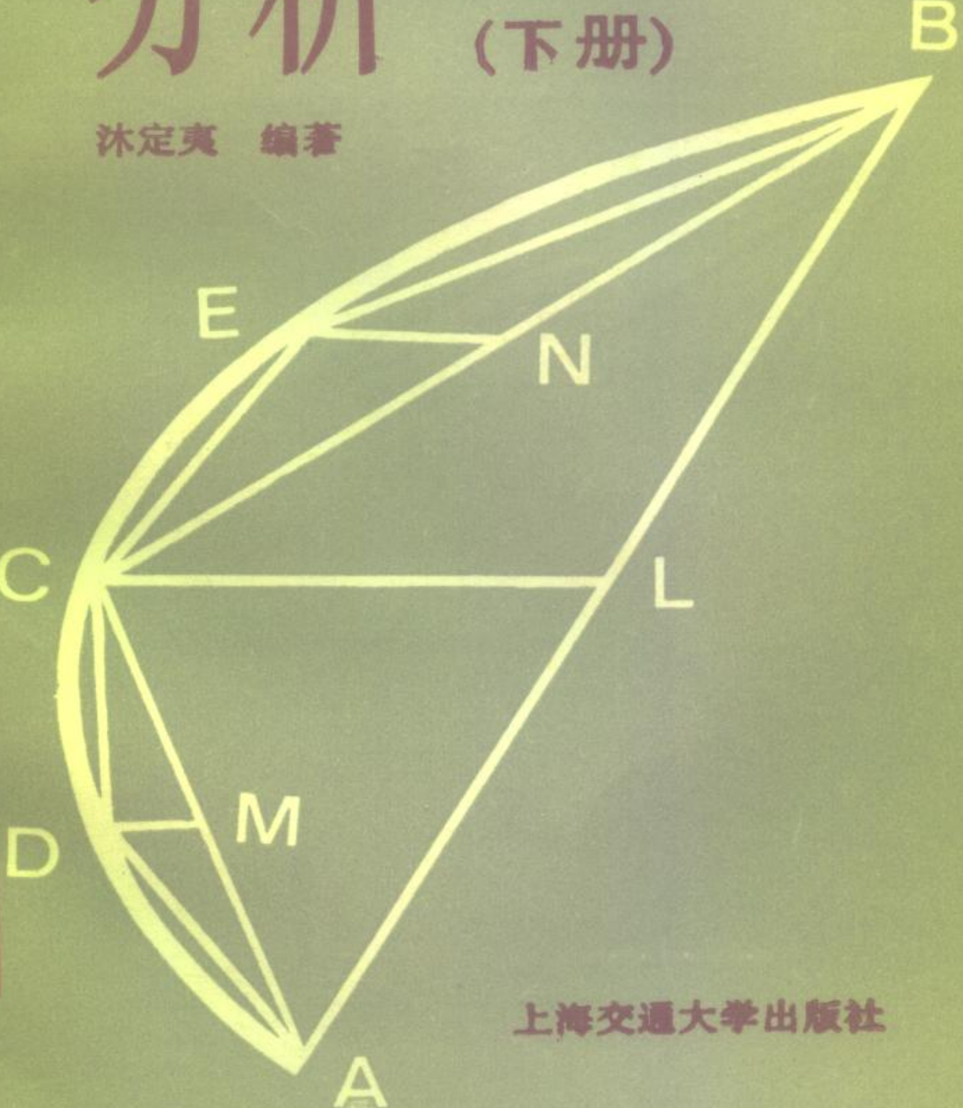
数学分析

（下册）

沐定夷 编著



上海交通大学出版社

数 学 分 析

下 册

沐定夷 编著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册。下册内容包括：函数项级数、幂级数、Fourier级数、多元函数的极限与连续、偏导数与全微分、Taylor公式与极值最值、隐函数的微分学及其应用、含参变量积分、重积分、曲线积分与曲面积分、场论初步、外微分略述。

