

概率位势论 经典位势论与

(上册)

(美) J. L. 杜布 著
科学出版社



经典位势论与概率位势论

(上 册)

〔美〕J. L. 杜布 著

周性伟 刘嘉焜 译
杨振明 张润楚
吴 荣 校

科 学 出 版 社

1 9 9 3

(京)新登字 092 号

D-24/17

内 容 简 介

本书是当今国际上最具名望的概率论大师 J. L. Doob 的杰作,是一部内容极丰富、水平非常高的著作。

概率论与分析数学相互渗透是近代概率论发展的重要特征。本书叙述了位势理论和概率论之间的联系,详细地介绍了 Laplace 方程的位势与现代势论的关系,Dirichlet 问题与布朗运动的关系, Martin 边界理论、容度理论等。本书的翻译出版将会对我国概率论研究起着一定的推动作用。

J. L. Doob

Classical Potential Theory
and Its Probabilistic Counterpart
Springer-Verlag, 1984

经典位势论与概率位势论

(上 册)

[美] J. L. 杜布 著

周性伟 刘嘉焜 译
杨振明 张润楚

吴 荣 校

责任编辑 徐字星

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993 年 12 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1993 年 12 月第一次印刷 印张: 14 1/8

印数: 1—1 500 字数: 362 000

ISBN 7-03-003400-7/O · 615

定价: 16.00 元

序

位势论与概率论的某些方面是紧密相关的,其中最明显的或许就是,可以用确定一个 Markov 过程的转移函数来定义一种位势理论的 Green 函数,这样就可能从概率上来定义和发展许多位势的理论概念.对于这一方法,位势理论家们带着猜忌的眼光,这不是没有理由的:过去和现在,他们的研究工作为 Markov 过程理论做出了许多的贡献.然而下面一点是清楚的:位势理论中的某些概念和概率论中,特别是鞅论中的某些概念是紧密对应的.例如,上调和函数对应于上鞅.更确切地说,位势理论中的 Fatou 型边界极限定理对应于上鞅收敛定理;单调上调和函数列的极限性质极其紧密地对应于单调上鞅列的极限性质;某些被称为“位势”的正上调和函数[上鞅]在它们各自的理论中已经和一些测度联系起来,并且都制约于一些和这些测度的交集有关的控制原理(不等式),在两个理论中都有约化运算,它们的性质都是相同的,并且这些约化都导致和这些位势相伴随的测度的扫除,等等.

本书的目的是通过仔细考查经典位势理论,即 Laplace 方程的位势理论和所对应的概率论,即鞅论来发展位势理论和概率论之间的这种对应.使这种对应特别清楚的媒介物是 Brown 运动过程,这就是我们要研究的.为达到这一目的,有必要研究抛物型位势理论,即热传导方程的位势理论及空时 Brown 运动过程.读者不一定有位势理论方面的知识,但要熟悉条件期望方面的基本概率概念.必要的格论、解析集合论与容度理论在附录中作了说明.

本书一方面包含有经典的和抛物型位势理论的介绍,另一方面包含有鞅论的介绍,其中包括随机过程和 Markov 过程一般理论的概要.本书的非概率和概率方面之间可以相互参考,我们也

深入地探讨了 Brown 运动与空时 Brown 运动建立的这些经典和抛物型位势理论与鞅论之间的联系。

也许有人会提出批评意见：为什么不论述一般的公理化的位势理论，而只论述很特殊的 Laplace 和热传导方程的位势理论。另一个可能的批评意见是：为什么不把位势理论作为 Markov 过程理论的一个特殊部分。然而按照作者的观点，经典位势理论极其重要，不能仅仅把它作为公理化位势的一个源泉。而公理化位势理论本身又是如此重要，以至于不能仅仅由概率论专家们去研究。从概率论去学习位势理论，就如同没有几何学而去学代数几何一样。

要把现代化了的经典位势理论中那些和本书有关的部分都讲到是完全不可能的。因此本书就有一些明显空缺的地方，例如能量的处理较为粗略，而 Dirichlet 空间与有界平均扰动的概念甚至都没有提及。我们只把重点放在 Dirichlet 问题和有关内容上，对这些课题讲得相当深入。经典的和抛物型的位势理论有时分开讨论，有时又一起讨论。但所用的符号可以显示出这两种理论的平行性：用小圆点把抛物型的和经典的概念区分开来，这费眼，但省脑。而鞅论中的符号是便于读者分清对应的位势理论中的符号。

