经典位势论与概率位势论

（上册）

〔美〕J. L. 杜布 著

科学出版社

经典位势论与概率位势论

（上 册）

〔美〕J. L. 杜布 著

周性伟 刘嘉焜 杨振明 张润楚 译

吴 荣 校

科 学 出 版 社

1 9 9 3

(京)新登字092号

内 容 简 介

本书是当今国际上最具名望的概率论大师 J. L. Doob 的杰作，是一部内容极丰富、水平非常高的著作.

概率论与分析数学相互渗透是近代概率论发展的重要特征. 本书叙述了位势理论和概率论之间的联系，详细地介绍了 Laplace 方程的位势与现代鞅论的关系，Dirichlet 问题与布朗运动的关系，Martin 边界理论、容度理论等. 本书的翻译出版将会对我国概率论研究起着一定的推动作用.

J. L. Doob

Classical Potential Theory

and Its Probabilistic Counterpart

Springer-Verlag, 1984

经典位势论与概率位势论

(上 册)

〔美〕J. L. 杜布 著

周性伟 刘嘉焜
杨振明 张润楚 译

吴 荣 校

责任编辑 徐宇星

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1993年12月第一次印刷 印张：14 1/8

印数：1—1 500 字数：362 000

ISBN 7-03-003400-7/O·615

定价：16.00元

序

位势论与概率论的某些方面是紧密相关的，其中最明显的或许就是，可以用确定一个 Markov 过程的转移函数来定义一种位势理论的 Green 函数，这样就可能从概率上来定义和发展许多位势的理论概念．对于这一方法，位势理论家们带着猜忌的眼光，这不是没有理由的：过去和现在，他们的研究工作为 Markov 过程理论做出了许多的贡献．然而下面一点是清楚的：位势理论中的某些概念和概率论中，特别是鞅论中的某些概念是紧密对应的．例如，上调和函数对应于上鞅．更确切地说，位势理论中的 Fatou 型边界极限定理对应于上鞅收敛定理；单调上调和函数列的极限性质极其紧密地对应于单调上鞅列的极限性质；某些被称为“位势”的正上调和函数[上鞅]在它们各自的理论中已经和一些测度联系起来，并且都制约于一些和这些测度的支集有关的控制原理(不等式)，在两个理论中都有约化运算，它们的性质都是相同的，并且这些约化都导致和这些位势相伴随的测度的扫除，等等．

本书的目的是通过仔细考查经典位势理论，即 Laplace 方程的位势理论和所对应的概率论，即鞅论来发展位势理论和概率论之间的这种对应．使这种对应特别清楚的媒介物是 Brown 运动过程，这就是我们要研究的．为达到这一目的，有必要研究抛物型位势理论，即热传导方程的位势理论及空时 Brown 运动过程．读者不一定有位势理论方面的知识，但要熟悉条件期望方面的基本概率概念．必要的格论、解析集合论与容度理论在附录中作了说明．

本书一方面包含有经典的和抛物型位势理论的介绍，另一方面包含有鞅论的介绍，其中包括随机过程和 Markov 过程一般理论的概要．本书的非概率和概率方面之间可以相互参考，我们也

深入地探讨了 Brown 运动与空时 Brown 运动建立的这些经典和抛物型位势理论与鞅论之间的联系。

也许有人会提出批评意见：为什么不论述一般的公理化的位势理论，而只论述很特殊的 Laplace 和热传导方程的位势理论。另一个可能的批评意见是：为什么不把位势理论作为 Markov 过程理论的一个特殊部分。然而按照作者的观点，经典位势理论极其重要，不能仅仅把它作为公理化位势的一个源泉。而公理化位势理论本身又是如此重要，以至于不能仅仅由概率论专家们去研究。从概率论去学习位势理论，就如同没有几何学而去学代数几何一样。

要把现代化了的经典位势理论中那些和本书有关的部分都讲到是完全不可能的。因此本书就有一些明显空缺的地方，例如能量的处理较为粗略，而 Dirichlet 空间与有界平均扰动的概念甚至都没有提及。我们只把重点放在 Dirichlet 问题和有关内容上，对这些课题讲得相当深入。经典的和抛物型的位势理论有时分开讨论，有时又一起讨论。但所用的符号可以显示出这两种理论的平行性：用小圆点把抛物型的和经典的概念区分开来，这费眼，但省脑。而鞅论中的符号是便于读者分清对应的位势理论中的符号。

