第26篇　化工系统工程

编写人　梁玉衡

审校人　陈敏恒

26.1 基 本 概 念

26.1.1 系统工程的基本概念

系统工程是一门处于发展途中的技术科学。系统工程的概念源于实践。在小规模生产的条件下，系统的概念并不重要；而现代化的大生产是一种大规模的社会活动，它所涉及的内容和规模、科研和设计、组织和管理等问题，以及它所要达到的目标都发生了根本的变化。因此，对整个系统进行综合的，定量的研究就成为人们面临的新课题。

系统工程的研究始于30年代，最初应用于电工系统。第二次世界大战期间，系统工程的方法在解决军事问题中得到了实际的应用。50年代前后，系统工程方法开始引起人们的重视，到了60年代以后，系统工程的方法开始推广移植到工业、农业、交通运输、规划、宇航技术等各个领域，用来解决：技术、经济发展的预测；系统的最优设计和最优控制；系统的组织和管理等一系列问题。

一个现代化的大型企业是由许多单元，如分厂、车间、工段、班组所构成的一个多层次、多序列的网络系统。系统工程的任务是从系统的整体出发，设计一个总体最优方案，依此来组织人力、财力和物力，以便在最短时间、以最佳方式达到完成规定任务的目的。系统工程的方法是运用信息论、控制论、应用数学以及电子计算技术，对系统整体进行定量的考察、着重研究组成系统的各单元相互之间的关系，各个单元对系统整体的作用，用数学模型描述系统的特性，对系统进行数学模拟，研究使系统实现最优化所必须具备的条件。最优化是系统工程的基本思想；信息处理则是系统工程研究的中心课题。对于一个大型系统的研究，系统工程师的作用在于研究系统的结构，对系统进行分析，建立系统的模型，对系统进行模拟，以便提出系统整体最优化的方案。

下面简要地说明本篇常用的一些名词、术语的函义。

(1) 对象

任何一个被研究或被控制的系统称为对象。对象可以是完成一个特定操作的一个单元或设备，也可以是由一些化工单元和设备按照一定要求组成的一个化工过程。

(2) 过程

按预定或计划好的方式动作的一个系统或者一系列有规律的动作称为过程，例如炼油过程或化学制造过程。在化工中，最基本的过程是原子分子的运动、碰撞、分解和化合等微观过程。当这些微观过程的观测时间很长、空间很大时，其期望值可作为宏观现象的特征，其速度和平衡关系便可用数学关系式表示，这样就构成了流动、热量质量传递和化学反应等基本过程。如果将产生基本过程的结构作为单元的结构，则确定基本过程的形成方式，就能表现单元过程的特性；如果单元过程的组合方式以工艺流程给出时，则可确定化工系统的特征。

(3) 系统

系统是指许多基本单元按某种目标构成的整体，或者说是一组相互关联的事物、性质或某种关系。系统具有特定的功能；系统可按照人们的实际要求进行划分；系统的结构，如整

个系统与各子系统之间、各子系统之间以及系统的功能与系统的内部结构和参数之间的关系都非常复杂，并存在不确定性和竞争的因素。

(4) **子系统**

任何一个系统都是由比它小的系统所组成，而任何一个系统本身也是更大系统的一个组成部分，所以把组成系统的次一级较小的系统称为子系统。在化工系统中，最基本的子系统是单元设备和单元过程，它有特定的输入、输出和外扰。单元设备和单元过程的最优设计和最优控制是化工系统最优设计和最优控制的基础。

(5) **状态**

系统的状态表示系统在某一给定条件下所具有的特性。定态系统的状态在初始暂态或扰动消失以后，系统中每一点的状态均不随时间而变。动态系统的状态是表示系统特性的最少的一组变量，它包含了系统历史的足够信息，依此可以计算系统的未来特性。只要知道$t=t_0$时这一组变量值和$t \geq t_0$时的输入，便可完全确定动态系统在任何$t \geq t_0$时刻的特性。亦即，动态系统在时间t的状态是由t_0时的状态和$t \geq t_0$时的输入唯一确定的，而与t_0前的状态和输入无关。

