

数学 分析

(下册)

沐定夷 编著



上海交通大学出版社

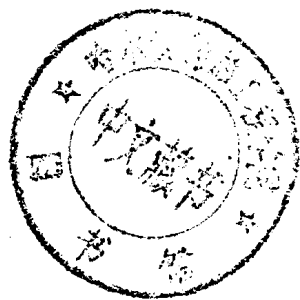
276623

276624

数 学 分 析

下 册

沐定夷 编著



上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册。下册内容包括:函数项级数、幂级数、Fourier级数、多元函数的极限与连续、偏导数与全微分、Taylor公式与极值最值、隐函数的微分学及其应用、含参变量积分、重积分、曲线积分与曲面积分、场论初步、外微分略述。

本书内容翔实,理论与计算并重。条理清晰,部分内容处理方法新颖。行文流畅,深入浅出。叙述采用启发式,对定理证明、公式推导、反例构造加强思路分析。注重方法训练与能力培养。

本书纂辑了为数众多的习题,为巩固正文、培养技巧、扩大视野、复习思考与应考提供了有力工具。

本书作为原教育部高等工业学校应用数学专业教材委员会的应征教材之一,经审核中标,由该委员会委托游兆永教授审阅,可作为应用数学专业与力学、计算数学等专业的教材或教学参考书,也可作自学用书或报考研究生的复习用书。

02490/22

(沪)新登字 205 号

数学分析(下册)

出版:上海交通大学出版社

(上海市华山路 1954 号·200030)

字数: 332000

发行:新华书店上海发行所

版次: 1994 年 3 月 第 1 版

印刷:江苏常熟文化印刷厂

印次: 1994 年 3 月 第 1 次

开本: 850×1168(毫米)1/32

印数: 1—2500

印张, 12.5

科目: 296—280

ISBN7-313-01197-0/O·7

定价: 4.30 元

任何人一旦掌握了他所从事学科的基础理论，并且学会了独立思考和工作，他必定能找到自己的前进之路，而且与那些以获得知识细节为主要目的的人相比，他必定能更好地适应进步与变化。

A. Einstein

前进！你就会有勇气。

P. S. Laplace

记 号 说 明

本册除沿用上册“记号说明”中所列记号外, 还采用下列记号
(以区间 $[a, b]$ 或区域 D 为例):

$\{f_n\} \in BU[a, b]$	函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致有界
$f \in (A)R[a, b]$	f 在 $[a, b]$ 上可积(当 f 有界时)或绝对可积(当 f 无界时)
$f \in PC[a, b]$	f 在 $[a, b]$ 上分段连续
$f \in PS[a, b]$	f 在 $[a, b]$ 上分段光滑
$f \in PDx(D)$	多元函数 f 在 D 上对 x 有偏导数
$f \in PD(D)$	多元函数 f 在 D 上可偏导

目 录

第十章 函数项级数	1
第一节 函数项级数的两种收敛性	1
一、点态收敛性及其缺点(1) 二、一致收敛性(5)	
第二节 函数项级数的一致收敛性判别法	9
第三节 一致收敛函数列的基本性质	14
习题	19
第十一章 幂级数	26
第一节 幂级数的性质与运算	26
一、幂级数收敛域的结构(26) 二、幂级数的分析	
性质(29) 三、幂级数的四则运算(34)	
第二节 函数的幂级数展开 Weierstrass 逼近定理	36
一、Taylor 级数(36) 二、函数的幂级数展开法(37)	
三、Weierstrass 逼近定理(42)	
第三节 幂级数的应用举例	45
一、幂级数在近似计算中的应用(45)	
二、生成函数(50)	
第四节 复数项幂级数 Euler 公式	53
习题	57
第十二章 Fourier 级数	63
第一节 Fourier 级数	63
一、三角级数(63) 二、三角函数系的正交性(64)	
三、Fourier 系数 Fourier 级数(66)	
四、最佳平方逼近 Bessel 不等式(68)	
第二节 收敛定理	71

