现代应用数学丛书

泛函分析

〔日〕吉田耕作 著
程 其 襄 譯
夏 道 行 校

上[redacted]社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，是《集合·拓扑·測度》和《广义函数》两书的姐妹作。全书共分 14 章，扼要闡述了泛函分析的基本內容、半群理論及其在微分方程、积分方程等方面的应用，可供高等学校数学系、物理系师生及工程师、研究人員等参考。

現代应用数学丛书

泛 函 分 析

原书名 位相解析
原著者 〔日〕吉田耕作
原出版者 岩波书店
譯 者 程其襄
校 者 夏道行

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 8 14/32　字数 200,000
1962年5月第1版　1962年5月第1次印刷
印数 1—3,000

統一书号：13119·459
定价（十四）1.45元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　　录

第1章 賦范空間, Hilbert 空間

古典分析学，特別是綫性偏微分方程、綫性积分方程等，由于采用了函数空間內加法算子的观点作統一的处理，因而收到一定的成果。例如，如所周知，量子力学的数学結构便是当作 Hilbert 空間內对称算子的固有値問題而得到定型化的。在本章里，将談到在以函数为元素的矢量空間內引入了相当于“矢量长”的范数而得到的賦范空間，以及定义在它上面的加法算子的連續性。由于賦范空間的完备性在理論上的重要意义，我們也将討論如何在賦范空間內按照极限論法附加“理想元素”而将賦范空間完备化的办法。

§1 賦范空間

矢量空間 以实数(或复数)为系数的加法群 X 叫做**矢量空間**(linear space)。也就是說，X 是对于加法 $x+y$ 及乘以实数(或复数) α 的算法 αx 满足下列通常矢量算法規則的集：

$$\text{如果 } x,\ y\in X,\ \text{那末 } x+y\in X,\ \alpha x\in X. \tag{1.1}$$

$$x+y=y+x. \tag{1.2}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z). \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于一切 } x,\ z,\ \text{存在一个但也只有一个 } y \text{ 使得}\\ x+y=z.\end{array}\right\} \tag{1.4}$$

$$1\cdot x=x. \tag{1.5}$$

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x. \tag{1.6}$$

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y. \tag{1.7}$$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x. \tag{1.8}$$

如果把由(1.4)所确定的 y 写作 $z-x$ 的話，那末根据 X 是加法群的事实，显然 $\Theta=x-x$ 不依賴于 x 而被确定，而且对于一切 x 都有 $x+\Theta=x$。于 (1.8) 置 $\alpha=1$, $\beta=-1$ 得 $(0)x=x-x=\Theta$，又于(1.8)置 $\alpha=0$, $\beta=-1$ 得 $(-1)x=\Theta-x$。从而分别将 Θ, $\Theta-x$ 写作 0, $-x$，而且尽管应用計算規則 $x-y=x+(-1)y$ 都不会产生抵触，这是容易明白的。

注　当 αx 中的 α 仅限于实数的情形叫做实矢量空間，α 可以在复数范圍内变动时叫做复矢量空間。

范数　如果对于矢量空間 X 的各元，定义了相当于“矢量 x 的长”的范数 (norm) 使满足以下条件，那末 X 叫做**賦范空間** (normed space)。

$$\|x\|\geqslant 0,\ \text{且}\ \|x\|=0\ \text{与}\ x=0\ \text{等价。} \tag{1.9}$$

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \quad \text{(三角不等式)。} \tag{1.10}$$

$$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|. \tag{1.11}$$

例1　$C[\alpha,\beta]$　定义在閉区間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上的全体有界連續实值（或复值）函数 $x(t)$ 按照 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$，$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$ 及

$$\|x\|=\sup_{t\in[\alpha,\beta]}|x(t)| \tag{1.12}$$

构成一个賦范空間。但我們說 $x(t)$ 在如象 $[-\infty, 1]$ 这样的无限閉区間上有界連續，是指 $x(t)$ 在 $-\infty<t\leqslant 1$ 連續，并且存在有限的 $\lim\limits_{t\to-\infty}x(t)$。因此属于 $C[\alpha,\beta]$ 的函数 $x(t)$ 皆一致連續，即对于任意的 $\varepsilon>0$ 可定 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当 $t_1, t_2\in[\alpha,\beta]$ 且 $|t_1-t_2|\leqslant\delta$ 时 $|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant\varepsilon$。

