有限元超收敛理论

朱超定 林群 著

有限元
超收敛理论

朱超定　林　群　著

朱超定

湖南科学技术出版社

·本研究项目受国家自然科学基金资助

有限元超收敛理论

朱超定　林　群　著

责任编辑：胡海清

※

湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

※

1989年10月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米　1/32　印张：10　插页：（精）4　字数：264,000
印数：（精）1——500　（平）1——900

（精装）ISBN 7—5357—0595—2 / O·68　定价：7.50元

（平装）ISBN 7—5357—0597—9 / O·69　定价：5.70元

地科89—32

序 言

“超收敛”，或者“高精度算法”，是当今有限元理论发展中一个十分活跃的课题，其意义是明显的。当我们求解一个问题时，可能存在若干种解法：有的要算得很长很长、有的很快就能算出来。也就是说；有的方法精度低，有的方法具有高精度。

在解偏微分方程时，冯康创造的有限元方法实践简便，并有起码的精度。本书的主题则是如何提高它的精度。我们的着眼点在于建立“好”的单元剖分。简单地说，只要剖分能做到“均匀”或“几乎均匀”（局部的或者分片的），就有简便的方法来提高有限元解的精度。这种结论简单明确，但其证明细节则令人生畏，但是，如果读者集中注意力于简单区域（如矩形或三角形）和简单模型（如Poisson方程），则证明的思想将水落石出。简言之，高精度的诀窍来自分部积分，但是还要将所出现的单元边界积分变回面积分，这要花些工夫，这也是为什么要采用特殊剖分的原因。

本书是朱起定教授在多次授课和讲学的基础上整理而成的。多数内容属于他个人的研究成果——这些成果在超收敛专题中居于世界前沿和国际首创。此书也包括他的同事陈传淼教授，还有他们的学生，特别是谢锐锋、陈宏森、李波、黄云清、周爱辉等的大量工作。没有他们的创造和发展，超收敛课题不可能形成今天这样的局面。

但是，总的说，本书仅仅是高精度方法中的一角，新思想、新方法层出不穷。书中还有许多没有解决的问题，例如，对剖分的限制是否可再放松、是否可扩张到非标准的有限元、是否可应用于其它偏微分方程，特别是：是否有充分的数值实验。本书的可能作用就是将读者引向这些问题，以便将高精度算法推向更高层次。

林 群

1988年11月于北京

目　录

第一编　基础理论

第二编 专门理论

第一篇　基础理论

第一章　预备知识

§1　Sobolev空间

这里仅作一点简略介绍，详细内容参见Adams[1]。

§1.1　空间$W^{m,p}(\Omega)$

设$\Omega\subset R^n$为一开域。对任何整数$m\geqslant 0$，任意实数p，$1\leqslant p\leqslant\infty$，考虑函数空间

$$W^{m,p}(\Omega)=\{v:\quad D^\alpha v\in L^p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m\},$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$为整指标，$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$，$D^\alpha v$表示$v$的分布导数。这个空间依范数

$$\|v\|_{m,p,\Omega}=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha v|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\qquad 1\leqslant p<\infty.$$

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|\leqslant m}\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha v(x)|\},\ \text{如}p=\infty$$

构成一个Banach空间，这种Banach空间，我们叫做Sobolev空间。有时我们也采用半范数

$$|v|_{m,p,\Omega}=\sum_{|\alpha|=m}\Big(\int_\Omega|D^\alpha v|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\ \text{如}\quad 1\leqslant p<\infty.$$

$$|v|_{m,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|=m}\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha v(x)|\},\ \text{如}p=\infty,$$

对于R^n上每个函数v，记

$$\operatorname{supp}(v)=\overline{\{x\in\Omega;\ v(x)\neq 0\}},$$

并称之为函数v的支集（support）。支集属于Ω的紧集的一切无限次可微函数的全体记为$\mathscr{D}(\Omega)$，即

$$\mathscr{D}(\Omega)=\{v;\ \operatorname{supp}(v)\subset\Omega\text{紧},\ v\in C^\infty(\Omega)\}.$$

