应用数学丛书

实变函数论基础

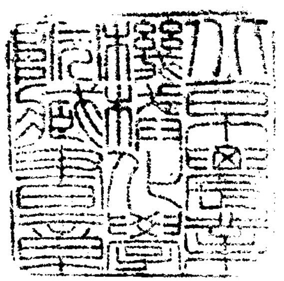
胡钦训 编著

国防工业出版社

应 用 数 学 丛 书

实变函数论基础

胡钦训 编著



国防工业出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了实变函数论的一般原理和基本方法。在处理过程中随时注意从几何或物理上加以解释，使理论更加生动而易于掌握。

全书共分四章：点集论；测度论；积分论与微分论。为了工程上的需要，还插入概率论的一般的描述作为理论的应用。并企图为进一步学习泛函分析、微分方程和概率论奠定坚实的基础。阅读本书只需要数学分析的基础知识。

本书可供工程技术人员、物理、力学、数学工作者以及高等院校有关专业的教师、研究生和学生参考。

应用数学丛书

实变函数论基础

胡钦训　编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

房山南召印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 6 1/2　164千字

1984年11月第一版　1984年11月第一次印刷　印数：0,001— 7,750册

统一书号：15034·2704　定价：0.99元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　　言

目前国内关于实变函数论方面的译本与编著书，有的内容太浩繁，如卡拉太渥多里（C. Carathéodory）的，那唐松（И. П. Натансон）的；有的内容太抽象，如哈尔姆斯（P. R. Halmos）的，有的内容广度与深度亦不适应今后工程上的要求。为此本书在测度论上着重写一般测度，而以勒贝格（Lebesgue）测度与勒贝格-斯蒂尔吉斯(Lebesgue-stieltjes)测度作为特例。在积分论上着重写一般空间上的积分，而以勒贝格积分作为特例。在微分论上，除了考虑 R^n 中勒贝格积分与微分的互逆过程外，并推广到抽象空间。

本书为读者进一步学习概率论、泛函分析与微分方程打下基础。在工程技术上除用到一些实变函数论的基本概念与基本方法之外，主要在于要求熟悉概率论、泛函分析及微分方程的应用，例如，现代控制理论就是这样的。

本书编写仓促，可能存在不少缺点，希望读者提出批评意见。

目 录

第一章　点　集　论

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合与空间

点集论在现代数学中扮演着极其重要的角色，而且已经影响并正在影响着整个的数学。近代实变函数就是在点集论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的。因此我们必需先介绍一些有关点集论的基本知识。

满足一定条件的对象的全体称为集合；其中每个对象称为是这个集合的元素。以后用大写字母A，B，C，…表示集合；而用小写字母a，b，c，…表示它们的元素。元素a属于集合A，记为$a\in A$；元素a不属于集合A，记为$a\overline{\in} A$。对于一个集合A，任何对象a，或者$a\in A$，或者$a\overline{\in} A$，二者必居其一，但不可得兼。又集合本身决不允许作为它的元素，即$A\overline{\in} A$。

例如，整数集合Z，有理数集合Q，实数集合R，复数集合C都是常用的集合。而正整数（自然数）集合

$$Z^{+}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

与区间

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

又是本章的基本集合。

集合的表示法，我们采用

$$\{x\mid P(x)\}$$

其中$P(x)$表示元素x所满足的条件。例如开区间已表示如上，而闭区间可表示为

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

又
$$Z^{+}=[1,2,3,\cdots,n,\cdots]$$

也是集合的一种表示法，此集合还可表为

$$Z^+=\{n \mid n=1,\ 2,\cdots\}。$$

在讨论集合时，一般总有一个主集合，此主集合称为空间，一般记作Ω。Ω的元素称为点。这里所说的“点”可以是数，函数以及其他任何的对象，亦可以是几何上的点。

例如，(a,b)，$[a\ b]$都是实数集合R中的集合，而R就是这些集合的主集合。因此把R叫做空间，此空间就是数直线。又如，集合$\{z \mid |z|=1\}$在R上表示二个点$z=1$与$z=-1$，而在复数平面C上它表示单位圆周。

设A和B是两个集合，如果两者包含的元素完全一样，则称A和B相等，记作$A=B$。例如在数直线R上集合$A=\{-1,1\}$和集合$B=\{x \mid x^2=1\}$是相等的。