同样，在开区間 (α,β) 上有界連續的实值（或复值）函数 $x(t)$ 全体 $C(\alpha,\beta)$ 按照上述的算法及范数也构成一个賦范空間。

例2　$L_2(\alpha,\beta)$　所有定义在开区間 (α,β) 上的实值（或复值）可測函数 $x(t)$，而且 $|x(t)|^2$ 在这区間上是 Lebesgue 式可积的，这些 $x(t)$ 的全体写作 $L_2(\alpha,\beta)$，它按照 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$，$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$ 及

$$\|x\|=\left(\int_\alpha^\beta|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.13}$$

构成一个賦范空間。但在几乎全体的 t 上,函数値都为 0 的 $x(t)$ 当作 0 矢量看,从而对于几乎全体的 t 上函数値都一致的 $x(t)$ 与 $y(t)$ 当作同一矢量看。

証明 連同 x 与 y, $x+y$ 也属于 $L_2(\alpha, \beta)$, 这由 $|\gamma+\delta|^2\leq 4(|\gamma|^2+|\delta|^2)$ 可以明白。又因 Schwarz 不等式

Hölder 不等式 的特例

$$\left|\int_\alpha^\beta x(t)\overline{y(t)}\,dt\right|\leq\int_\alpha^\beta|x(t)y(t)|\,dt\leq\left(\int_\alpha^\beta|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta|y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.14}$$

成立,得

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\int_\alpha^\beta x(t)\bar{y}(t)\,dt+\int_\alpha^\beta y(t)\bar{x}(t)\,dt+\|y\|^2$$

$$\leq\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2\leq(\|x\|+\|y\|)^2,$$

即三角不等式(1.10)成立。

例 3 $L_1(\alpha, \beta)$ 所有定义在开区間 (α, β) 的实値(或复値)可测函数 $x(t)$, 而且 $|x(t)|$ 在这区間是 Lebesgue 式可积的,这些 $x(t)$ 的全体写作 $L_1(\alpha, \beta)$, 它按照 $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$, $(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$ 及

$$\|x\|=\int_\alpha^\beta|x(t)|\,dt \tag{1.15}$$

构成一个賦范空間。但在几乎全体的 t 上,函数値都为 0 的 $x(t)$ 当作 0 矢量看,从而把在几乎全体的 t 上函数値都一致的 $x(t)$ 与 $y(t)$ 当作同一矢量看。

例 4 $\mathfrak{D}^k(R)$ $(k\geq 0)$ 設 R 为 m 維歐氏空間 E^m 中的連通域。定义于 R 的 k 次連續可微的实値(或复値)函数 $f(x)=f(x_1, \cdots, x_m)$ 的全体写作 $C^k(R)$. 一般而論,对于定义于 R 的函数 $f(x)$, R 的子集 $\{x; f(x)\neq 0\}$ 的**閉包**❶ (closure) 称为 $f(x)$ 的**支集或台** (support, carrier)。在 $C^k(R)$ 中考虑支集是 R 内部的有界閉集的函数記其全体为 $\mathfrak{D}^k(R)$❷, 它按照 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 及范数

$$\left.\begin{array}{l}\|f\|_k=\left(\sum\limits_{|n|\leq k}\int_R|D^{(n)}f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},\ \text{但}\\ dx=dx_1\cdots dx_m,\ D^{(n)}=\partial^{n_1+\cdots+n_m}/\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_m^{n_m},\ |n|=\sum\limits_{i=1}^m n_i\end{array}\right\} \tag{1.16}$$

❶ 将这集的点列的聚点全部添加于这集而得的。

❷ 設以 R 的点 $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)})$ 为中心,半徑为 $\varepsilon>0$ 的球(連同它的境界)含于 R 内部,置 $|x|=\left(\sum\limits_{i=1}^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 时,則函数

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/(\varepsilon^2-|x-x^{(0)}|^2) & \text{当 } |x-x^{(0)}|<\varepsilon\\ 0 & \text{当 } |x-x^{(0)}|\geq\varepsilon\end{cases}$$

便属于 $\mathfrak{D}^\infty(R)$.