(6) **变量和变量的分类**

所谓变量是由一组已知量表示未知量所用的符号，通常是某一函数的定义域。变量值表征系统运行所需要的条件，它反映了系统所处的状态，其间的关系构成了描述系统特性的状态方程，即系统的数学模型。一个系统包含种种变量，如图1-1所示。如果按变量的功能分类，有：1.控制变量，又称操作变量，设计变量或决策变量，它可以由设计人员按照系统的

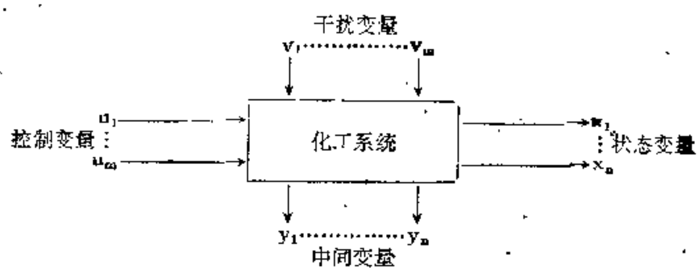


图 1-1 化工系统的变量

目标选取适当的数值，用来描述系统的特性。可变的控制变量个数称为自由度，自由度不能超过变量总数与状态方程数之差，并且控制变量的取值往往受到一定约束条件的限制；2.干扰变量，表示外部系统对系统施加的影响，有可测而不可控制的变量（确定性干扰）和不可测、不可控的（随机干扰）变量；3.状态变量，描述系统所处状态的特征，通过状态方程相关联，其值不能自由选择，取决于控制变量值，状态变量的个数表示系统的阶数；4.中间变量，指为了描述系统的特性，在评价过程中引入的变量。在这些变量中，控制变量和干扰变量属于输入变量；状态变量和中间变量属于输出变量。如果按照变量的数值特征，又可将变量区分为：1.确定性变量，指取值固定的变量；2.随机变量，它并不是自变量，而是样本空间内满足一定条件的实函数，其值通过随机试验加以确定。此外还可以将变量区分为：1.连续变量，它是在给定的时间和空间范围内连续变化的变量；2.离散变量，它只能在给定的时间和空间范围内取某些特定值。最后应注意，变量不同于参数，它是描述系统输入、输出特征的信息，如描述压力、温度、流量、浓度及时间、空间位置的变量；而参数则用于描述系统内部结构和传递特性，如阻力系数、给热系数、传质系数、反应速度常数等均属于参数，

参数可以是常数，也可以是函数，其变化可以是线性的，也可以是非线性的。

(7) **状态空间**

由状态变量或向量所构成的空间称为状态空间，例如，状态向量x_1，x_2，……，x_n组成n维空间，任何状态都可用状态空间中的一个点来表示。

(8) **再循环系统**

再循环是系统结构中的一种普遍特性，许多实际的系统都是再循环系统。化工系统是物料、能量或其他信息流的再循环系统。例如，在一个大型的化工装置中，各种物流、能量和信息来回传送，形成许多再循环回路，整个装置就是一个有再循环网络系统。

(9) **系统的分析**

系统的分析是指系统的结构已定，数学模型已知，在电子计算机上进行模拟，从而预测该系统在不同条件下的性能和行为。

(10) **系统的合成**

系统合成亦称系统综合，是指如何按一定的目标应用各种数学方法进行化工系统的最优综合。

(11) **系统的分解**

按照分割原理将一个结构已定的系统分割成一些更小的次一级系统的方法称为系统的分解。更具体地说，系统的分解包含了将系统的总目标分解成更小的系统的目标，或者将阶数、维数很大的系统的数学模型分解成阶数、维数较小的子系统的数学模型两种意义。