$\mathscr{D}(\Omega)$按范数$\|v\|_{m,p,\Omega}$的闭包记为$W_0^{m,p}(\Omega)$，显然

$$W_0^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega).$$

一般，$W_0^{m,p}(\Omega)$是$W^{m,p}(\Omega)$的一个真闭子空间，记

$$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega),$$

$$H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega).$$

$\|\cdot\|_{m,\Omega}=\|\cdot\|_{m,2,\Omega}$，$|\cdot|_{m,\Omega}=|\cdot|_{m,2,\Omega}$，于是$H^m(\Omega)$依范数$\|\cdot\|_{m,\Omega}$构成一个Hilbert空间，$H_0^m(\Omega)$为其闭子空间。

为简便计，我们有时将以上空间中的范数、半范数简记为$\|\cdot\|_{m,p}$，$|\cdot|_{m,p}$，$\|\cdot\|_m$，$|\cdot|_m$等等。

记X，Y为两个赋范空间，记号

$$X\hookrightarrow Y$$

表示X为Y的线性子集且为连续的内射。如果X包含在Y中且由X到Y的内射是一个紧致的内射，那么记为

$$X\overset{c}{\subset}Y.$$

最后，对整数$m\geqslant 0$和任何数$\alpha\in(0,1]$，用$C^{m,\alpha}(\bar\Omega)$表示$C^m(\bar\Omega)$中所有m阶导数满足α阶Hölder条件的函数的全体，这时赋以范数

$$\|v\|_{C^{m,\alpha}(\bar\Omega)}=\|v\|_{m,\infty,\Omega}+\max_{0\leq|\beta|\leq m}\sup_{\substack{x,y\in\bar\Omega\\ x\neq y}}\frac{|D^\beta v(x)-D^\beta v(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

其中$|x-y|$表示x，$y\in R^n$的欧氏距离，β为重指标，

易证 $C^{m,\alpha}(\bar\Omega)$为一个Banach 空间。

最后注意，如用$\hat{C}^\infty(\Omega)$表示$C^\infty(\Omega)$以$W^{m,p}(\Omega)$（$1\leqslant p<\infty$）的范数有限的函数全体，那么可证$\hat{C}^\infty(\Omega)$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠。

注意 一般的泛函空间及其述语，我们服从通常的记法，本文不另行说明.

§1.2 Sobolev恒等式（见Sobolev[1]）

设$x_0\in\Omega$，称Ω关于x_0为星形的，如果对任何$x\in\Omega$,联线x_0x全含在Ω内.

我们有如下重要定理.

定理1.1 （Sobolev积分恒等式）设$\Omega\subset R^n$为有界开域，且存在闭球$S\subset\Omega$，使Ω关于S中每一点都是星形的，$u\in C^m(\Omega)$，那么$u(x)$可以表成如下形式

$$u(x)=\sum_{|\alpha|\leq m-1}l_\alpha(u)x^\alpha+\int_\Omega\frac{1}{r^{n-m}}\sum_{|\alpha|=m}Q_\alpha(x,y)D^\alpha u(y)dy. \tag{1.1}$$

其中$l_\alpha(u)$是$C^m(\Omega)$上的线性泛函：

$$l_\alpha(u)=\int_\Omega\zeta_\alpha(y)u(y)dy. \tag{1.2}$$

而$\zeta_\alpha(y)$是y的连续有界函数，$|\alpha|\leq m-1$，r是点x，y的欧氏距离：

$$r=|x-y|=\left(\sum_{j=1}^n|x_j-y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ x,y\in\Omega, \tag{1.3}$$

且$Q_\alpha(x,y)$，$|\alpha|=m$，是x和y的有界的无限次可微的函数.

定理1.2 设Ω满足定理1.1的条件，$u(x)\in C^m(\Omega)$，则有

$$D^\beta u(x)=\sum_{|\alpha|\leq m-1}\beta!\binom{\alpha}{\beta}l_\alpha(u)x^{\alpha-\beta}$$

$$+\int_\Omega\frac{1}{r^{n-m-|\beta|}}\sum_{|\alpha|=m}N_\alpha^\beta(x,y)D^\alpha u(y)dy, \tag{1.4}$$

其中$N_\alpha^\beta(x,y)$是x,y的有界可测函数，$|\beta|<m$.

