程。……(证明)

说明：由于化简所得的方程一般都是已知曲线的方程，所以在以后解题中第(5)步就省了。

例1-11　已知两点$A(-3, 1)$，$B(5, -3)$。求线段AB垂直平分线的方程。

[解]　设$P(x, y)$为线段AB垂直平分线上任一点，由所给条件有$|PA|=|PB|$，根据两点间距离公式

$$|PA|=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2},$$

$$|PB|=\sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2}.$$

所以

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y+3)^2}.$$

化简得

$$2x-y-3=0. \qquad \cdots\cdots(*)$$

方程(*)就是线段AB垂直平方线的方程。

例1-12　求与定点$C(-1, 3)$的距离等于5的点的轨迹方程。

[解]　设$P(x, y)$是轨迹上任意一点，则

$$|PC|=5.$$

于是 $$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=5,$$

化简，得 $$(x+1)^2+(y-3)^2=25$$

或 $$x^2+y^2+2x-6y-15=0.$$

说明：本题所得的方程是以 $C(-1, 3)$ 为圆心，半径为 5 的圆方程。

例 1-13 在图 1-14 中，试写出下列曲线的方程：

(1) x 轴；y 轴。

(2) 直线 l_1, l_2。

(3) 第 I, III 象限的角平分线。

(4) 第 II, IV 象限的角平分线。

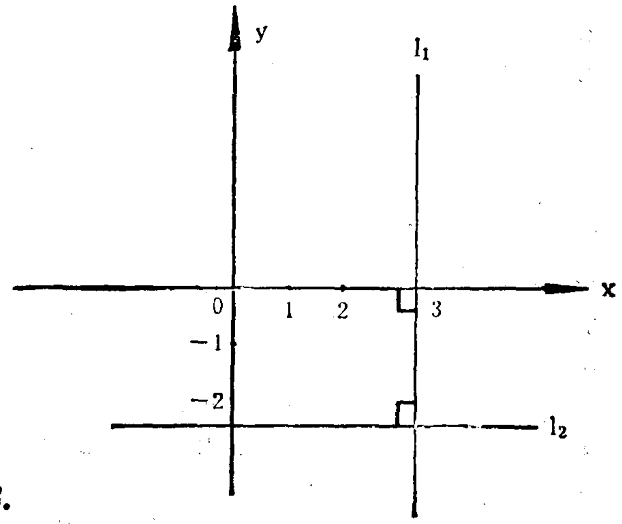


图 1-14

[解] (1) x 轴方程：$y=0$。

y 轴方程：$x=0$。

(2) 直线 l_1 方程：$x=3$。

直线 l_2 方程：$y=-2$。

(3) 第 I, III 象限角平分线方程：$y=x$。

第 II, IV 象限角平分线方程：$y=-x$。

以上各题的结论，读者可自行分析得到。

三、两条曲线的交点

求两条曲线的交点，就是求它们的方程所组成的方程组的实数解，如果方程组有一组实数解，就是有一个交点；

有几组实数解，就是有几个交点；

无实数解，就是两曲线不相交。

例 1-14 求下列两曲线的交点：

(1) $x^2+y^2-10=0$, $3x-y=0$。

(2) $x^2-y^2=8$, $x-y=2$。

[解] (1) 由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2-10=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

得到两组实数解 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3. \end{cases}$

所以两曲线有两个交点 $(1, 3)$ 和 $(-1, -3)$。

(2) 由方程组 $$\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x-y=2 \end{cases}$$

得到一组实数解 $$\begin{cases} x=3 \\ y=1. \end{cases}$$

所以两曲线的交点是(3, 1)。

习　题　一

1. 在直角坐标中，作出下列各对坐标所决定的点：

$A(2, 5)$，　　$B(-3, 0)$，　　$C(3, -4)$，　　$D(0, 4)$，

$E(3, -3)$，　　$F(\sqrt{2}, 1)$。

2. 有一定点 $A(a, b)$，分别求出它关于横轴，纵轴，原点的对称点的坐标。

3. 正方形的每边等于2(单位长)，如果把它的两条对角线放在坐标轴上，那末正方形各顶点的坐标是什么？

4. 菱形的每边是5(单位长)，它有一对角线是6(单位长)，菱形的两条对角线放在坐标轴上，求它各顶点的坐标。

5. $\triangle ABC$ 的顶点 $A(1, 2)$，$B(0, 5)$，$C(-2, 3)$，求三角形重心的坐标。

6. 已知两点 $P_1(2, y)$ 和 $P_2(x, 6)$ 间的线段在点 $P(3, 2)$ 处被平分，试求出这两点的坐标。

7. 将 $P_1(-1, -6)$ 及 $P_2(3, 0)$ 的连线 P_1P_2 延长到 P_3，使 $\dfrac{P_2P_3}{P_1P_2}=\dfrac{1}{3}$，求点 P_3 的坐标。