(12) **系统的数学模型**

对简化了的系统作出的数学描述称为数学模型。数学模型的特点是简化，简化的基础是与实际系统之间的等效性，简化的标志是模型参数的多寡。

(13) **系统的模拟**

对系统的一种物理或数学的逼近称为系统的模拟。

(14) **线性系统**

系统的数学模型用线性数学关系式表示的系统称为线性系统。这里所指的线性是指系统变量之间的关系而不是指系统的参数，尽管一个系统相对于状态变量来说是线性的，但系统中的参数却可以以非线性形式出现，例如，线性微分方程中的参数是某个变量的函数时，但这种微分方程仍然是线性微分方程。线性系统遵循迭加原理和互易原理。

(15) **非线性系统**

系统的数学模型是以非线性数学关系式表示的系统称为非线性系统。迭加原理不适用于非线性系统。非线性问题的求解，往往要对非线性模型作线性化处理，以近似的线性模型替代非线性模型，进而反复求解近似的线性模型，最后逼近非线性问题的解。

(16) **定态和动态系统**

系统的特性与时间无关的系统称为定态系统。系统的特性随时间而变的系统称为动态系统。如果动态系统是线性的，并由定常的集中参数组成，则系统可用线性常微分方程予以描述，这类系统称为线性定常系统。如果系数是时间的函数，则称为线性时变系统。

26.1.2 化工系统工程的基本问题

传统的化学工程方法以单元操作概念为基础，化工装置的设计仅限于各个单元过程和设备的计算，并不涉及如何把单元过程和设备组成一个完整系统的有关工程问题。随着技术的

发展，石油、化学工业发生了深刻的变化：

1. 现代化的石油，化学工业实现了综合生产，采用了联合企业的生产方式。对于一个大规模的化工联合企业，以往那种仅限于对一个装置或一个单元过程和设备孤立地进行研究、设计、操作管理的传统作法已不能适应要求，而必须将联合企业作为一个整体，对组成系统的各个子系统之间的相互联系和相互作用进行综合的分析和研究，从而保证联合企业高效地运行。

2. 现代化的石油化工装置日趋大型化或超大型化，大型装置能否实现最优设计、最优控制和最优管理，对于装置的投资、安全可靠的生产、产品成本以及环境保护等都有很大的影响，只有通过多个方案的对比、择优选用，才能取得显著的经济效果。

3. 现代化石油化工企业的生产过程实现了连续化、自动化生产，要求整个装置在最优状态下运行。因此，采用以往那种单输入、单输出的调节系统已经不能满足要求，必须结合过程的定态和动态数学模型，采用电子计算机对多变量时变系统进行控制。

4. 随着化学工业原料的不断更迭，流程亦随之不断更新，新的化工产品不断出现，原有的逐级放大技术因工业化周期长、耗费人力、物力多而妨碍了新技术的工业化应用。为了加速技术的发展，增强竞争能力，促使人们寻找和采用新的数学模拟放大技术。

5. 电子数字计算机的普及推广，现代应用数学方法及现代控制论方法在化学工程中的应用，使过去一些无人敢于问津的复杂设计计算及过程控制问题迎刃而解。

鉴于上述原因，促使人们在化工企业的组织管理、生产过程的开发研究、设计中采用新的概念，即系统工程方法来解决企业组织管理、最优设计和最优控制的问题。

从系统工程的观点来看，任何一个化工系统都具有一些共同的特征：

1. 一个化工企业是由企业组织管理系统、生产系统（包括了物流，能量，信息等子系统）、公用工程以及生产辅助、服务系统等组成的一个网络系统。系统的规模庞大、子系统多、各子系统之间的相互关系复杂，而且多数是非线性的。