成一賦范空間 $\mathfrak{D}^k(R)$。

証明 和 $L_2(\alpha, \beta)$ 的情形一样，由于

$$\int_R |D^{(n)}f(x)+D^{(n)}g(x)|^2 dx$$

由 Minkowski 不等式.

$$\leqslant\left\{\left(\int_R |D^{(n)}f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_R |D^{(n)}g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

成立，故关于范数的三角不等式也成立。

例 5 Dirichlet 式的范数 設 R 为 E^2 的有界域，∂R 为 R 的境界曲綫；又設 $q(x)=q(x_1, x_2)$ 属于 $C^0(R+\partial R)$（即在閉域 $R+\partial R$ 上連續），且到处 >0。設实函数 $f(x)=f(x_1, x_2)$ 在閉域 $R+\partial R$ 上属于 C^1，即具有一阶連續偏导数。这样的函数 $f(x)$ 的全体按照 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 及 **Dirichlet 式的范数**

$$\|f\|=\left(\int_R (f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+qf^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

成一賦范空間。

例 6 $A_2(R)$ 設 $f(z)$ 是在 z 平面的域 R 中单值的正則函数，滿足

$$\|f\|=\left(\iint_R |f(z)|^2 dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}<\infty, \quad z=x+\sqrt{-1}\,y, \tag{1.18}$$

这种 $f(z)$ 的全体記为 $A_2(R)$，$A_2(R)$ 按照 $(f+g)(z)=f(z)+g(z)$，$(\alpha f)(z)=\alpha f(z)$ 及范数 (1.18) 成一賦范空間。这可以和 $L_2(\alpha, \beta)$ 的情形同样地看出。

注 只考慮实値函数时，α 限于实数，称为**实賦范空間**。前例 5 便是这样的例子。考慮复値函数时，α 可在复数范圍变动，称为**复賦范空間**。

将賦范空間作为距离空間 对于賦范空間 X 的任意两点 x, y，如果置

$$\mathrm{dis}(x, y)=\|x-y\|, \tag{1.19}$$

那么它显然滿足距离公理：

$$\mathrm{dis}(x, y)\geqslant 0,\ \text{且}\ \mathrm{dis}(x, y)=0\ \text{和}\ x=y\ \text{等价}; \tag{1.20}$$

$$\mathrm{dis}(x, y)=\mathrm{dis}(y, x), \tag{1.21}$$

$$\mathrm{dis}(x, z)\leqslant\mathrm{dis}(x, y)+\mathrm{dis}(y, z)\quad(\text{三角不等式})。 \tag{1.22}$$

例如由 (1.10) 得

$$\|x-z\|=\|x-y+y-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|,$$

这便是(1.22)。这样一来，在赋范空間里便可根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dis}(x_n, x)=0$ 导入**收斂概念** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$（簡写作 $x_n\to x$）。

定理 1.1 $\|x\|$ 作为 x 的函数以及 αx 作为 α 与 x 的函数都是連續的，即

$$\text{若 } x_n\to x, \text{ 則 } \|x_n\|\to\|x\|, \tag{1.23}$$

$$\text{若 } \alpha_n\to\alpha,\ x_n\to x, \text{ 則 } \|\alpha_n x_n\|\to\|\alpha x\|. \tag{1.24}$$

証明 由(1.10)有 $\|x\|\geqslant\|x+y\|-\|y\|$。于此以 $x-y$ 代 x 得 $\|x-y\|\geqslant\|x\|-\|y\|$，从而又有 $\|y-x\|\geqslant\|y\|-\|x\|$。因按(1.11) $\|x-y\|=\|y-x\|$ 成立，最后得

$$|(\|x\|-\|y\|)|\leqslant\|x-y\|, \tag{1.25}$$

而(1.23)遂明显。

其次
$$\begin{aligned}\|\alpha x-\alpha_n x_n\|&\leqslant\|\alpha x-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha_n x_n\|\\&=|\alpha-\alpha_n|\,\|x\|+\|\alpha_n\|\cdot\|x-x_n\|,\end{aligned}$$