本书内容翔实，理论与计算并重。条理清晰，部分内容处理方法新颖。行文流畅，深入浅出。叙述采用启发式，对定理证明、公式推导、反例构造加强思路分析。注重方法训练与能力培养。

本书纂辑了为数众多的习题，为巩固正文、培养技巧、扩大视野、复习思考与应考提供了有力工具。

本书作为原教育部高等工业学校应用数学专业教材委员会的应征教材之一，经审核中标，由该委员会委托游兆永教授审阅，可作为应用数学专业与力学、计算数学等专业的教材或教学参考书，也可作自学用书或报考研究生的复习用书。

(沪)新登字205号

数学分析(下册)

出版：上海交通大学出版社			
(上海市华山路1954号·200030)	字数：332000		
发行：新华书店上海发行所	版次：1994年3月	第1版	
印刷：江苏常熟文化印刷厂	印次：1994年3月	第1次	
开本：850×1168(毫米)1/32	印数：1—2500		
印张：12.5	科目：296—280		

ISBN7-313-01197-0/O·7　　定价：4.30元

任何人一旦掌握了他所从事学科的基础理论，并且学会了独立思考和工作，他必定能找到自己的前进之路，而且与那些以获得知识细节为主要目的的人相比，他必定能更好地适应进步与变化。

A. Einstein

前进！你就会有勇气。

P.S. Laplace

记 号 说 明

本册除沿用上册“记号说明”中所列记号外，还采用下列记号（以区间$[a, b]$或区域D为例）：

$\{f_n\} \in BU[a, b]$	函数列$\{f_n\}$在$[a, b]$上一致有界
$f \in (A)R[a, b]$	f 在$[a, b]$上可积(当f 有界时)或绝对可积(当f 无界时)
$f \in PC[a, b]$	f 在$[a, b]$上分段连续
$f \in PS[a, b]$	f 在$[a, b]$上分段光滑
$f \in PDx(D)$	多元函数f 在D上对x有偏导数
$f \in PD(D)$	多元函数f 在D上可偏导

目　　录

第十章 函数项级数

在第九章数项级数理论的基础上，本章讨论函数项级数。

在第一节中先定义函数项级数的点态收敛性，在点态收敛下函数项级数不一定能保持原有的连续性等分析性质，因此引进函数项级数的一致收敛性概念。

在第二节中讨论函数项级数一致收敛性的判别法，其中包括 Cauchy 原理，Weierstrass$M$-判别法，Dirichlet 判别法，Abel 判别法等，它们是数项级数中对应的收敛判别法的自然推广。

在第三节中证明在有关函数项级数一致收敛下函数项级数仍然保持着函数项所具有的某些分析性质(诸如连续性，可积性，可导性等)。

第一节 函数项级数的两种收敛性

一、点态收敛性及其缺点

函数是数学分析的主要研究对象。在数项级数理论的基础上，自然深入到函数项级数的讨论。

设 $u_n(x)$，$n=1\sim\infty$，是定义在同一实数集 X(通常是区间 I)上的函数列，形式地把

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 或 } \sum u_n(x) \tag{10.1}$$

称为**函数项级数**，把

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

称为 $\sum u_n(x)$ 的第 n 个**部分和**。

与数项级数类似，由于$\{u_n(x)\}$与$\{S_n(x)\}$可以相互转化，今后将任择函数项级数$\sum u_n(x)$或函数列$\{f_n(x)\}$讨论之，其另一半内容留给读者考虑。