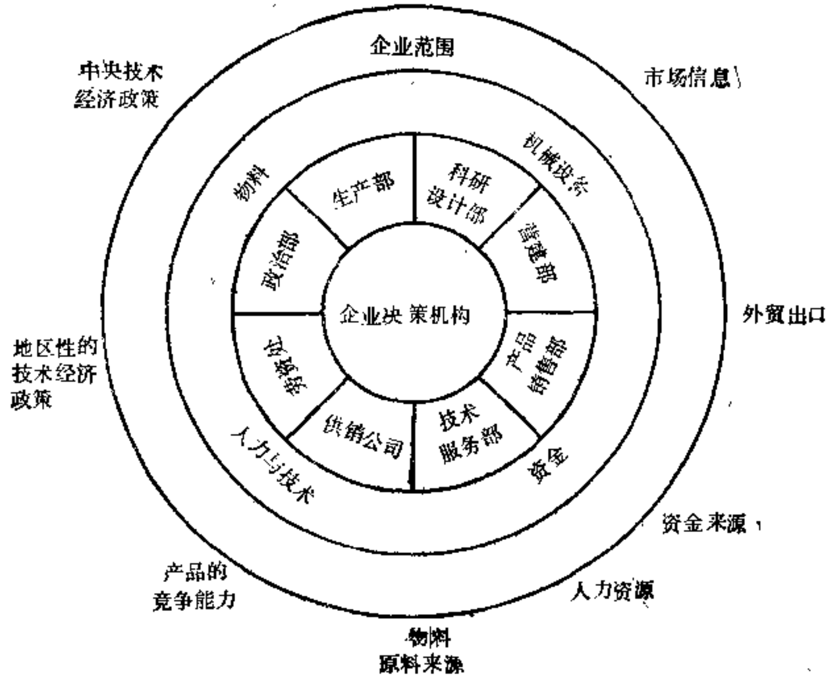
2. 各子系统按一定的目标有机地构成一个整体，各司其职，协同完成规定的任务。在一个化工企业中，除了企业内部各个部门之间构成一个层次分明、统筹分工、相互联系的完整系统外，它还与企业外部的许多因素，如主管部门的政治、经济政策、资源的状况、供求关系等密切相关；构成一个根据外部环境条件的变化不断调整其内部特性的反馈系统。这个系统并非固定不变，而是保持某种动态平衡，同时还包含不确定因素和竞争因素，所以系统的输入在时间、空间或数值上都呈现随机性。如图1-2所示。

3. 由于技术的发展，环境条件的变化，系统的最优化模型并不是完美无缺和固定不变的，在某些情况下，必然会出现新的系统与原有最优系统之间的竞争，或者一些长期运转的系统也必然存在规模增殖或改进的可能性，因此在进行系统最优设计和最优控制时要考虑到这种应变的灵活性。

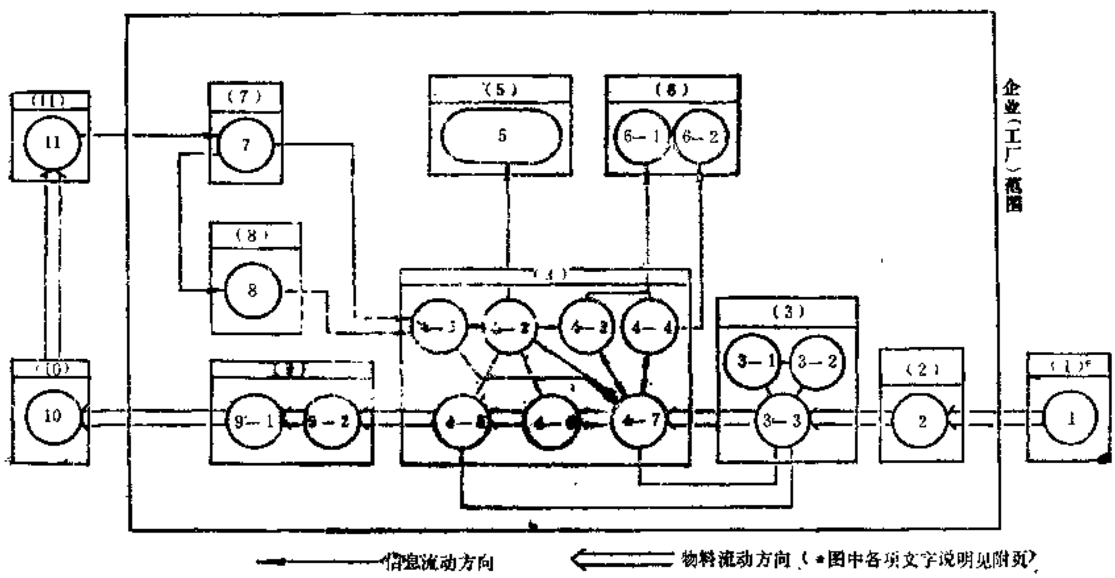
4. 化工系统的最优设计和最优控制以及最优管理要综合运用多种学科，多种专业的知识，要有多种专业人员协同工作。