8. 判定下列各点与圆 $x^2+y^2=25$ 的位置关系(点在圆外，圆内或圆上)。

$A(-4, 3)$；$B(7, -3\sqrt{2})$；$C(2, 4)$。

9. 验证点 $P(0, -2)$ 和点 $Q(-7+2\sqrt{2}, \sqrt{2}+2)$ 是否在曲线 $y^2-x-2y-8=0$ 上。

10. 方程 $(x-2)^2+(y-3)^2=R^2$ 所表示的曲线在什么条件下经过原点。

11. 已知方程 $3x+4y-10+\lambda(4x-6y+7)=0$ 的图形经过点 $(4, -7)$，求 λ 的值。

12. 一动点到原点和点 $A(-5, -4)$ 的距离相等，试求这动点的轨迹方程。

13. 求两条曲线 $x^2+y^2-10=0$，$3x-y+10=0$ 的交点。

14. 已知方程 $x^2+y^2=5$ 和 $x-y+m=5$，求 m 为下列各值时它们所表示的两条曲线的交点！

(1) $m=0$;

(2) $m=\sqrt{10}$;

(3) $m=5$。

九〇一八八

第二章　直　　线

§2-1　直线和二元一次方程

综合代数中所学的知识以及第一章的有关内容，可归纳得出直线与二元一次方程的关系：

(1) 在直角坐标系中，任何一条直线都可以用含有变量 x 和 y 的一次方程来表示；

(2) 任何一个含有变量 x 和 y 的一次方程都表示一条直线。

我们称方程

$$Ax+By+C=0 \tag{2-1}$$

是直线的一般式方程。

例 2-1　已知直线 l 的方程为 $2x-y+1=0$：

(1) 在直角坐标系中作直线 l；

(2) 求直线 l 与两个坐标轴的交点坐标；

(3) 求直线 l 上横坐标 $x=-2$ 的点的纵坐标以及纵坐标 $y=\frac{3}{2}$ 的横坐标。

［解］ (1) 作直线 l 的一般方法可利用两点决定一直线的性质，在方程 $2x-y+1=0$ 中，用任意两个 x 值代入，算得相应的 y 值。如用 $x=0$ 代入得 $y=1$；$x=1$ 代入得 $y=3$。于是得直线上两点 $A(0, 1)$，$B(1, 3)$，连接 A、B 得直线 l。见图 2-1。

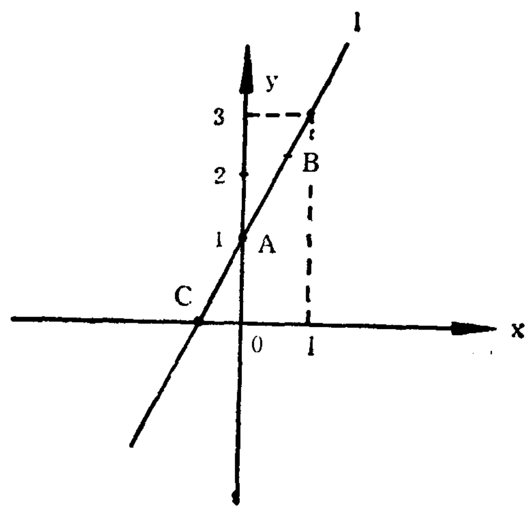


图　2-1

(2) 由计算可得，

直线 l 与 y 轴的交点 $A(0, 1)$。

直线 l 与 x 轴的交点 $C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$。

(3) 把 $x=-2$ 代入方程 $2x-y+1=0$ 得

$$y=-3.$$

即直线 l 上横坐标 $x=-2$ 的点的纵坐标为 $y=-3$。

把 $y=\frac{3}{2}$ 代入方程 $2x-y+1=0$ 得

$$x=\frac{1}{4}.$$

即直线 l 上纵坐标 $y=\frac{3}{2}$ 的点的横坐标为 $x=\frac{1}{4}$。