右边第一項 $\to 0$。由于 $\{|\alpha_n|\}$ 有界，右边第二項也 $\to 0$。

§2 pre-Hilbert 空間

內积 如果对于矢量空間 X 的任意一对元 x, y，可定义满足下面四条件的数 (x, y)，則称 (x, y) 为 x 与 y 的內积：

$$(x, x)\geqslant 0 \text{ 且 } x=0 \text{ 与 } (x, x)=0 \text{ 等价}, \tag{2.1}$$

$$(x, y)=\overline{(y, x)} \quad (\text{共軛复数}), \tag{2.2}$$

$$(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y), \tag{2.3}$$

$$(\alpha x, y)=\alpha(x, y). \tag{2.4}$$

由于以上的条件可知下面的关系也成立：

$$(x, y_1+y_2)=(x, y_1)+(x, y_2), \tag{2.2'}$$

$$(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y). \tag{2.4'}$$

定理 1.2 $\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$ 满足范数的条件。

証明　首先証明 Schwarz 不等式

$$|(x,\ y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|. \tag{2.5}$$

因为对于任何实数 λ，它的二次式

$$\begin{aligned}&(x+\lambda(x,\ y)y,\ x+\lambda(x,\ y)y)\\&\quad=\|x\|^2+2\lambda|(x,\ y)|^2+\lambda^2|(x,\ y)|^2\cdot\|y\|^2\end{aligned}$$

总 $\geqslant 0$，故必判别式

$$|(x,\ y)|^4-\|x\|^2\cdot|(x,\ y)|^2\cdot\|y\|^2\leqslant 0,$$

从而当 $|(x,\ y)|\neq 0$ 时便得(2.5)；又当 $|(x,\ y)|=0$ 时，(2.5)自始就显然。因此得

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,\ x+y)=\|x\|^2+(x,\ y)+(y,\ x)+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

注　从上面的証法可以看出，在 (2.5) 中等号成立的情形限于 x 是 y 的常数(包含 0)倍或 y 是 x 的常数(包含 0)倍。

pre-Hilbert 空間　一个賦范空間如果它的范数可以从满足(2.1)～(2.4)的內积 $(x,\ y)$ 通过 $\|x\|=(x,\ x)^{\frac{1}{2}}$ 而得到，则此空間称为 **pre-Hilbert 空間**❶。

例 1　在 $L_2(\alpha,\ \beta)$ 中取

$$(x,\ y)=\int_\alpha^\beta x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{2.6}$$

例 2　在 $\mathfrak{D}^k(R)$ 中取

$$(f,\ g)=(f,\ g)_k=\sum_{|n|\leqslant k}\int_R D^{(n)}f(x)\cdot\overline{D^{(n)}g(x)}dx. \tag{2.7}$$

例 3　在 Dirichlet 式范数(1.17)的情形通过內积

$$(f,\ g)=\int_R(f_{x_1}g_{x_1}+f_{x_2}g_{x_2}+qfg)dx \tag{2.8}$$

构成实 pre-Hilbert 空間。

例 4　在 $A_2(R)$ 中，定义

$$(f,\ g)=\iint_R f(z)\overline{g(z)}dx\,dy,\quad z=x+iy. \tag{2.9}$$

---

❶　通常称为內积空間。——校者注

在这里积分的存在性由(1.14)型的 Schwarz 不等式可以看出。

定理 1.3 內积(x, y)为x, y的連續函数。即

$$\text{若 } x_n \to x,\ y_n \to y,\ \text{則 } \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y).$$

証明 由定理 1.1 有 $\|x_n\| \to \|x\|$. 从而由(2.5)得到

$$\begin{aligned}|(x, y) - (x_n, y_n)| &= |(x, y) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x_n, y_n)| \\ &= |(x - x_n, y) + (x_n, y - y_n)| \\ &\leqslant \|x - x_n\| \cdot \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\|,\end{aligned}$$

其右边$\to 0$ $(n \to \infty)$。

定理 1.4 在 pre-Hilbert 空間中，

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ [1]}, \tag{2.10}$$

$$(x, y) = 4^{-1}\{(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \sqrt{-1}(\|x+\sqrt{-1}y\|^2 - \|x-\sqrt{-1}y\|^2)\}. \tag{2.11}$$

証明 根据(2.2)～(2.4′)