定理1.1的证明

不妨设球S的中心在原点，半径为a，任给$x\in\Omega$，考虑锥

$$C_x=\{\lambda x+(1-\lambda)y:y\in S,\ 0\leq\lambda\leq1\}\subset\Omega. \tag{1.5}$$

考虑球坐标变换

$$\bar{y}_1 = r\sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1,$$
$$\bar{y}_2 = r\sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1,$$
$$\bar{y}_3 = r\sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_3\cos\theta_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\bar{y}_n = r\cos\theta_{n-1}.$$
$$\theta_1 \in [0,2\pi],\ \theta_i \in [0,\pi],\ i=2,\cdots,n-1$$

于是

$$d\bar{y} = r^{n-1}drd\sigma,\ d\sigma = \sin^{n-2}\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_2 d\theta_1\cdots$$

$d\theta_{n-1}$任给$y \in C_x$，有

$$y = x + \bar{y},$$
$$\bar{y}_i = r\sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_i\cos\theta_{i-1},$$
$$\cos\theta_0 = \sin\theta_1, \qquad i = 1,2,\cdots,n-1.$$

对于任何函数$f(y)$可表为

$$f(y) = \bar{f}(x;r,\theta),\theta = (\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}), \tag{1.6}$$

于是

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\mu_i,$$

$$\mu_i = \frac{\bar{y}_i}{r} = \frac{y_i - x_i}{r} = \cos(r,y_i). \tag{1.7}$$

现在要找一个函数$\chi(y) = \bar{\chi}(x;r,\theta)$使

(i) $\chi(y) \in C^\infty(\Omega)$.

(ii) $\dfrac{\partial^k}{\partial r^k}\bar{\chi}(x;0,\theta) = 0,\ 0 \leqslant k < n-1$.

(iii) $\dfrac{\partial^k}{\partial r^k}\bar{\chi}(x;\infty,\theta) = 0,\ \forall k \geqslant 0$.

(iv) $\chi(y) \equiv 0,\ y \notin C_x$.

作

$$\omega_a(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{|x|^2}{|x|^2 - a^2}\right), & |x| < a. \\ 0, & |x| \geqslant a. \end{cases}$$

令

$$f_a(y)=\omega_a(y)=\bar{f}_a(x;r,\theta),$$

于是　$f_a(y)\in C^\infty(R^n)$且

$$f_a(y)=0,\ \text{当}y\notin C_x. \tag{1.8}$$

令

$$\bar{\chi}(x;r,\theta)=\frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\int_r^\infty \bar{f}_a(x;s,\theta)s^{n-1}ds, \tag{1.9}$$

由$f\in C^\infty(R^n)$和以上条件易知（i）成立。由于式中含有因子r^{m-1}可见(ii)成立。由于$\mathrm{supp}(f_a(y))\subset C_x$可知(iv)成立从而(iii)也成立。

用ω表示以x为顶点的锥C_x的立体角，那么

$$\begin{aligned}&\int_\omega\int_0^\infty \bar{f}_a(x;r,\theta)s^{n-1}dsd\sigma\\ &=\int_{R^n}f_a(y)dy\\ &=\int_{R^n}\omega_a(y)dy\equiv C_0=\text{const}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

此处C_0与r,θ以及x均无关，令

$$\begin{aligned}V(x;r,\theta)=\ &\bar{u}\frac{\partial^{m-1}\bar{x}}{\partial r^{m-1}}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\frac{\partial^{m-2}\bar{\chi}}{\partial r^{m-2}}+\cdots\\ &+(-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}\bar{u}}{\partial r^{m-1}}\chi,\end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\bar{u}\frac{\partial^m\bar{\chi}}{\partial r^m}+(-1)^{m-1}\frac{\partial^m\bar{u}}{\partial r^m}\chi. \tag{1.11}$$