借助于数项级数的收敛性概念得出

定义 10.1（点态收敛性） 设$\sum u_n(x), x\in X$。$\forall x_0\in X$，如果

$$\{S_n(x_0)\}\in Cv, \tag{10.2}$$

那末称$\sum u_n(x)$ **在 x_0 收敛**，x_0是$\sum u_n(x)$的**收敛点**；反之，如果$\{S_n(x_0)\}\in Dv$，那末称$\sum u_n(x)$**在 x_0 发散**，x_0是$\sum u_n(x)$的**发散点**。$\sum u_n(x)$的全体收敛点组成的集$D(\subset X)$称为$\sum u_n(x)$的**收敛域**。$\forall x\in D$，按式(10.2)有$\{S_n(x)\}$的极限值与之对应，由此确定的D上的函数称为$\sum u_n(x)$的**和函数**，记作$S(x)$：

$$\sum u_n(x)=S(x),\ x\in D。$$

如上逐点考虑$x\in D$时，$\{S_n(x)\}$收敛于$S(x)$，称为$\sum u_n(x)$在D上**点态收敛**于$S(x)$，记作

$$\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\to S(x),\ x\in D。$$

对函数列$\{f_n(x)\}$的点态收敛，记作

$$f_n(x)\to f(x),\ x\in D,$$

并称$f(x)$为$\{f_n(x)\}$的**极限函数**。

例 10.1 (1) $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1}),\ X=R,$

(2) $f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ n, & 0<x<1/n,\\ 0, & 1/n\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\quad x\in[0,1],\ n=1\sim\infty。$

（参见图 10-1），求它们的收敛域与和函数（或极限函数）。

解 (1) $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)=x^n$。

在$0<|x|<1$中，$\forall\varepsilon\in(0,1)$，令

$$|S_n(x)-0|=|x|^n<\varepsilon,$$

可解得$n>[\ln\varepsilon/\ln|x|]$，故取

$$N(\varepsilon, x) = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\right] \qquad (10.3)$$

即知，当 $n > N(\varepsilon, x)$ 时，有

$$|S_n(x) - 0| < \varepsilon。$$

对 $x = 0, 1, -1$,

$$S_n(0) = 0 \to 0, \ S_n(1) = 1 \to 1,$$

$$S_n(-1) = (-1)^n。$$

对 $|x| > 1$,

$$|S_n(x)| = |x|^n \to +\infty。$$

合之，得

$$S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

$D = (-1, 1] \subset X = R$。

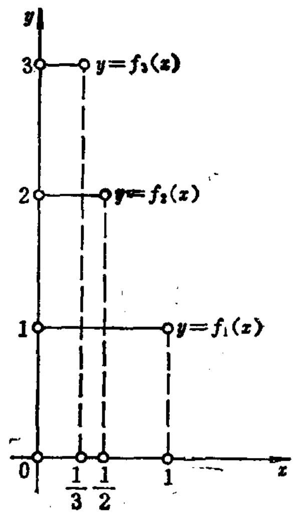


图 10-1

(2) $f_n(0) = 0 \to 0$。$\forall x \in (0, 1]$，当 $n > N = [1/x]$ 时，$f_n(x) = 0 \to 0$，故

$$f(x) = 0, \ x \in D = [0, 1]。$$

在函数项级数具有和函数时，自然要关心它的分析性质（如连续性，可积性，可导性等)。那末，函数项原有的分析性质在点态收敛所得的和函数中仍然保持着吗？详言之：设 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上点态收敛于 $S(x)$，试问

(1) 当 $u_n \in C[a, b]$ 时 $(n = 1 \sim \infty)$，能推知 $S \in C[a, b]$ 吗？

(2) 当 $u_n \in R[a, b]$ 时 $(n = 1 \sim \infty)$，能推知 $S \in R[a, b]$，且 $\sum\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum u_n(x)\right)\mathrm{d}x$ 吗？

(3) 当 $u_n \in D[a, b]$ 时 $(n = 1 \sim \infty)$，能推知 $S \in D[a, b]$，且 $\sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right)$ 吗？

答案是令人沮丧的。

回顾例 10.1(1) 易知 $u_n \in C[0, 1]$，$n = 1 \sim \infty$，但

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

$S\overline{\in}C[0, 1]$；又 $u_n\in D[0, 1]$，$n=1\sim\infty$，但 $S(x)$ 既然已不连续，就无从论及可导性，更不必侈谈 $\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum u_n(x)\right)$ 了。