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2,$$

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2.$$

由此得(2.10)。同样，(2.11)的右边为

$$\begin{aligned}&2^{-1}\{(x, y) + (y, x) + \sqrt{-1}(x, \sqrt{-1}y) + \sqrt{-1}(\sqrt{-1}y, x)\} \\ &= 2^{-1}\{(x, y) + (y, x) + (x, y) - (y, x)\} = (x, y).\end{aligned}$$

§3 加法算子，連續算子

子空間 矢量空間 X 的子集 $\mathfrak{D}$ 滿足条件：

$$\text{如 } x, y \in \mathfrak{D},\ \text{則 } \alpha x + \beta y \in \mathfrak{D} \tag{3.1}$$

时，称 $\mathfrak{D}$ 为 X 的(綫性)**子空間** (linear subspace)。

---

[1] 这关系是賦范空間成为內积空間的充要条件，充分性証見19頁。——譯者注

加法算子 对于 X 的子空間 $\mathfrak{D}$ 的各元素 x，有矢量空間 X_1（也可以与 X 一致）中的元素 $T\cdot x$ 与之对应的（广义的）函数 T 滿足条件：

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \tag{3.2}$$

时，称 T 为**加法算子**（additive operator）。这时 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}$，$\mathfrak{W}(T)=\{y;\ y=T\cdot x,\ x\in\mathfrak{D}(T)\}$ 分别称为 T 的**定义域**(domain) 和**值域**(range, Wertvorrat)，特别当 $\mathfrak{W}(T)$ 属于实数体（或复数体）时，T 称为**加法泛函**。

例 1 設 $K(s,t)$ 为定义于 $0\leqslant s\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 的連續函数，則通过

$$y(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt \tag{3.3}$$

定义一个加法算子 K，对于 $x(t)\in C[0,1]$，有 $y(s)\in C[0,1]$ 与之对应。

例 2 設 $0\leqslant t_0\leqslant 1$，且对于每个 $x(t)\in C[0,1]$，让 $x(t_0)$ 和它对应，則得一个定义在 $C[0,1]$ 上的加法泛函。

例 3 **坐标算子 $t\cdot$** 对于 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，以 $t\cdot x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$ 与之对应，得到一个加法算子 $t\cdot$，它的定义域 $\mathfrak{D}(t\cdot)$ 是 $L_2(\alpha,\beta)$ 中能使 $t\cdot x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$ 成立的全体 $x(t)$。因此当 (α,β) 为有限区間时，$\mathfrak{D}(t\cdot)$ 虽然和 $L_2(\alpha,\beta)$ 一致，但是当 (α,β) 为无限区間时，$\mathfrak{D}(t\cdot)$ 和 $L_2(\alpha,\beta)$ 并不一致。例如 $x(t)=t^{-1}$ 属于 $L_2(1,\infty)$，但 $t\cdot x(t)=t\cdot t^{-1}=1$ 不属于 $L_2(1,\infty)$。

例 4 **动量算子 $i^{-1}d/dt$**[1] 对于 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，以 $i^{-1}dx(t)/dt\in L_2(\alpha,\beta)$ 与之对应，得一加法算子 $i^{-1}d/dt$，它的定义域 $\mathfrak{D}(i^{-1}d/dt)$ 是在所有絕对連續的 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$ 中使 $i^{-1}dx(t)/dt$ 属于 $L_2(\alpha,\beta)$ 的全体 $x(t)$。因此，卽使 (α,β) 是有限区間，$\mathfrak{D}(i^{-1}d/dt)$ 和 $L_2(\alpha,\beta)$ 也不一致，因为到处不可微的連續函数是存在的。

例 5 固定 $y(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，对于每一个 $x(t)\in L_2(\alpha,\beta)$，让 (x,y) 和 $x(t)$ 对应，則得一个以 $L_2(\alpha,\beta)$ 为定义域的加法泛函。

算子的連續性 加法算子 T 的連續性是借条件：

$$\text{如果 } x_n,\ x\in\mathfrak{D}(T) \text{ 且 } x_n\to x，\text{則总有 } Tx_n\to Tx \tag{3.4}$$