两边对r积分并注意条件(ii)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\partial v}{\partial r}dr&=\int_0^\infty\left[\bar{u}\frac{\partial^m\chi}{\partial r^m}+(-1)^{m-1}\frac{\partial^m\bar{u}}{\partial r^m}\chi\right]dr\\ &=V(x;\infty,\ \theta)-V(x;0,\theta)\\ &=-u(x)\int_0^\infty\bar{f}_a\cdot s^{n-1}ds.\end{aligned} \tag{1.12}$$

两边对θ积分

$$u(x) = -C_0^{-1}\int_\omega\int_0^\infty\left[\bar{u}\frac{\partial^m\bar{\chi}}{\partial r^m} + (-1)^{m-1}\frac{\partial^m\bar{u}}{\partial r^m}\bar{\chi}\right]drd\sigma$$

$$= -C_0^{-1}\int_{C^*}\bar{u}\frac{\partial^m\bar{\chi}}{\partial r^m}\frac{dy}{r^{m-1}} + \frac{(-1)^m}{C_0}\int_{C^*}\frac{\partial^m\bar{u}}{\partial r^m}\bar{\chi}\frac{dy}{r^{m-1}} \tag{1.13}$$

但是

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \bar{f}_a(x;s,\theta)s^{n-1}ds = -\bar{f}_a(x;r,\theta)r^{n-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\bar{f}_a = \sum_{i=1}^n\frac{\partial f_a}{\partial y_i}\mu_i = \sum_{i=1}^n\frac{\partial\omega_a(y)}{\partial y_i}\mu_i,$$

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k}\bar{f}_a = \sum_{|\alpha|=k}C_\alpha D_y^\alpha f_a\cdot\mu^\alpha$$

$$= \frac{1}{r^k}\sum_{|\alpha|=k}C_\alpha D_y^\alpha f_a\cdot y^\alpha. \tag{1.14}$$

此处$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$为整指标，$y^\alpha=\prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i}$，而

$$\mu^\alpha = \prod_{i=1}^n\mu_i^{\alpha_i},\ \mu_i=\cos(r,\ y_i),$$

于是有

$$\frac{\partial^m\bar{\chi}}{\partial r^m} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=1}^m\binom{m}{j}\frac{\partial^{m-j}r^{m-1}}{\partial r^{m-j}}\frac{\partial^j}{\partial r^j}\int_r^\infty\bar{f}_a(x;s,\theta)s^{n-1}ds$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j=1}^m\binom{m}{j}r^{m-1-(m-j)}\frac{\partial^{j-1}}{\partial r^{j-1}}\left[\bar{f}_a(x;r,\theta)r^{n-1}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^m\sum_{i=0}^{j-1}A_{ij}r^{n+i-1}\frac{\partial^i}{\partial r^i}\bar{f}_a\ (A_{ij}\text{为常数})$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m-1}r^{n-1}(-C_0)\zeta_a(y)x^\alpha, \tag{1.15}$$

其中

$$\zeta_\alpha(y) = -\frac{1}{C_0}\sum_{\substack{\alpha\leq\beta\\|\beta|\leq m-1}} C_\alpha^\beta D_y^\beta f_\alpha\cdot y^{\beta-\alpha}.$$

C_α^β为常数。

$\alpha\leqslant\beta\Longleftrightarrow\alpha_i\leqslant\beta_i$, $i=1,2,\cdots,n$,

将(1.15) 代入(1.13) 右端第一个式子。

$$-C_0^{-1}\int_{C_x}\bar{u}\frac{\partial^m\bar{\chi}}{\partial r^m}\frac{dy}{r^{n-1}} = \sum_{|\alpha|\leq m-1} l_\alpha(u)x^\alpha,$$