Markov 过程理论中只有为讨论 Brown 运动和条件 Brown 运动需要的部分才被讲到。在本书中，一个随机过程是一族特殊的随机变量，它经常和一个使该族成为适应的过滤相联系，而该过程的测度空间没有特别指明，而且也没有引入转移算子。这样，在具有变化初始点的 Brown 运动的讨论中，定义该过程的测度空间可以随初始点而变化。过程的这种定义对一般的 Markov 过程理论来说或许不是最好的，但对本书的特殊目的却是方便的。例如由此可得知，不管一个过程在什么样的测度空间上定义，只要它有一个 Brown 运动的所有性质（连续样本函数和独立增量的适当分布），则它就是一个 Brown 运动。在一首古老的歌中，讲一个孩子发现一个看着象花生、闻着象花生、尝着也象花生的东西，

于是他认为这个东西就是花生。这个简单的逻辑在定义一些过程的时候是不成立的，此时定义该过程随机变量的测度空间有一些特殊需要的性质。然而本书在讨论 Brown 运动的时候，这种逻辑在证明某些不变性质中却是基本的。例如 N 维空间中两个有公共初始点和方差的 Brown 运动过程有相同的命中一个解析集的概率。这个事实不是一目了然的。本书中研究了这样的一些问题。

本书中没有非常新奇的东西。位势理论家们可以找到在一些很有意思的边界集上的约化的研究，还可以找到用叠约化来得到一些极限定理。对应地，概率论专家们可以找到一些新的上鞅下穿不等式，以及一些有意思的上鞅叠约化的技巧。一种新的上鞅控制原理说明经典位势理论仍然启示了一些有趣的概率论结论。

作者对 Bruce Hajek, Naresh Jain 以及 John Taylor 在不同的章节中提出的有益的意见表示感谢。最后作者也感谢打字员的忠实、准确的工作。

记 号 和 约 定

$\mathbf{R}^N$ 是 N 维 Euclid 空间, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$, 而 $\mathbf{R}^+$ 是正实数的集 $[0, +\infty[$, $\bar{\mathbf{R}}$ 是广义实数的集 $[-\infty, +\infty]$, 而 $\bar{\mathbf{R}}^+$ 是正广义实数的集 $[0, +\infty]$.

$\mathbf{Z}$ 是整数集, $\mathbf{Z}^+$ 是集 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 而 $\mathbf{Z}_n^+$ 是集 $\{0, 1, \dots, n\}$.

$\mathbf{R}^N$ 的无界子集的边界, 如不指明其它的紧致化就包含 $\mathbf{R}^N$ 的一点紧化的添加点 ∞ . 这个相对于 $\mathbf{R}^N$ 的一点紧化的边界称为集合的 Euclid 边界.

若 ξ 是 $\mathbf{R}^N$ 的一点, A 是 $\mathbf{R}^N$ 的子集, 那么 ξ 和 A 之间的距离写作 $|\xi - A|$.

在任意指明的一个度量空间中, $B(\xi, \delta)$ 都表示 ξ 为中心, δ 为半径的球. 特别地, 在 $\mathbf{R}^N$ 中: $B(\xi, \delta) = \{\eta: |\eta - \xi| < \delta\}$.

I_N 表示 N 维 Lebesgue 测度.

若 A 和 B 都是一个空间的子集, 那么在 A 中但不在 B 中的点集记作 $A - B$.

“正”意指“ ≥ 0 ”, 而单调的概念是广义的单调, 所以譬如由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的常数函数又是单调递增的又是单调递减的.

若 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的开子集, 那么 $C^{(k)}(D)$ 表示从 D 到 $\mathbf{R}$ 中具有 k 阶连续导数的函数类.

函数 f 在一点的极限概念不涉及 f 在该点的值. 于是 $\lim_{\eta \rightarrow \xi} f(\eta) = \alpha$ 是指 f 在一个不含 ξ 的小空心邻域上趋向 α .

序列的下标常常用小圆点表示. 如没有其它声明, 指标集总是指 $\mathbf{Z}^+$. 比如 $A. = \{A_0, A_1, \dots\}$.

如 f 在一个集上满足某条件 S , 则该集就用 $\{S\}$ 表示. 比如 f 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的函数, 则 f 的正值集写为 $\{f \geq 0\}$.