一、Dirichlet 积分(71)	二、Riemann 引理 局部性定理(73)	三、收敛定理(75)
第三节 函数的 Fourier 级数展开	78	
一、周期为 2π 的 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开	(79)	
二、 $f(x)$ 的正弦或余弦级数展开	(80)	
三、周期为 T 的 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开	(82)	
四、Fourier 级数的复数形式	(83)	
第四节 Fourier 级数的一致收敛性 逐项求积与逐项求导	86	
习题	90	
第十三章 多元函数的极限与连续	96	
第一节 二元数列 平面点集	96	
一、平面点列与二元数列的极限	(96)	
二、 $\mathbf{R}^2$ 上的四条基本定理	(100)	
三、开集 闭集 区域	(102)	四、Borel 有限覆盖定理(104)
第二节 二元函数及其极限	104	
一、二元函数	(104)	二、二元函数的极限(106)
第三节 二元函数的连续性 有界闭区域上连续函数的基本性质	113	
第四节 n 维 Euclid 空间 n 元函数概述	117	
一、 n 维 Euclid 空间	(117)	二、 n 元函数概述(120)
习题	121	
第十四章 偏导数与全微分 Taylor 公式与极值最值	125	
第一节 偏导数与全微分	125	
一、偏导数	(125)	二、全微分(129)
第二节 高阶偏导数与高阶全微分	135	
一、高阶偏导数	(135)	二、高阶全微分(139)
第三节 复合函数微分法	140	

一、复合函数的偏导数(140)	
二、复合函数的全微分(144)	
第四节 方向导数与梯度	145
一、方向导数(145) 二、梯度(147)	
第五节 Taylor 公式 极值与最值	148
一、Taylor 公式(148) 二、极值与最值(150)	
习题	161
第十五章 隐函数的微分学及其应用	167
第一节 隐函数	167
一、概念(167) 二、隐函数的存在性 连续性	
可导性(168) 三、隐函数组的存在性 连续性	
可导性(175) 四、变量代换(182)	
第二节 隐函数微分的应用举例	185
一、几何应用(185) 二、条件极值(190)	
习题	200
第十六章 含参变量积分	205
第一节 含参变量的常义积分	205
第二节 含参变量的广义积分	214
一、含参广义积分的一致收敛性(214)	
二、一致收敛性判别法(217)	
三、一致收敛含参广义积分的主要性质(221)	
第三节 Euler 积分	226
一、 Γ 函数(226) 二、B 函数(229)	
第四节 Fourier 变换	232
一、Fourier 积分公式(233) 二、Fourier 变换(236)	
三、Fourier 变换的主要性质(242)	
习题	243
第十七章 重积分	250
第一节 二重积分的概念与性质	250

一、二重积分的定义(250)	二、二重积分的存在性(252)
三、二重积分的主要性质(254)	
第二节 二重积分的计算	255
一、二重积分与累次积分(255)	
二、用极坐标计算二重积分(261)	
三、二重积分的换元法(265)	
第三节 三重积分	269
一、概念 存在性 主要性质(269)	
二、三重积分的计算(270)	
第四节 广义重积分	279
一、无界区域上的二重积分(279)	
二、无界函数的二重积分(284)	
第五节 重积分的应用举例	288
一、重积分在几何中的应用(288)	
二、重积分在物理中的应用(293)	
习题	298
第十八章 曲线积分与曲面积分	307
第一节 第一型曲线积分	307
一、定义(307) 二、存在性与算法(308)	
三、主要性质(310)	
第二节 第二型曲线积分	312
一、定义(312) 二、存在性与算法(315)	
三、主要性质(316)	
四、两类曲线积分之间的联系(319)	
第三节 Green 公式	320
一、Green 公式(320) 二、二重积分换元法的证明(326)	
三、曲线积分与路径无关的条件(328)	
第四节 第一型曲面积分	333
一、定义(333) 二、存在性与算法(334)	

第五节 第二型曲面积分	338
一、曲面的侧(338) 二、双侧曲面的定侧(339)	
三、第二型曲面积分(341)	
四、两类曲面积分之间的联系(346)	
第六节 Gauss 公式 Stokes 公式	347
一、Gauss 公式(347) 二、Stokes 公式(351)	
习题	356
第十九章 场论初步	365
第一节 梯度场 散度场 旋度场	365
一、场(365) 二、梯度场(368) 三、散度场(369)	
四、旋度场(371)	
第二节 管形场 有势场 调和场	374
一、管形场(374) 二、有势场(377) 三、调和场(378)	
习题	379
附录 外微分略述	382
一、外积与外微分形式(382) 二、外微分(385)	
三、对梯度、旋度、散度的回顾(386)	
四、对 Newton-Leibnitz 公式、Green 公式、Stokes 公 式、Gauss 公式的回顾(387)	
习题	389