如果集合A的一切元素都包含在集合B中，则称A是B的子集，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。如果A是B的子集又集合B中确有元素$b\in A$，则称A是B的真子集，记为$A\subset B$或$B\supset A$。例如集合Z是集合R的真子集，集合Z^+是集合Z的真子集。

没有元素的集合称为空集，记为ϕ。我们规定空集是任何集合的子集。

由此，显然有

(1) $A\subseteq B$，$B\subseteq C \Longrightarrow A\subseteq C$

这里符号“$S_1\Rightarrow S_2$”表示“从S_1的成立，必有S_2的成立。”或者说“S_1蕴含着S_2”。

(2) $A=B \Longleftrightarrow A\subseteq B$，$B\subseteq A$。

这里符号“$S_1\Longleftrightarrow S_2$”表示“$S_1$成立的充要条件是$S_2$成立。”或者说“$S_1$与$S_2$是等价的。”

1.1.2 集合代数

在测度论中，对集合需要作各种各样的合并与分解，这种合并与分解就是对集合进行代数运算。

设有两个集合A和B，下列两个集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{及}x\in B\}$$

分别称为A与B的联集（并集）与交集(通集)。例如，对于

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{3,4,5,6\}$$

则有
$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A\cap B=\{3,4\}$$

一般，对任何多个集合A_α，同样可定义联集与交集

$$\bigcup_\alpha A_\alpha=\{x\mid x\in A_\alpha\text{，某个}\alpha\},\quad \bigcap_\alpha A_\alpha=\{x\mid x\in A_\alpha\text{，一切}\alpha$$

例如，对于 $A_n=\left\{x\mid 0<x<\dfrac{1}{n}\right\}$，则有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0、1)\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$$

对于联与交显然有下列性质：

（1）交换律：$A B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

（3）分配律：$(A\cup B)\cup C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$。

设有两个集合A和B，下列两个集合

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{，而}x\overline{\in}B\}$$

$$A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

分别称为A与B的差集与对称差集。联集，交集，差集与对称差集有如下的示意图(图1-1)。对于差集与对称差集，显然有

（1）$(A\setminus B)\cup B=A\Longleftrightarrow B\subseteq A$

（2）$A\,\Delta\,B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

在空间Ω中，设A为Ω中的一个集合，差集$\Omega\setminus A$简称为A的余集，记为$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\Omega\setminus A$$

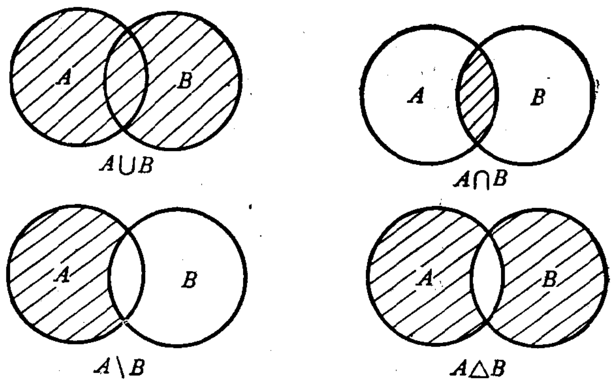


图 1-1

对于余集，显然有

（1）$\overline{\overline{A}}=A$

（2）设$P(x)$与$Q(x)$是相反的条件

$$A=\{x|P(x)\}\Longrightarrow\overline{A}=\{x|Q(x)\}$$

（3）$\overline{\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha}=\bigcap\limits_{\alpha}\overline{A}_\alpha$

（4）$\overline{\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha}=\bigcup\limits_{\alpha}\overline{A}_\alpha$

现以（3）为例证明之。

设$x\in\overline{\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha}$，由于$x\notin\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$，因而$x\notin A_\alpha$(一切α)。由此$x\in\overline{A}_\alpha$(一切α)，故$x\in\bigcap\limits_{\alpha}\overline{A}_\alpha$.