本书分为三部分。1.II.3 表示第 1 部分第 II 章第 3 节。在某一部分内，II.3 表示该部分第 II 章第 3 节。在某一章内，第 3 节就是该章的第 3 节等等。

目 录

序.....	xi
记号和约定.....	xiv

第 1 部分 经典位势理论和抛物型位势理论

第 I 章 经典位势理论数学背景的介绍.....	1
1. Green 公式	1
2. 函数平均	2
3. 调和函数	3
4. 调和函数的最大最小值定理	4
5. R^N 中的基本核和它的位势.....	4
6. Gauss 积分定理	6
7. 位势的光滑性; Poisson 方程	6
8. 调和测度和 Riesz 分解	10
第 II 章 调和、次调和与上调和函数的基本性质	14
1. 球的 Green 函数; Poisson 积分	14
2. Harnack 不等式	16
3. 调和函数有向集的收敛性	18
4. 调和、次调和与上调和函数.....	19
5. 上调和函数的最小值定理	20
6. 运算 τ_B 的应用	21
7. 用调和函数刻画上调和函数	23
8. 可微分上调和函数	24
9. Jensen 不等式的应用	25
10. 圆环上的上调和函数.....	25
11. 例.....	27
12. Kelvin 变换 ($N \geq 2$).....	28
13. Green 集.....	29

14. 球 B 上的调和函数类 $L^1(\mu_{B-})$ 和 $D(\mu_{B-})$, Riesz-Herglotz 定理	30
15. Fatou 边界极限定理	34
16. 最小调和函数	36
第 III 章 上调和函数族的下确界	38
1. 最小上调和强函数 (LM) 和最大次调和弱函数 (GM)	38
2. 定理 1 的一般化	39
3. 基本收敛定理(初步)	40
4. 约化运算	42
5. 约化性质	45
6. 紧集上约化的一个最小性质	47
7. 正上调和函数的自然(逐点)序分解	48
第 IV 章 特殊开集上的位势	50
1. 特殊开集及其上的位势	50
2. 例	53
3. 位势的一个基本最小性质	54
4. 递增的位势列	54
5. 位势的光滑	55
6. 确定位势的测度的唯一性	55
7. 与一个上调和函数相伴的 Riesz 测度	57
8. Riesz 分解定理	58
9. R^2 上的上调和函数 Riesz 分解的补充	59
10. 一个逼近定理	61
第 V 章 极集及其应用	64
1. 定义	64
2. 和一个极集相伴的上调和函数	65
3. 极集的可数并	66
4. 极集的性质	67
5. 上调和函数的扩张	68
6. R^2 中的 Green 集作为非极集的补集	71
7. 上调和函数最小值定理(定理 II.5 的推广)	71
8. Evans-Vasilesco 定理	73

9. 用连续位势逼近位势	74
10. 控制原理	75
11 位势的无穷集和 Riesz 测度	77
第 VI 章 基本收敛定理及约化运算	79
1. 基本收敛定理	79
2. 内极集与极集	81
3. 约化运算的性质	83
4. 约化性质的证明	87
5. 约化和容量	95
第 VII 章 Green 函数	96
1. Green 函数 G_D 的定义	96
2. G_D 的极值性质	98
3. G_D 的有界性质	99
4. G_D 的进一步性质	101
5. 测度 μ 的位势 $G_D\mu$	104
6. 递增开集列及其对应的 Green 函数列	106
7. G_D 的存在性与 D 的 Green 特性	107
8. 从特殊集到 Green 集	108
9. 逼近引理	108
10. 作为最小调和函数的函数 $G_D(\cdot, \xi) _{D-\{\xi\}}$	109
第 VIII 章 关于相对调和函数的 Dirichlet 问题	111
1. 相对调和、上调和与次调和函数	111
2. PWB 方法	113
3. 例	118
4. Euclid 边界上的连续边界函数 ($h \equiv 1$)	120
5. h -调和和测度零集	122
6. PWB* 解的性质	125
7. 第 6 节的证明	127
8. h -调和和测度	130
9. h -可解边界	135
10. 约化与 Dirichlet 解的关系	138
11. 算子 τ_B^* 的推广及应用于 GM^*	140

12. 壁	141
13. h -壁与边界点 h -规则性	143
14. 壁与 Euclid 边界点的规则性	144
15. 规则性的几何意义 (Euclid 边界, $h \equiv 1$)	147
16. 第 13 节的继续	149
17. 作为 D 的函数的 h -调和测度 μ_D^h	149
18. G_D 的扩张 G_D^+ 及当 $D \subset B$ 时的调和平均 $\mu_D(\xi, G_B^-(\eta, \cdot))$	151
19. $D = \mathbb{R}^2$ 时第 18 节的变动	155
20. ϕ_D 作为具有极点 ∞ 的 Green 函数的解释 ($N = 2$)	159
21. 算子 τ_B 的变式	159
第 IX 章 格与相关的函数类	161
1. 引言	161
2. h -次调和函数 u 的 $LM_D^h u$	161
3. 类 $D(\mu_{D-}^h)$	162
4. 类 $L^p(\mu_{D-}^h)$ ($p \geq 1$)	164
5. 格 $(S^\pm, \leq)$ 和 $(S^+, \leq)$	166
6. 向量格 $(S, \sup)$	167
7. 向量格 S_m	170
8. 向量格 S_p	170
9. 向量格 $S_{q,b}$	171
10. 向量格 S_r	172
11. Riesz 分解的一个细化	173
12. 球上的 h -调和函数格	174
第 X 章 扫除运算	178
1. 有关扫除的概念和术语	178
2. 调和测度与扫除核的关系	180
3. 扫除对称性定理	181
4. δ_D^h 的核性质	182
5. 扫除测度与函数	183
6. δ_D^h 的一些性质	185
7. 正调和函数的极点	186
8. 极集上的相对调和测度	187