第十章 函数项级数

在第九章数项级数理论的基础上,本章讨论函数项级数。

在第一节中先定义函数项级数的点态收敛性,在点态收敛下函数项级数不一定能保持原有的连续性等分析性质,因此引进函数项级数的一致收敛性概念。

在第二节中讨论函数项级数一致收敛性的判别法,其中包括Cauchy原理,Weierstrass M -判别法,Dirichlet判别法,Abel判别法等,它们是数项级数中对应的收敛判别法的自然推广。

在第三节中证明在有关函数项级数一致收敛下函数项级数仍然保持着函数项所具有的某些分析性质(诸如连续性,可积性,可导性等)。

第一节 函数项级数的两种收敛性

一、点态收敛性及其缺点

函数是数学分析的主要研究对象。在数项级数理论的基础上,自然深入到函数项级数的讨论。

设 $u_n(x)$, $n=1\sim\infty$, 是定义在同一实数集 X (通常是区间 I) 上的函数列,形式地把

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 或 } \sum u_n(x) \quad (10.1)$$

称为函数项级数,把

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

称为 $\sum u_n(x)$ 的第 n 个部分和。

与数项级数类似, 由于 $\{u_n(x)\}$ 与 $\{S_n(x)\}$ 可以相互转化, 今后将任择函数项级数 $\sum u_n(x)$ 或函数列 $\{f_n(x)\}$ 讨论之, 其另一半内容留给读者考虑。

借助于数项级数的收敛性概念得出

定义 10.1 (点态收敛性) 设 $\sum u_n(x), x \in X$. $\forall x_0 \in X$, 如果

$$\{S_n(x_0)\} \in Cv, \quad (10.2)$$

那末称 $\sum u_n(x)$ 在 x_0 收敛, x_0 是 $\sum u_n(x)$ 的收敛点; 反之, 如果 $\{S_n(x_0)\} \in Dv$, 那末称 $\sum u_n(x)$ 在 x_0 发散, x_0 是 $\sum u_n(x)$ 的发散点。 $\sum u_n(x)$ 的全体收敛点组成的集 $D (\subset X)$ 称为 $\sum u_n(x)$ 的收敛域。 $\forall x \in D$, 按式 (10.2) 有 $\{S_n(x)\}$ 的极限值与之对应, 由此确定的 D 上的函数称为 $\sum u_n(x)$ 的和函数, 记作 $S(x)$:

$$\sum u_n(x) = S(x), x \in D.$$

如上逐点考虑 $x \in D$ 时, $\{S_n(x)\}$ 收敛于 $S(x)$, 称为 $\sum u_n(x)$ 在 D 上点态收敛于 $S(x)$, 记作

$$\sum_{n=1}^n u_n(x) \rightarrow S(x), x \in D.$$

对函数列 $\{f_n(x)\}$ 的点态收敛, 记作

$$f_n(x) \rightarrow f(x), x \in D,$$

并称 $f(x)$ 为 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数。

例 10.1 (1) $x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1}), X = R$,

$$(2) f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x < 1/n, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1 \sim \infty. \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$$

(参见图 10-1), 求它们的收敛域与和函数(或极限函数)。

解 (1) $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = x^n$ 。

在 $0 < |x| < 1$ 中, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 令

$$|S_n(x) - 0| = |x|^n < \varepsilon,$$

可解得 $n > [\ln \varepsilon / \ln |x|]$, 故取

$$N(\varepsilon, x) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \right] \quad (10.3)$$

即知, 当 $n > N(\varepsilon, x)$ 时, 有

$$|S_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

对 $x = 0, 1, -1$,

$$S_n(0) = 0 \rightarrow 0, \quad S_n(1) = 1 \rightarrow 1,$$

$$S_n(-1) = (-1)^n.$$

对 $|x| > 1$,

$$|S_n(x)| = |x|^n \rightarrow +\infty.$$

合之, 得

$$S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

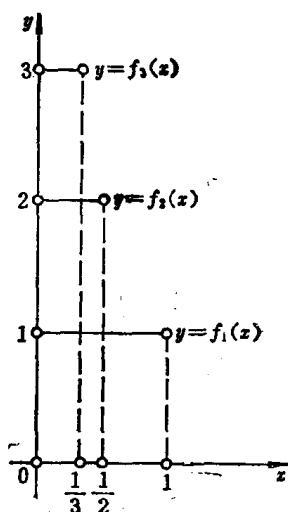


图 10-1

$$D = (-1, 1] \subset X = \mathbb{R}.$$

(2) $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$. $\forall x \in (0, 1]$, 当 $n > N = [1/x]$ 时, $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$, 故

$$f(x) = 0, \quad x \in D = [0, 1].$$

在函数项级数具有和函数时, 自然要关心它的分析性质 (如连续性, 可积性, 可导性等)。那末, 函数项原有的分析性质在点态收敛所得的和函数中仍然保持着吗? 详言之: 设 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 试问

(1) 当 $u_n \in C[a, b]$ 时 ($n = 1 \sim \infty$), 能推知 $S \in C[a, b]$ 吗?