又设$x\in\bigcap\limits_{\alpha}\overline{A}_\alpha$，由于$x\in\overline{A}_\alpha$(一切α)，因而$x\notin A_\alpha$(一切α)，由此$x\notin\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$，故$x\in\overline{\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha}$。 证毕

设有两个集合X和Y，下列集合

$$X\times Y=\{(x,y)|x\in X,\ y\in Y\}$$

称为是X和Y的**积集**，同样可定多个集合的积集。例如$R\times R=R^2$为二维平面，$R\times R\times R=R^3$为三维空间。

如果$A\cap B=\phi$，则称A和B不相交。一个集列$\{A_n\}$，如果$A_m\cap A_n=\phi$，$m\neq n$。则称$\{A_n\}$为非交集列。

在测度论中，非交集列的联集将起重要的作用。今证明下列重要结果。

定理1.1 对任一集列$\{A_n\}$必存在非交集列$\{B_n\}$使$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$。

证明：取$B_1=A_1$，对$n>1$取

$$B_n=A_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k$$

于是得到了非交集列$\{B_n\}$。

今设$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，由于$x\in A_n$(某些$n$)，令$n_0$为这些整数的最小者，使得$x\in A_{n_0}$，因而$x\in B_{n_0}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$。

又设$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，由于$x\in B_n$(某个$n$)因而$x\in A_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

证毕

在空间Ω中，集合A的特征函数$C_A(x)$是指

$$C_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in\overline{A}。\end{cases}$$

定理1.2 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A^0$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_0\Longrightarrow C_{A^0}(x)=\sup\limits_n C_{A_n}(x)$，$C_{A_0}(x)=\inf\limits_n C_{A_n}(x)$

证明：只证第一个结论已足

当$x\in A^0$，由于$x\in A_k$(某些k)，因而

$$\sup_n C_{A_n}(x)=C_{A_k}(x)=1$$

当$x\in\overline{A^0}$，由于$x\in\overline{A}_n$(一切n)，因而$C_{A_n}(x)=0$（一切n）。故

$$\sup_n C_{A_n}(x)=0。$$ 证毕

对集列$\{A_n\}$，下列集合

$$\overline{\lim_n} A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n,\quad \underline{\lim_n} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$$

分别称为$\{A_n\}$的上限集与下限集

例如，在R中，设

$$A_n=\begin{cases}\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\ \{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

由于对任何正整数k，有

$$A_k\cup A_{k+1}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$$

因而，$\overline{\lim_n} A_n=[0,2]$。

又对任何正整数k，有

$$A_k\cap A_{k+1}=\{x\mid x=1\}$$

因而，$\underline{\lim_n} A_n=\{1\}$。

又如，在R中，设

$$A_n=\begin{cases}\{x\mid -n\leqslant x\leqslant 0\}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\ \left\{x\mid \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant n\right\}; & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

这里$\overline{\lim_n} A_n=R$，$\underline{\lim_n} A_n=\phi$

根据联与交的定义，可知

$\overline{\lim_n} A_n=\{x\mid x\in A_n$，无穷多个$n$的值$\}$，

$\underline{\lim_n} A_n=\{x\mid x\in A_n$，除有限个$n$值外的一切$n\}$

由此显然有

$$\underline{\lim_n} A_n\subseteq\overline{\lim_n} A_n$$

对于上限集与下限集，定理1.2成为

定理 1.3 $A^0=\overline{\lim_n} A_n$，$A_0=\underline{\lim_n} A_n$

$\Longrightarrow C_{A^0}(x)=\overline{\lim_n} C_{A_n}(x)$，$C_{A_0}(x)=\underline{\lim_n} C_{A_n}(x)$

如果

$$\overline{\lim_n} A_n=\underline{\lim_n} A_n$$

则称集列$\{A_n\}$是收敛的，极限集合用$\lim_n A_n$表示。在上述两个例子中，$\{A_n\}$均为不收敛的集列。

例如，在R中，设

$$A_n=\begin{cases}\left\{x\mid 0<x\leqslant 1-\dfrac{1}{n}\right\}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\[2ex] \left\{x\mid \dfrac{1}{n}\leqslant x<1\right\}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