化工系统工程与化学工程之间的相互关系：

1. 传统的化学工程方法立足于流体流动、传热、传质和化学反应，孤立地研究各个单元操作和设备的特性，很少或甚至不考虑构成一个复杂化工系统时各个单元过程或设备之间的相互组合特性；而化工系统工程则从系统整体出发，既研究组成系统的各个子系统之间的相互影响，又研究整个系统的组合特性。



a 化工系统内部的子系统与外部系统之间的关系



b 化工系统内部各子系统之间的相互关系

图 1-2 化工系统的结构

（1）—输入子系统、1—外部原料，物资供应；
（2）—物料采购子系统、2—采购，收外部物资；
（3）—物料管理子系统、3-1—库存管理、3-2—物料管理、3-3—原料与半成品；
（4）—生产过程子系统、4-1—生产指令、4-2—生产管理、4-3—设备维修、4-4—信息处理、4-5—质量控制、4-6—各车间物料，能量的流动、4-7—生产计划安排与管理；
（5）—企业主管决策机构子系统、5—调整企业远期目标，计划，预算等等；
（6）—财务子系统、6-1—成本会计、6-2企业内支出；
（7）—销售子系统、7—订货安排；
（8）—科研、设计子系统、8—产品设计；
（9）—运输子系统、9-1—入库、9-2—库存；
（10）—输出子系统、10—输送到用户；
（11）—企业外部子系统、11—用户；

2. 传统的化学工程主要研究定态过程特性，而化工系统工程除了研究系统的定态特性外，还要研究系统的动态特性。

3. 传统的化学工程对最优化问题一般只作定性的讨论；而化工系统工程则要对系统的最优化问题作定量的计算，应用最优化原理，对系统作综合平衡，使组成系统的各个分系统能最协调、最有效地运行，此外还要研究系统最优化的灵敏度分析以及可靠性和稳定性问题。

4. 传统的化学工程方法通常与以相似论为基础的物理模拟技术相结合，采用逐级放大的方法解决工业装置的设计问题；而化工系统工程则与计算技术相结合，采用数学模拟方法或者数学模拟和物理模拟相结合的方法，对化工系统进行最优设计并确定最优控制方案。

5. 传统的化学工程所用的数学工具往往限于经典数学方法；而化工系统工程所处理的是多变量系统、时变系统、非线性系统以及有不确定因素和竞争因素的系统的最优化问题，因此涉及更多、更深的数学知识，包括线性代数、微分方程、数理统计和概率论、变分法、最优化方法以及图论、排队论、博奕论、控制论等。

化工系统工程的基本问题：

1. 化工技术发展的预测和决策。应用系统工程的方法，定性和定量地预测化工技术未来的发展趋势，对化工技术发展的路线作出技术经济的评价，估计技术发展带来的经济效益、对于社会发展、能源、资源的利用、环境保护等带来的后果。简言之，是对未来化学工业的发展进行预测，并依此对化学工业的发展方向制订科学的决策。