Markov 过程理论中只有为讨论 Brown 运动和条件 Brown 运动需要的部分才被讲到。在本书中，一个随机过程是一族特殊的随机变量，它经常和一个使该族成为适应的过滤相联系，而该过程的测度空间没有特别指明，而且也没有引入转移算子。这样，在具有变化初始点的 Brown 运动的讨论中，定义该过程的测度空间可以随初始点而变化。过程的这种定义对一般的 Markov 过程理论来说或许不是最好的，但对本书的特殊目的却是方便的。例如由此可得知，不管一个过程在什么样的测度空间上定义，只要它有一个 Brown 运动的所有性质（连续样本函数和独立增量的适当分布），则它就是一个 Brown 运动。在一首古老的歌中，讲一个孩子发现一个看着象花生、闻着象花生、尝着也象花生的东西，

于是他认为这个东西就是花生．这个简单的逻辑在定义一些过程的时候是不成立的，此时定义该过程随机变量的测度空间有一些特殊需要的性质．然而本书在讨论 Brown 运动的时候，这种逻辑在证明某些不变性质中却是基本的．例如N维空间中两个有公共初始点和方差的 Brown 运动过程有相同的命中一个解析集的概率．这个事实不是一目了然的．本书中研究了这样的一些问题．

本书中没有非常新奇的东西．位势理论家们可以找到在一些很有意思的边界集上的约化的研究，还可以找到用叠约化来得到一些极限定理．对应地，概率论专家们可以找到一些新的上鞅下穿不等式，以及一些有意思的上鞅叠约化的技巧．一种新的上鞅控制原理说明经典位势理论仍然启示了一些有趣的概率论结论．

作者对 Bruce Hajek, Naresh Jain 以及 John Taylor 在不同的章节中提出的有益的意见表示感谢．最后作者也感谢打字员的忠实、准确的工作．

记 号 和 约 定

$\mathbf{R}^N$ 是N维 Euclid 空间，$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$，而 $\mathbf{R}^+$ 是正实数的集$[0,+\infty[$. $\overline{\mathbf{R}}$ 是广义实数的集$[-\infty,+\infty]$，而 $\overline{\mathbf{R}}^+$ 是正广义实数的集$[0,+\infty]$.

$\mathbf{Z}$ 是整数集，$\mathbf{Z}^+$ 是集$\{0,1,2,\cdots\}$而 $\mathbf{Z}_n^+$ 是集$\{0,1,\cdots,n\}$.

$\mathbf{R}^N$ 的无界子集的边界，如不指明其它的紧致化就包含 $\mathbf{R}^N$ 的一点紧化的添加点∞. 这个相对于 $\mathbf{R}^N$ 的一点紧化的边界称为集合的 Euclid 边界.

若ξ是 $\mathbf{R}^N$ 的一点，A是 $\mathbf{R}^N$ 的子集，那么ξ和A之间的距离写作$|\xi-A|$.

在任意指明的一个度量空间中，$B(\xi,\delta)$ 都表示ξ为中心，δ为半径的球. 特别地，在 $\mathbf{R}^N$ 中：$B(\xi,\delta)=\{\eta:|\eta-\xi|<\delta\}$.

l_N 表示N维 Lebesgue 测度.

若A和B都是一个空间的子集，那么在A中但不在B中的点集记作 $A-B$.

“正”意指“$\geqslant 0$”，而单调的概念是广义的单调，所以譬如由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的常数函数又是单调递增的又是单调递减的.

若D是 $\mathbf{R}^N$ 的开子集，那么 $C^{(k)}(D)$表示从D到 $\mathbf{R}$ 中具有k阶连续导数的函数类.

函数f在一点的极限概念不涉及f在该点的值. 于是 $\lim_{\eta\to\xi}f(\eta)=\alpha$ 是指f在一个不含ξ的小空心邻域上趋向 α.

序列的下标常常用小圆点表示. 如没有其它声明，指标集总是指 $\mathbf{Z}^+$. 比如 $A.=\{A_0,A_1,\cdots\}$.

如f在一个集上满足某条件S，则该集就用 $\{S\}$ 表示. 比如f是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的函数，则f的正值集写为 $\{f\geqslant 0\}$.

本书分为三部分. 1.II.3 表示第 1 部分第 II 章第 3 节. 在某一部分内，II.3 表示该部分第 II 章第 3 节. 在某一章内，第 3 节就是该章的第 3 节等等.

目 录