集列$\{A_n\}$是收敛的，且$\lim_n A_n=(0,1)$

对$\{A_n\}$，如果对每一个正整数n，有

$$A_{n+1}\supseteq A_n$$

则称$\{A_n\}$为放大集列

如果

$$A_{n+1}\subseteq A_n$$

则称$\{A_n\}$为收缩集列，放大集列与收缩集列统称为单调集列。

定理1.4 单调集列必为收敛集列

证明：今就$\{A_n\}$为放大集列证之即可，对每一个k，

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n=A_k$$

因而 $\underline{\lim_n} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

又$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$与$k$无关，因而可设$k=1$故

$$\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \underline{\lim_n} A_n$$

证毕

由此可见：对放大集列

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n。$$

又对收缩集列，同样可证$\lim\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$。

自然，非单调集列也可以是收敛的，如在最后的例子中，它是非单调的，然而它又是收敛集列。

在以上的讨论中集合的联与交的运算性质都是成对出现的。这种成对的性质称为对偶性质。由于性质的对偶性，我们从一个立即可得出另一个。这种推断的方法叫对偶原理。对偶原理在点集论及其应用中扮演着极其重要的角色。

§1.2 集合的映照

1.2.1 映照的概念

在数学分析中，函数概念是这样引入的：设M是空间Ω中的一个点集，如果对于每一个点$x \in M$，有一个确定的数$y = f(x)$与之对应，则称在点集M上定义了一个函数f。这里M叫做函数的定义域，而把函数值的集合Y叫做函数的值域。

现在用任何属性的集合来代替前面的点集与数集，就得到函数的一般概念。

设M与N为任意两个集合，如果对于M中的每一个元素x，在N中有一个且只有一个元素y与之对应，则称由集合M到集合N定义了一个映照f。记为

$$f: M \to N$$

对于任何属性的集合，我们使用“映照”来代替“函数”。特别

M为点集，N为实数集合R，这时的映照就是我们所熟知的函数。

在映照f：$M\to N$下，对于$a\in M$，其对应元素$b\in N$，记为$b=f(a)$，b叫做a的像，而把集合

$$f^{-1}(b)=\{a \mid a\in M,\ f(a)=b\in N\}$$

称为元素b的原像，它是M中其像为b的一切元素的集合。

若$A\subseteq M$，集合

$$f(A)=\{f(a) \mid a\in A\}$$

称为集合A的像，若$B\subseteq N$，集合

$$f^{-1}(B)=\{a \mid a\in M,\ f(a)\in B\}$$

称为集合B的原像，它是M中其像属于B的一切元素的集合。

如果$f(M)=N$，则称f是$M\to N$上的映照。

如果$f(M)\subseteq N$，则称f是$M\to N$中的映照。

显然$M\to N$上的映照为$M\to N$中的映照。

如果f：$M\to N$上，又

$$\forall b\in N\to f^{-1}(b)=a\in M$$

则称f为$M\to N$的一一映照，这里符号"$\forall$"表示"每一个"。

例如，

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

这里f：$(0,1)\to(0,1)$上的一一映照。但

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

它是$(-\infty,\ +\infty)\longrightarrow(-\infty,\ +\infty)$中的映照，而且是非一一的。

又如，设M为$[0,\ 1]$上的函数集合，其中每一函数都具有连续导函数。N为连续函数集合。对$f(x)\in M$，有

$$\frac{d}{dx}f(x)=g(x)\in N$$

映照$\frac{d}{dx}$：$M\to N$上，且为一一映照。这时

$$f(x)=\int_0^x g(x)dx\in M$$

上一节中所说的集列$\{A_n\}$也是一个映照，

$$f:Z^+\to \mathbf{A}$$

其中A为集类，$A_n\in\mathbf{A}$，特别，数列$\{a_n\}$它是映照

$$f:Z^+\to R。$$

1.2.2 映照的性质

映照具有下列基本性质：

(1) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

(2) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

(3) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

(4) 若f为一一映照，则

$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$$

对于（4）若f非一一映照，结论一般是不成立的，此可由下例见之：

设f为平面上向x轴的投影，今

$$A=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\quad y=0\}$$
$$B=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\quad y=1\}$$

并不相交，但它们的像却互相重合。

现在来证明(2)

设$x\in f^{-1}(A\cap B)$，由于$f(x)\in A\cap B$，因而

$$f(x)\in A,\quad f(x)\in B。$$

有
$$x\in f^{-1}(A),\quad x\in f^{-1}(B)$$

故
$$x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$

反之设$x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$，由于

$$x\in f^{-1}(A),\quad x\in f^{-1}(B)$$

因而
$$f(x)\in A,\quad f(x)\in B$$