2. 化工系统的最优设计。亦即按照化工系统的要求，根据给定的输入和输出条件，确定系统的结构，寻求在满足一定约束条件下，使系统的目标函数取极大值或极小值时各个单元过程和设备的最优操作条件；或者对一个系统结构已定的化工系统，根据给定的输入条件，确定在满足一定约束条件下，使系统的目标函数取概大值或根小值的输出条件。

3. 化工系统的最优控制。实现系统的最优控制是指设计一个控制系统，以保证系统稳定在最优操作条件下运行。系统的最优控制可分为两类：对于状态随时间变化的动态系统，最优控制是要寻找使目标函数取极大或极小值的控制系统，从而使系统处于最优状态下运行；对于系统的状态与时间无关的定态系统，最优控制是要确定在满足约束条件的情况下，使目标函数取极大值或极小值的最优操作条件。

4. 企业的组织管理和经营技术。企业的组织管理系统和经营技术通常涉及规划、计划、实施、管理、市场及经济行为的分析、决策等一系列问题，管理系统把人作为系统的组成部分，因而是一个多层次、多目标、具有决策功能的大规模系统。应用系统工程的方法，把系统中的人、机械设备、材料、资金及信息等有限的资源，合理地组织、有效地利用，以便最大限度地发挥各自的作用；同时综合分析系统内在和外界因素的变化，藉此不断地调整企业内部的活动以适应内、外条件的变化，甚至改变系统自身的状态，从而最优地完成预定的目标。

26.1.3 化工系统工程的基本方法

应用系统工程的方法解决化工系统的最优设计和最优控制问题的一般步骤如下：

（1）系统的构成

根据给定的输入条件（如原料）和输出条件（如产品）设计一个化工系统时，首先要收集所有必要的信息，如所有可供选用的技术路线、环境条件、市场信息，然后确定系统的范

围和要求达到的目标，以此作为评价所有可供选择方案的依据。

（2）系统的分析

在一般情况下，往往可以通过几个不同的过程实现同一目标。系统分析的内容包括：立足于系统的特性和整体功能，由系统的输入和输出条件设计各种可能的系统结构方案，并确定最优的系统结构和各子系统的最优操作条件（简称为系统的合成）；或者将结构已定的系统分解为更简单的子系统，并由给定的输入条件确定各个子系统的输出（简称为系统的分解）；此外还有系统的模型化和数学模拟等问题。

（3）模型的辨识和参数估值

根据系统分析提供的系统结构以及系统的输入和输出条件确定系统的模型，进而对模型中的某些未知参数作出估计，以便获得系统最优设计所要求的最终模型。

（4）系统的最优设计

系统的最优设计是根据系统的要求，确定在满足约束条件的情况下，使目标函数取最大值或最小值的最优操作条件。进行最优设计所需的各种数学方法将在26.4一章中作详细介绍。一个化工系统通常都比较复杂，非线性强，包含的变量多，模型的阶数高，还有各种约束的限制，因此最优解的求取往往须借助于迭代技术和电子计算机。

（5）系统最优化的评价

鉴于最优化中使用的模型是在对实际化工系统以及各种不确定因素和竞争因素作出种种简化假定的情况下作出的，由此求得的最优解不能直接付诸实际过程使用，必须对最优化结果进行分析评价，例如需要讨论由于引入简化假定所带来的问题；各个控制变量、参数的变化对过程的影响、单元设备和系统的可靠性、系统定态操作的性质、存在的条件及其稳定操