第 XI 章 细拓扑	190
1. 定义与基本性质	190
2. 薄性判别准则	192
3. $\xi \in A'$ 的条件	193
4. 内极限定理	196
5. 细拓扑到 $\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ 上的扩张	199
6. $\mathbb{R}^N$ 的子集的细拓扑导集	202
7. 应用于基本收敛定理和约化	202
8. 细拓扑极限和 Euclid 拓扑极限	203
9. 细拓扑极限和 Euclid 拓扑极限(续)	204
10. 用特殊函数 $\mu^\#$ 识别 A'	205
11. 拟 Lindelöf 性	206
12. 用细拓扑表示的规则性	207
13. Green 集在其 Euclid 边界集的薄性	208
14. 扫除测度的支集	208
15. $[\mu]^\Delta$ 的刻画	209
16. 一个特殊约化	210
17. 上调和函数常值集的细内部	210
18. 扫除测度的支集(第 14 节的续)	211
19. 细开集上的上调和函数	213
20. 一个广义约化	214
21. 上调和函数在其定义域上非规则边界点处的极限	216
22. 极限调和测度 μ_D	218
23. 控制原理的推广	221
第 XII 章 Martin 边界	222
1. 动机的形成	222
2. Martin 函数	223
3. Martin 空间	224
4. 正调和函数及其约化的初步表示	226
5. 最小调和函数及其极点	228
6. 引理 4 的推广	229
7. 非最小 Martin 边界点集	230

8. 最小 Martin 边界点集上的约化	231
9. Martin 表示	231
10. Martin 边界的可解性	234
11. Martin 边界点处的极小薄性	236
12. 极小细拓扑	238
13. 定理 XI.4(c) 与 (d) 的第一个 Martin 边界对应结果	241
14. 定理 XI.4(c) 的第二个 Martin 边界对应结果	242
15. 最小 Martin 边界点上的极小细拓扑极限与 Martin 拓扑极限	244
16. 最小 Martin 边界点上的极小细拓扑极限与 Martin 拓扑极限(续)	245
17. 极小细 Martin 边界极限函数	245
18. 位势的细边界函数	247
19. Martin 空间的 Fatou 边界极限定理	248
20. 关于 R^N 中-球上的相对上调和函数的经典边界极限定理与极小细拓扑边界极限定理	250
21. 在半空间边界的非切线方向极限与极小细极限	252
22. 半空间的法向边界极限	252
23. 半空间上的位势的边界极限函数(极小细与法向的)	254
第 XIII 章 经典能量和容量	256
1. 物理背景	256
2. 测度及其能量	257
3. 负荷及其能量	258
4. 位势不等式及对应的能量不等式	259
5. 函数 $D \mapsto G_D \mu$	260
6. 能量的经典赋值; Hilbert 空间方法	261
7. 能量泛函(关于 R^N 的任一 Green 子集 D)	264
8. 定理 7(b ⁺) 的另一证明	266
9. 引理 4 的加强	268
10. 经典容量函数	268
11. 内容度和外容量(第 10 节的记号)	271
12. 平衡位势的极值性质特征表示(第 10 节的记号)	272
13. $C(A)$ 的表达式	274