而定义的。

---

[1] $i=\sqrt{-1}$。

定理 1.5 加法算子 T 为連續的必要而且充分的条件是：存在正数 γ 使得

$$\text{对于一切 } x\in\mathfrak{D}(T)\text{，有 } \|Tx\|\leqslant\gamma\|x\|. \tag{3.5}$$

証明 首先注意 $T\cdot 0=T(x-x)=Tx-Tx=0$。(必要性)假定存在点列 $\{x_n\}$：$\|Tx_n\|>n\|x_n\|$；由剛才的注意可知 $x_n\neq 0$，从而可以考虑 $y_n=x_n/\sqrt{n}\,\|x_n\|$。这时由于 $\|Tx_n\|>n\|x_n\|$，得到

$$\|y_n\|=1/\sqrt{n}\to 0,\quad \|Ty_n\|=(\sqrt{n}\,\|x_n\|)^{-1}\|Tx_n\|>\sqrt{n},$$

因此与 T 的連續性(在 0 处)相違反。(充分性)由

$$\|Tx-Tx_n\|=\|T(x-x_n)\|\leqslant\gamma\|x-x_n\|$$

可以看出。

有界算子 由前定理可以看出，就 $\mathfrak{D}(T)=X$ 这样的加法算子 T 来說，它的連續性是和 $\|Tx\|$ 在以原点为中心、半徑为 1 的球 $\{x;\|x\|\leqslant 1\}$ 上的有界性等价的，因此，$\mathfrak{D}(T)=X$ 这样的連續加法算子称为**有界加法算子**，或簡称为**綫性算子**；对于这样的 T，称

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \tag{3.6}$$

为 T 的范数。由于 T 的加法性，$\|T\|$ 是和满足条件：

$$\text{对于一切的 } x\in X\text{，都有 } \|Tx\|\leqslant\gamma\|x\| \tag{3.7}$$

的正数 γ 的下确界一致。

例 1 第 3 頁例 1 为有界算子的例，又例 2 为有界泛函的例。在例 2 中，所考察的泛函的范数为 1. 这是因为在 t_0 取得最大值的連續函数 $x(t)\in C[0,1]$ 存在。

例 2 如 (α,β) 是有限区間，則坐标算子 $t\cdot$ 为有界算子，并且它的范数 $\leqslant\max(|\alpha|,|\beta|)$. 但如 (α,β) 为无限区間，則坐标算子 $t\cdot$ 不連續。例如 $L_2(0,\infty)$ 的函数列 $x_n(t)$：

$$x_n(t)=\begin{cases}1/n & n\leqslant t<n+1,\\ 0 & t<n \text{ 或 } t\geqslant n+1\end{cases}$$

有 $\|x_n\|=\left(\int_n^{n+1}n^{-2}dt\right)^{\frac{1}{2}}=n^{-1}\to 0$，可是由于 $\|t\cdot x_n(t)\|=\left(\int_n^{n+1}t^2n^{-2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$，并不使 $t\cdot x_n\to 0$.

例 3 动量算子 $i^{-1}d/dt$ 不連續。例如考虑图 3.1 所画的属于 $L_2(0,1)$ 的函数 $x_n(t)$，除 $t=\frac{m}{2n}$ 以外都有 $|dx_n(t)/dt|=1$，从而 $i^{-1}dx_n(t)/dt$ 的范数$=1$。可是由于在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 一致地 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$，故 $i^{-1}d/dt$ 不連續(在 0 矢量处)。

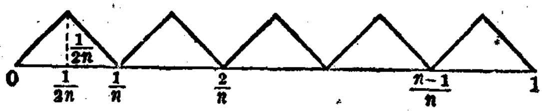

图 3.1

例 4 加法泛函 $Tx=(x,y)$ 是有界的，理由是 $|Tx|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$。由这不等式又得 $\|T\|\leqslant\|y\|$，至于此等号的成立可从 $y\neq 0$ 时

$$T(y/\|y\|)=\|y\|^{-1}(y,\ y)=\|y\|$$

看出。

逆算子 加法算子 T 給出 $\mathfrak{D}(T)$ 与 $\mathfrak{W}(T)$ 之間的一对一对应的必要与充分条件为

$$\text{如 } Tx=0,\ \text{則 } x=0. \tag{3.8}$$

当这条件滿足时，作为映照 $T\,(x\to Tx)$ 的逆映照而得到的 T^{-1} 是加法算子，滿足条件

$$T^{-1}(Tx)=x,\ x\in\mathfrak{D}(T);\ T(T^{-1}y)=y,\ y\in\mathfrak{W}(T), \tag{3.9}$$