(2) 当 $u_n \in R[a, b]$ 时 ($n = 1 \sim \infty$), 能推知 $S \in R[a, b]$, 且

$$\sum \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b (\sum u_n(x)) dx \text{ 吗?}$$

(3) 当 $u_n \in D[a, b]$ 时 ($n = 1 \sim \infty$), 能推知 $S \in D[a, b]$, 且

$$\sum \frac{d}{dx} u_n(x) = \frac{d}{dx} (\sum u_n(x)) \text{ 吗?}$$

答案是令人沮丧的。

回顾例 10.1(1) 易知 $u_n \in C[0, 1]$, $n = 1 \sim \infty$, 但

$$S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

$S \notin C[0, 1]$! 又 $u_n \in D[0, 1]$, $n = 1 \sim \infty$, 但 $S(x)$ 既然已不连续, 就无从论及可导性, 更不必侈谈 $\sum \frac{d}{dx} u_n(x) = \frac{d}{dx} (\sum u_n(x))$ 了。

例 10.1 (2) 为可积性问题提供了反例。容易知道 $\int_0^1 f_n dx = 1$, $n = 1 \sim \infty$, 而 $\int_0^1 f dx = 0$, 从而 $\lim \int_0^1 f_n dx \neq \int_0^1 f dx$, 由此可以作出 $[0, 1]$ 上的 $\sum u_n(x)$ 使 $\sum \int_0^1 u_n(x) dx \neq \int_0^1 \sum u_n(x) dx$ (为什么?) 还可以举出 $\{f_n(x)\}$, 使 $f_n \in R[0, 1]$, $n = 1 \sim \infty$, $\{f_n(x)\}$ 点态收敛于 $f(x)$ 而 $f \notin R[0, 1]$! (参见习题 10.5)。

为什么会产生这种现象呢? 以连续性为例来看。从例 10.1 1) 可见, 虽然 $S_n(x) = x^n$, $S_n \in C[0, 1]$, $n = 1 \sim \infty$, 但是由于收敛性是按点态定义的, 是局部的:

$$\forall x \in [0, 1), S_n(x) = x^n \rightarrow 0, S_n(1) = 1 \rightarrow 1,$$

各自向极限值 0, 1 趋近, 终于使 $S(x)$ 在 1 处被“扯断”。

接着的问题是: 若 $u_n \in C[a, b]$, $n = 1 \sim \infty$, 且 $\sum u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 试问对收敛性再附加什么条件才能保证 $S \in C[a, b]$?

$\forall x_0 \in [a, b]$, 考虑 $|S(x) - S(x_0)|$ 。顾及 $S_n(x)$ 在 x_0 的连续性与 $S_n(x_0)$ 收敛于 $S(x_0)$, 对上式插项再作估计:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) \\ &\quad - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)| \\ &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| \\ &\quad + |S_n(x_0) - S(x_0)|. \end{aligned} \quad (10.4)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $S_n(x_0) \rightarrow S(x_0)$ 知存在充分大的 n :

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

取定 n , 由 $S_n \in C[a, b]$ 知 $\exists \delta > 0$:

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b].$$

若再要求对上述 n 成立

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b],$$

将上列三式代入式(10.4)结合 x_0 的任意性即得 $S \in C[a, b]$ 。

为了满足上式, 可对 $\{S_n(x)\}$ 收敛于 $S(x)$ 附加下述较强的条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N:$$

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > N, x \in [a, b].$$

应强调一下, 这里对 $\varepsilon > 0$ 求得的 N 必须对全体 $x \in [a, b]$ 都通用(参见式(10.3))。这就导致下列重要概念。

二、一致收敛性

定义 10.2(一致收敛性 I) 对 $\sum u_n(x)$ 与 $S(x)$, $x \in D$ 。如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > N, x \in D,$$

那末称 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$, 记作

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) \rightrightarrows S(x), x \in D,$$

若毋需指出和函数, 则记作 $\sum_{k=1}^n u_k(x) \rightrightarrows, x \in D$ 。若 $\sum u_n(x)$ 不在 D