例 10.1(2)为可积性问题提供了反例。容易知道 $\int_0^1 f_n\mathrm{d}x=1$，$n=1\sim\infty$，而 $\int_0^1 f\mathrm{d}x=0$，从而 $\lim\int_0^1 f_n\mathrm{d}x\neq\int_0^1 f\mathrm{d}x$，由此可以作出 $[0, 1]$ 上的 $\sum u_n(x)$ 使 $\sum\int_0^1 u_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\sum u_n(x)\mathrm{d}x$(为什么？) 还可以举出 $\{f_n(x)\}$，使 $f_n\in R[0, 1]$，$n=1\sim\infty$，$\{f_n(x)\}$ 点态收敛于 $f(x)$ 而 $f\overline{\in}R[0, 1]$；(参见习题 10.5)。

为什么会产生这种现象呢？以连续性为例来看。从例 10.1 1)可见，虽然 $S_n(x)=x^n$，$S_n\in C[0, 1]$，$n=1\sim\infty$，但是由于收敛性是按点态定义的，是局部的：

$$\forall x\in[0, 1),\ S_n(x)=x^n\to 0,\ S_n(1)=1\to 1,$$

各自向极限值 0, 1 趋近，终于使 $S(x)$ 在 1 处被"扯断"。

接着的问题是：若 $u_n\in C[a, b]$，$n=1\sim\infty$，且 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上点态收敛于 $S(x)$，试问对收敛性再附加什么条件才能保证 $S\in C[a, b]$？

$\forall x_0\in[a, b]$，考虑 $|S(x)-S(x_0)|$。顾及 $S_n(x)$ 在 x_0 的连续性与 $S_n(x_0)$ 收敛于 $S(x_0)$，对上式插项再作估计：

$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)| &= |S(x)-S_n(x)+S_n(x)\\ &\quad -S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0)|\\ &\leqslant |S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|\\ &\quad +|S_n(x_0)-S(x_0)|。\end{aligned}\tag{10.4}$$

$\forall\varepsilon>0$，由 $S_n(x_0)\to S(x_0)$ 知存在充分大的 n：

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon。$$

取定n，由$S_n\in C[a, b]$知$\exists\delta>0$:

$$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\varepsilon,\ \forall x\in U(x_0, \delta)\cap[a, b]。$$

若再要求对上述n成立

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in[a, b],$$

将上列三式代入式(10.4)结合x_0的任意性即得$S\in C[a, b]$。

为了满足上式，可对$\{S_n(x)\}$收敛于$S(x)$附加下述较强的条件：

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$:

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N,\ x\in[a, b]。$$

应强调一下，这里对$\varepsilon>0$求得的N必须对全体$x\in[a, b]$都通用(参见式(10.3))。这就导致下列重要概念。

二、一致收敛性

定义 10.2(一致收敛性 I)　对$\sum u_n(x)$与$S(x)$，$x\in D$。如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$:

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N,\ x\in D,$$

那末称$\sum u_n(x)$在D上**一致收敛**于$S(x)$，记作

$$\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\rightrightarrows S(x),\ x\in D,$$

若毋需指出和函数，则记作$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\rightrightarrows$, $x\in D$。若$\sum u_n(x)$不在D上一致收敛，则记作$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\not\rightrightarrows$, $x\in D$。

由定义可见，一致收敛的$\sum u_n(x)$必然是点态收敛的。反之不然(为什么?)。

例 10.2　(1) 考虑$\{f_n(x)=1/(n+x)\}$在$(0, 1)$中的一致收敛性；

(2) 考虑$x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$在$(0, 1)$与$[a, b]\subset(0, 1)$上的一致收敛性。

解　(1) $f_n(x)=1/(n+x)\to0$, $\forall x\in(0, 1)$，于是$f(x)=0$,

$x\in(0,\ 1)$。

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon)=[\varepsilon^{-1}]$:

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}<\varepsilon,\ \forall n>N,\ x\in(0,\ 1)。$$

于是

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in(0,\ 1)。$$

(2) 由例 10.1(1) 已知 $S_n(x)=x^n$ 在 $(0,\ 1)$ 中点态收敛于 $S(x)=0$。从图 10-2 观察之，收敛性是不一致的。

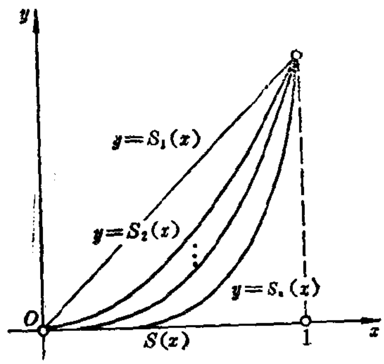


图 10-2

利用量词运算可得“$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\not\rightrightarrows S(x),\ x\in D$”的“$\varepsilon$-$N$”语言是：

$\exists\varepsilon_0>0:\forall N\in\mathbf{N},\ \exists n>N,\ x_n\in D$:

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|\geqslant\varepsilon_0。$$

取 $\varepsilon_0=3^{-1}$, $\forall N\in\mathbf{N}$, 取 $n=N+1$, $x_n=(2^{-1})^{n^{-1}}$, 则

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|=2^{-1}>3^{-1}=\varepsilon_0。$$

有趣的是 $\forall[a,\ b]\subset(0,\ 1)$ 有 $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\rightrightarrows S(x),\ x\in[a,\ b]$。

$\forall\varepsilon\in(0,\ 1),\ \exists N(\varepsilon)=[\ln\varepsilon/\ln b]$:

$|S_n(x)-S(x)|\leqslant b^n<\varepsilon,\ \forall n>N,\ x\in[a,\ b]\subset(0,\ 1)$。

下面剖析函数项级数的点态收敛与一致收敛之间细微但重要的区别，请结合例 10.1、10.2 阅读下段。

(1) $\sum u_n(x)$在D上点态收敛于$S(x)$是指：$\forall x\in D$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon, x)$：

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N(\varepsilon, x)。$$

注意：上述$N(\varepsilon, x)$不仅允许与ε有关，也允许与x有关(参见式(10.3))。因为对点态收敛而言，先确定x，再对ε求N，而对不同的x，一般地说定出的对应的数项级数也不同，所以即使对同一ε，找到的N也可能随着x的不同而不同。也就是说，局部地，个别地看，对每个x，$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\to S(x)$，而全局地，整体地看，$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\to S(x)$可能随$x$的不同有先后之差。

(2) $\sum u_n(x)$在D上一致收敛于$S(x)$那就迥然不同了，它要求$\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$：

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,\ \forall n>N(\varepsilon),\ x\in D。$$

也就是说，当ε确定后，要求存在对D上全体x通用的$N(\varepsilon)$，只允许它与ε有关，不允许它与x有关，于是$S_n(x)$趋于$S(x)$对D上全体x是一致的。

$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\rightrightarrows S(x), x\in[a, b]$有如下的几何意义(参见图10-3)：$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$，当$n>N$时，整个曲线族$y=S_n(x), x\in[a, b]$落在由曲线$y=S(x)\pm\varepsilon$, $x\in[a, b]$与直线$x=a$, $x=b$围成的带状区域中。

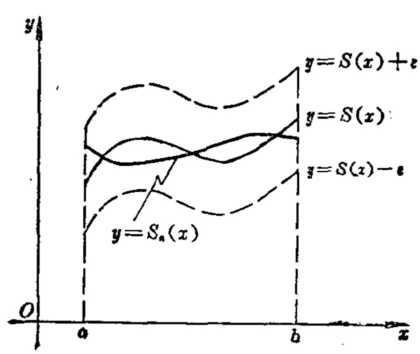


图 10-3