14. Gauss 极小问题及其与约化的关系	275
15. C^* 对 D 的依赖	279
16. 与 R^2 相关的能量	280
17. Wiener 薄性判别准则	282
18. Robin 常数及与 R^2 相关的平衡测度 ($N = 2$)	284
第 XIV 章 一维位势理论	289
1. 引言	289
2. 调和、上调和与次调和函数	289
3. 收敛定理	289
4. 上调和函数和次调和函数的光滑性质	290
5. Dirichlet 问题 (Euclid 边界)	291
6. Green 函数	291
7. 测度的位势	292
8. 定义位势的测度的识别	293
9. Riesz 分解	294
10. Martin 边界	294
第 XV 章 抛物型位势理论: 基本事实	296
1. 约定	296
2. 抛物型算子与共抛物型算子	297
3. 共抛物型多项式	298
4. R^N 上的抛物型 Green 函数	300
5. 抛物型函数的最大最小值定理	302
6. Green 定理的应用	304
7. 光滑区域的抛物型 Green 函数; Riesz 分解与抛物型测度(形式的处理)	305
8. 区间上的 Green 函数	307
9. 区间的抛物型测度	309
10. 抛物型平均	310
11. 抛物型情形的 Harnack 定理	312
12. 上抛物型函数	313
13. 上抛物型函数最小值定理	315
14. 运算 $\bar{\partial}$ 与上抛物型函数平均性质的解释	316

15. 柱体上的上抛物型函数与抛物型函数	318
16. Appell 变换	319
17. 定义于柱体上的抛物型函数的扩张	320
第 XVI 章 平板上的次抛物型、上抛物型与抛物型函数	322
1. 平板上的抛物型 Poisson 积分	322
2. 广义上抛物型函数不等式	324
3. 次抛物型函数上确界准则	325
4. 正抛物型函数恒等于零的一个边界极限准则	326
5. 正抛物型函数可用 Poisson 积分表示的条件	327
6. 平板上的抛物型函数类 $L^1(\mu_{\tilde{D}})$ 与 $D(\mu_{\tilde{D}})$	328
7. 抛物型边界极限定理	330
8. 平板上的最小抛物型函数	331
第 XVII 章 抛物型位势理论(续)	333
1. 最大弱函数与最小强函数	333
2. 抛物型基本收敛定理(初步的描述)与约化运算	333
3. 抛物型情形的约化运算	334
4. 抛物型 Green 函数	336
5. 位势	340
6. 位势的光滑性	342
7. Riesz 分解定理	345
8. 抛物型极集	345
9. 抛物型细拓扑	348
10. 半极集	350
11. 约化性质的初步列举	351
12. 抛物型薄性准则	354
13. 抛物型基本收敛定理	355
14. 基本收敛定理在约化和 Green 函数上的应用	357
15. 基本收敛定理在抛物型细拓扑上的应用	358
16. 抛物型约化性质	359
17. 16 节中约化性质的证明	362
18. 经典 Green 函数用抛物型 Green 函数的表示 ($N \geq 1$)	368
19. 拟 Lindelöf 性	371

第 XVIII 章 抛物型 Dirichlet 问题、扫除及例外集..... 372

1. 抛物型情形的相对化与 PWB 方法	372
2. $\dot{h}$ -抛物型测度	375
3. 抛物型壁	377
4. 经典 Dirichlet 问题和抛物型 Dirichlet 问题之间的关系	378
5. 抛物型情形的经典约化	379
6. 边界点的抛物型规则性	381
7. 用细拓扑描述规则性	385
8. 抛物型情形的扫除	385
9. $\dot{G}_B$ 的扩张 $\dot{G}_B$ 与 $\dot{D} \subset \dot{B}$ 时的抛物型平均 $\dot{\mu}_B(\xi, \dot{G}_B^-(\cdot, \eta))$	387
10. $\xi \in \dot{A}^M$ 的条件	390
11. 抛物型极集与共抛物型极集	392
12. 抛物型半极集与共抛物型半极集	393
13. 扫除测度的支集	395
14. 一个内极限定理;上抛物型函数的共抛物型细拓扑光滑性	396
15. 应用于平板上抛物型情形的 Fatou 边界极限定理的描述	403
16. 抛物型情形的控制原理	404
17. 上抛物型函数在其定义域的抛物型非规则边界点的极限	405
18. Martin 平坦点集对	408
19. 抛物型情形的格与相关函数类	409

第 XIX 章 抛物型情形的 Martin 边界

1. 引言	410
2. Martin 点集和测度集对的 Martin 函数	411
3. Martin 空间 $\dot{D}^M$	413
4. 抛物型情形 Martin 表示定理的预备	415
5. 最小抛物型函数及其极点	417
6. 非最小 Martin 边界点集	418
7. 抛物型情形的 Martin 表示	418
8. 平板 $\dot{D} = \dot{\mathbb{R}}^N \times]0, \delta[$, $0 < \delta \leq \pm\infty$, 的 Martin 边界	419
9. $\dot{\mathbb{R}}^N$ 的下半空间与 $\dot{\mathbb{R}}^N$ 的 Martin 边界	422
10. $\dot{D} =]0, +\infty[\times]-\infty, \delta[$ 的 Martin 边界	423
11. $\dot{D}^M$ 上的 PWB 解	425