上一致收敛, 则记作 $\sum_{k=1}^n u_k(x) \nrightarrow, x \in D$ 。

由定义可见, 一致收敛的 $\sum u_n(x)$ 必然是点态收敛的。反之不然(为什么?)。

例 10.2 (1) 考虑 $\{f_n(x) = 1/(n+x)\}$ 在 $(0, 1)$ 中的一致收敛性;

(2) 考虑 $x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ 在 $(0, 1)$ 与 $[a, b] \subset (0, 1)$ 上的一致收敛性。

解 (1) $f_n(x) = 1/(n+x) \rightarrow 0, \forall x \in (0, 1)$, 于是 $f(x) = 0$,

$x \in (0, 1)$ 。

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) = [\varepsilon^{-1}] :$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n > N, x \in (0, 1)。$$

于是

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in (0, 1)。$$

(2) 由例 10.1(1) 已知 $S_n(x) = x^n$ 在 $(0, 1)$ 中点态收敛于 $S(x) = 0$ 。从图 10-2 观察之, 收敛性是不一致的。

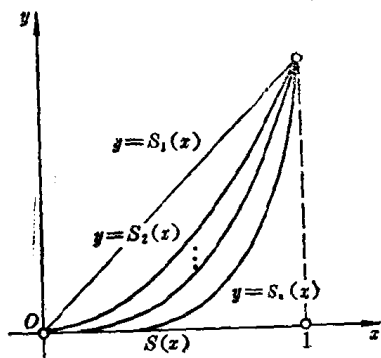


图 10-2

利用量词运算可得“ $\sum_{k=1}^n u_k(x) \rightrightarrows S(x), x \in D$ ”的“ ε - N ”语言是:

$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, x_n \in D:$

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| \geq \varepsilon_0。$$

取 $\varepsilon_0 = 3^{-1}$, $\forall N \in \mathbb{N}$, 取 $n = N + 1$, $x_n = (2^{-1})^{n-1}$, 则

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = 2^{-1} > 3^{-1} = \varepsilon_0。$$

有趣的是 $\forall [a, b] \subset (0, 1)$ 有 $\sum_{k=1}^n u_k(x) \rightrightarrows S(x), x \in [a, b]$ 。

$\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists N(\varepsilon) = [\ln \varepsilon / \ln b] :$

$$|S_n(x) - S(x)| \leq b^n < \varepsilon, \forall n > N, x \in [a, b] \subset (0, 1)。$$

下面剖析函数项级数的点态收敛与一致收敛之间细微但重要的区别, 请结合例 10.1、10.2 阅读下段。

(1) $\sum u_n(x)$ 在 D 上点态收敛于 $S(x)$ 是指: $\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x)$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon, x).$$

注意: 上述 $N(\varepsilon, x)$ 不仅允许与 ε 有关, 也允许与 x 有关(参见式(10.3)). 因为对点态收敛而言, 先确定 x , 再对 ε 求 N , 而对不同的 x , 一般地说定出的对应的数项级数也不同, 所以即使对同一 ε , 找到的 N 也可能随着 x 的不同而不同。也就是说, 局部地, 个别地看, 对每个 x , $\sum_{k=1}^n u_k(x) \rightarrow S(x)$, 而全局地, 整体地看, $\sum_{k=1}^n u_k(x) \rightarrow S(x)$ 可能随 x 的不同有先后之差。

(2) $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 那就迥然不同了, 它要求 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon), x \in D.$$

也就是说, 当 ε 确定后, 要求存在对 D 上全体 x 通用的 $N(\varepsilon)$, 只允许它与 ε 有关, 不允许它与 x 有关, 于是 $S_n(x)$ 趋于 $S(x)$ 对 D 上全体 x 是一致的。

$\sum_{k=1}^n u_k(x) \rightarrow S(x), x \in [a, b]$ 有如下的几何意义(参见图 10-3): $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 整个曲线族 $y = S_n(x), x \in [a, b]$ 落在由曲线 $y = S(x) \pm \varepsilon, x \in [a, b]$ 与直线 $x = a, x = b$ 围成的带状区域中。

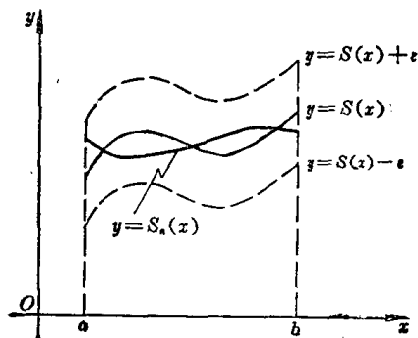


图 10.3