又

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial^m\bar{u}}{\partial r^m}\bar{\chi} = \frac{1}{r^{n+m-1}}\bar{\chi}\sum_{|\alpha|=m} C_\alpha\cdot(y-x)^\alpha D^\alpha u(y)$$

$$=\sum_{|\alpha|=m}\frac{C_\alpha}{r^{n+m-1}}\frac{r^{m-1}}{(m-1)!}\left(\int_r^\infty \bar{f}_\alpha\cdot s^{n-1}ds\right)r^m\mu^\alpha D^\alpha u(y)$$

$$=\frac{1}{r^{n-m}}\sum_{|\alpha|=m} C_0(-1)^{m-1}Q_\alpha(x,y)D^\alpha u(y).$$

其中$\mu^\alpha = r^{-m}(x-y)^\alpha$,

$$Q_\alpha(x,y) = \frac{(-1)^{m-1}C_\alpha C_0^{-1}\mu^\alpha}{(m-1)!}\int_r^\infty \varpi_\alpha(x;s,\theta)s^{n-1}ds,$$

$$|\alpha| = m.$$

显然$Q_\alpha(x,y)$是Ω上有界可测的函数。

定理1.2 的证明可以直接从表达式(1.2),(1.3)得到，这里当然利用了$Q_\alpha(x,y)$的光滑条件。

§1.3 Sobolev嵌入定理

利用Sobolev嵌入定理和Kondrasov定理有如下一些结果(见Adams[1])。

对所有整数$m\geqslant 0$和所有的$p\in[1,\infty]$，有

$$
\left.
\begin{aligned}
&W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),\ \frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n},\ \text{如}m<\frac{n}{p},\\
&W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}(\Omega),\ \text{对所有}q\in[1,\infty),\ \text{如}\ m=\frac{n}{p},\\
&W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,m-(n/p)}(\bar{\Omega}),\ \text{如}\frac{n}{p}<m<\frac{n}{p}+1,\\
&W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}),\ \text{对所有}0<\alpha<1,\ \text{如}m=\frac{n}{p}+1,\\
&W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,1}(\bar{\Omega}),\text{如}\frac{n}{p}+1<m。
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.16}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&W^{m,p}(\Omega)\overset{c}{\subset}L^{q}(\Omega),\ \text{对所有}1\leqslant q<p^*,\\
&\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n},\ \text{如}m<\frac{n}{p},\\
&W^{m,p}(\Omega)\overset{c}{\subset}L^{q}(\Omega),\ \text{对所有}q\in[1,\infty),\text{如}m=\frac{n}{p},\\
&W^{m,p}(\Omega)\overset{c}{\subset}C(\bar{\Omega}),\ \text{如}\frac{n}{p}<m。
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.17}
$$

$$
\begin{aligned}
W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}(\mathrm{bdry}\,\Omega)\quad &\text{当}mp<n\text{且}p\leqslant q\leqslant(n-1)p/(n-mp)。\\
&\text{当}mp=n\text{则}p\leqslant q<+\infty
\end{aligned}
$$

这些定理，在Ω可表成有限个满足定理1条件的区域的并时，可直接利用Sobolev恒等式得到，一般区域，可参见Adams[1]

§1.4 对多项式空间的商范数及Bramble-Hilbert 引理

设$\Omega\subset R^n$为开域，具Lipschitz连续的边界，从而Ω有界，考虑商空间，

$$W^{m,p}(\Omega)/P_k(\Omega)。$$

这里$P_k(\Omega)$表示Ω上一切k次多项式的全体。商空间的元素

$$\dot{u}\in W^{m,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$$

的范数定义为

$$\|\dot{u}\|_{m,p,\Omega}=\inf_{v\in P_k(\Omega)}\|u+v\|_{m,p,\Omega}。\tag{1.18}$$

此处$\dot{u}$表示$W^{m,p}(\Omega)$的一个子集，

$$\dot{u}=\{w:\ w-u\in P_k(\Omega),\ w\in W^{m,p}(\Omega)\}.$$

u叫$\dot{u}$的代表元．显然这样的商空间仍构成一个Banach空间（参见一般泛函分析的书）．

我们有如下重要定理：

定理1.3 存在正常数$C(\Omega)$，使得

$$\inf_{v\in P_k(\Omega)}\|u+v\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant C(\Omega)|u|_{k+1,p,\Omega},\tag{1.19}$$

$$\forall u\in W^{k+1,p}(\Omega).$$

即$\|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant C(\Omega)|v|_{k+1,p,\Omega}$．

$$\forall \dot{v}\in W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega).$$