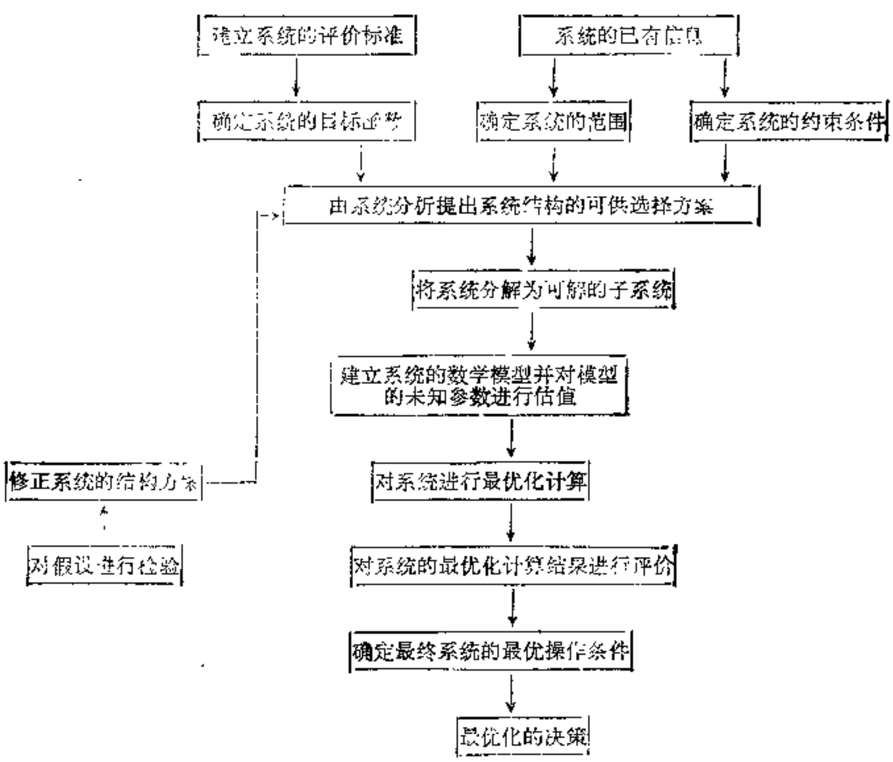


图 1-3　化工系统工程的方法和步骤

作的范围等问题，简称为系统最优化的灵敏度分析、可靠性和稳定性问题，这些都属于系统最优化的评价的主要内容，也是在着手最优控制系统设计之前要做的工作。

（6）系统的最优控制

化工系统在实际进行时，由于外扰的影响，操作条件往往会偏离最优值。系统的最优控制的目的是通过设计一个控制系统，以保证系统稳定性最优条件下运行。化工系统工程解决系统的最优控制目的仅限于提出最优控制的方案，并不包括最优控制的实施。

以解决化工系统的最优设计和最优控制为主要目标所采用的各种方法和步骤，可用图1-3所示简单框图表示。当然这些步骤不是一成不变的，其顺序也不是严格规定的。在某些情况下可能越过某一步骤；而在另外一些情况下，会反复使用某些步骤，方法和步骤本身也具有反馈网络的特性。

参 考 文 献

〔1-1〕 Chestnut. H., "Systems Engineering Methods", John Wiley, 1967.

〔1-2〕 Porter, W. A., "Modern Foundation of Systems Engineering", Mac Millan, 1966.

〔1-3〕 Rudd, D. F., "Strategy in Process Engineering", John Willey, 1968.

〔1-4〕 Williams, T. J., "Systems Engineering for the Process Industries" Mc Graw-Hill, 1962.

〔1-5〕 Katsuhiko OGata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall, 1970.

〔1-6〕 Кафаров, В. В., "Методы Кибернетики в Химии и Химической Технолоэии", Издательсгво《Химия》, 1971.

〔1-7〕 矢木荣，西村肇，"化学プロセス工学"，丸善，1969.

〔1-8〕 松原正一，"プロセスシステム工学"，朝仓，1970.

〔1-9〕 寺野寿郎，"システム工学"，ユロナ社，1971.

〔1-10〕 高松武一郎，"プロセスシステム"，日刊技术新闻社，1972.

〔1-11〕 兰州化机所，"化工系统工程学修改稿"1975～1976.