而且 $\mathfrak{D}(T^{-1})=\mathfrak{W}(T)$，$\mathfrak{W}(T^{-1})=\mathfrak{D}(T)$。这个 T^{-1} 称为 T 的**逆算子**。

例 在 $L_2(1,\beta)$ 中的坐标算子 $t\cdot$ 的逆算子为 $t^{-1}\cdot$。如果 $-\infty<\alpha<\beta<\infty$，則在 $L_2(\alpha,\ \beta)$ 中动量算子 $i^{-1}d/dt$ 沒有逆算子。这是因为在 $(\alpha,\ \beta)$ 上恒等于 1 的函数 $x(t)\in L_2(\alpha,\ \beta)$ 映照于 0。

定理 1.6 加法算子 T 具有連續逆算子的必要与充分条件为存在正数 δ，使得

$$\text{对于一切 } x\in\mathfrak{D}(T),\ \text{都有 } \|Tx\|\geqslant\delta\|x\|. \tag{3.10}$$

証明 由定理 1.5 卽可証得。

例 在前例中如 $\beta<\infty$，則 $t\cdot$ 的逆算子 $t^{-1}\cdot$ 是連續的 (实为有界的)。

算子的和、积 $\mathfrak{D}(T)$, $\mathfrak{D}(S)\subseteqq X$, 且 $\mathfrak{W}(T)$, $\mathfrak{W}(S)\subseteqq X_1$, 这样的加法算子 T, S 的和是由

$$(T+S)x=Tx+Sx,\ x\in\mathfrak{D}(T)\cap\mathfrak{D}(S)$$

而定义的。又 αT 是由

$$\begin{cases}(\alpha T)x=\alpha Tx,\ x\in\mathfrak{D}(T),\\ \text{但如 } \alpha=0,\ \alpha T=0\ (\text{对于一切 } x\in X \text{ 对应着 } 0 \text{ 的算子})\end{cases}$$

而定义的；其次，如 $\mathfrak{D}(U)\subseteqq X_1$, 则 U 与 T 的积是由

$$(UT)x=U(Tx),\ \mathfrak{D}(UT)=\{x;x\in\mathfrak{D}(T)\text{ 且 } Tx\in\mathfrak{D}(U)\}$$

而定义的。这里积的顺序很关紧要。例如設 $T=t\cdot$, $U=i^{-1}d/dt$, 則 $UT=TU$ 并不成立，而代替它的是 Heisenberg 关系

$$(UT-TU)x=i^{-1}Ix,\ x\in\mathfrak{D}(UT)\cap\mathfrak{D}(TU).\qquad(3.11)$$

这里 I 是指对于每一个 $x\in X$ 仍旧对应着 x 的恒等算子。又如果 $\mathfrak{D}(T)$ 和 $\mathfrak{W}(T)$ 都在 X 中，可将 TT 写为 T^2, 一般通过 $T^n=TT^{n-1}$ 可定义 T 的任何正整数次冪。

§4 Banach 空間, Hilbert 空間

賦范空間 X 的点列 $\{x_n\}$ 如果收斂于 X 的点 x, 那么，由 $\|x_n-x_m\|=\|x_n-x+x-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$ 可以看出，它是满足 Cauchy 收斂条件

$$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0\qquad(4.1)$$

的。反之，如果对于满足 Cauchy 条件的点列 $\{x_n\}$, 总存在极限 $x\in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$[1], 那么这賦范空間 X 便称为 **Banach 空間**。換句話說，Banach 空間乃是指这种賦范空間，就是根据它的范数所定义的距离 $\mathrm{dis}(x,y)=\|x-y\|$ 使它成为完备的(complete)距离空間。又完备的 pre-Hilbert 空間称为 **Hilbert**

[1] 这样的极限 x 如果存在必是唯一的，这可从下面看出：設 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y\|=0$, 則由 $\|x-y\|=\|x-x_n+x_n-y\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-y\|\to0$ 得 $x=y$.