证明 记$N=dim(P_k)$ （P_k的维数），并设$f_i\in P_k^*(\Omega)$〔注〕，$i=1,2,\cdots,N$为一组基，使得

$$\forall p\in P_k(\Omega),p=0\text{当且仅当} f_i(p)=0,i=1,2,\cdots,N,\tag{1.20}$$

由Hahn-Banach定理，可将f_i连续延拓到$W^{k+1,p}(\Omega)$上，不难验证

$$\|v\|=|v|_{k+1,p,\Omega}+\sum_{i=1}^{N}|f_i(v)|,\ v\in W^{k+1,p}(\Omega),$$

是一范数．事实上若$\|v\|=0$，从而$|v|_{k+1,p,\Omega}=0$，由Sobolev恒等式可证v在Ω中每个球内为一k次多项式从而$v\in P_k(\Omega)$，由(1.20)并注意

$$f_i(v)=0,\ i=1,2,\cdots,N,$$

得$v=0$．

我们只须证明存在常数$C=C(\Omega)$，使

$$\|v\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant C\|v\|,\ \forall v\in W^{k+1,p}(\Omega),\tag{1.21}$$

不等式(1.19)可从(1.21)推得；实际上，任给$v\in W^{k+1,p}(\Omega)$，取$q\in P_k$使

$$f_i(v+q)=0,\ 1\leqslant i\leqslant N,$$

〔注〕 $P_k^*(\Omega)$为$P_k(\Omega)$的对偶空间

那么

$$\inf_{p\in P_k}\|v+p\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant\|v+q\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant C|v|_{k+1,p,\Omega}.$$

若(1.21)不成立，那么存在序列$\{v_l\}\subset W^{k+1,p}(\Omega)$，使

$$\|v_l\|_{k+1,p,\Omega}=1,\quad l=1,2,\cdots$$

$$\lim_{l\to\infty}\|v_l\|=0. \tag{1.22}$$

因为$\{v_l\}$为$W^{k+1,p}(\Omega)$的有界集，由Kondrasov定理（当$1\leqslant p<\infty$，见(1.17)）或Ascoli定理（当$p=\infty$），$\{v_l\}$有子列不妨设为它本身在$W^{k,p}(\Omega)$中收敛于某函数$v\in W^{k,p}(\Omega)$。由（1.22）和范数$\|\cdot\|$的表达式

$$\lim_{l\to\infty}|v_l|_{k+1,p,\Omega}=0,$$

故$\{v_l\}$为$W^{k+1,p}(\Omega)$中的基本列，但$W^{k+1,p}(\Omega)$为Banach空间，故$\{v_l\}$在$W^{k+1,p}(\Omega)$中收敛于v，从而

$$\|v\|=\lim_{l\to\infty}\|v_l\|=0,$$

故$v=0$，但与$\|v_l\|_{k+1,p,\Omega}=1$矛盾。

推论1 （Bramble-Hilbert引理）令Ω为具有Lipschitz连续边界的R^n中的开子集。设f为空间$W^{k+1,p}(\Omega)$上的连续线性泛函，具有性质

$$f(p)=0,\quad\forall p\in P_k,$$

则存在一个常数$C=C(\Omega)$，使得

$$|f(v)|\leqslant C\|f\|^*_{k+1,p,\Omega}|v|_{k+1,p,\Omega}.$$

其中$\|\cdot\|^*_{k+1,p,\Omega}$为$W^{k+1,p}(\Omega)$共轭空间的范数，而$P_k$表示全体$k$次多项式。

推论2 （Bramble-Hilbert引理推广形式）在Ω具Lipschitz边界条件下，如$q(v)$为$W^{k+1,p}(\Omega)$上的连续半范，满足

$$q(p)=0,\quad\forall p\in P_k(\Omega),$$

那么存在与q有关的常数C，使

$$|q(v)|\leqslant C|v|_{k+1,p,\Omega},\quad\forall v\in W^{k+1,p}(\Omega).$$

推论2是推论1的自然推论，只证后者。注意对任给$p\in P_k$，有