26.2 系统的分析

在系统工程中，定量地评价系统的特性是十分重要的，在进行过程系统设计时，首先应该构筑新系统的结构，然后进行正确评价，从而为改善系统设计提供依据。系统分析的目的在于通过分析比较各种可供选择的方案的费用、效益、功能和可靠性等各项技术经济指标，得出制订决策所必须的资料和信息，即获得系统最优设计和最优控制以及最优管理的信息。系统的分析与系统的最优设计不同，它主要是利用不完整的现成数据，通过系统的分析，构筑系统的模型并进行模拟和最优化，以此预测系统的性能和效益，通过对解的评价，为确定化工系统设计方案提供足够的信息和依据。

26.2.1 系统分析的图论基础

图论是系统分析的重要工具。在化工系统工程中，图论方法可解决：系统的网络分析；变量及计算顺序的选择；系统结构的设计。

(1) 集合和映射

(1.1) 集合

具有某种属性的一些对象的总体，或者说把对象的一个完全确定的组合称为集合（或集），构成这种组合的对象称为集合的点或元素，这些元素可以是数、函数或单元设备、单元过程等。应特别强调，集合是指一类事物的整体而不是指其中个别对象，集合所包含的对象是确定的，可以确定地判断一个对象属于或不属于这个集合。

一般以大写英文字母表示集合，以英文小写字母表示集合的元素，如

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots\cdots\}$$

如果 a 是集合 A 的元素，则称元素 a 属于集合 A，写成 $a\in A$。如果 b 不是集合 A 的元素，则称元素 b 不属于集合 A，写成 $b\notin A$。

1. 空集—没有元素的集合称为空集，以 ϕ 表示。

2. 全集—包含所研究一切对象的集称为全集。

3. 集的相等—如果集A、B的所有对应元素相同，则称集A等于集B，写成 $A=B$。

4. 子集—由原集 I 的全部元素或部分元素（空集也包括在内）所组成的集 A，称为 I 的子集，写成 $A\subset I$。如果 $A\subset I$，但 $A\neq I$，即集A的元素不等于集 I 的元素，但集A的一切元素均为集 I 的元素，而集 I 的某些元素不是集A的元素，则称集A为集 I 的真子集。

5. 交集—由所有既属于集A，又属于集B的元素构成的集称为集A和集B的交集或公共部分，写成 $A\cap B$。

6. 和集—由属于A，或属于B，尚或属于A、B的所有元素组成的集称为集A、B的和集，写成 $A\cup B$。

7. 差集—由属于A但不属于B的那些元素构成的集称为差集，写成 $A-B$。

8. 集A、B的序积—序积又称直积。取集A的一个元素 a，取集B的一个元素 b 组成 (a, b)，所有这种 (a, b) 构成的集称为集A，B的序积，写成 $A\times B$，或写成

$$A\times B=\{(a,\ b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

上述关于A、B两个集构成的和集、交集、序积的定义同样适用于一族的集合（A_1，A_2，……），如A_i的和集写成$\bigcup_i A_i$；A_i的交集写成$\bigcap_i A_i$；A_i的序积写成$\prod_i A_i$等等。

9．集的运算法则

交换律　$A\cup B=B\cup A$

结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（1.2）映射

如果集X、Y是由一些实数组成的两个集，若集X内的每一个元素x，在某种法则F的作用下，在集Y中总有而且只有一个元素y与元素x相对应，则称F为X到Y的映射。另外，定义y是x在映射F作用下的象，记为$y=F(x)$。定义x是y的象源或逆象。映射可写成

$$F: X\longrightarrow Y$$
$$x\longmapsto y=F(x)$$

又称X是F的定义域，写成D_F，由所有的象$F(x)$组成的集称为F的值域，写成R_F或写成

$$R_F=\{y\,|\,y=F(x),\ x\in X\}$$

应予指出，值域R_F不一定等于y，但满足$R_F\subset y$。同时，对于集X中的每一个元素x，通过F的作用，在集y中有一个与x对应的y。反之，y在X中的逆象可能不止一个，因而集Y中有的元素可能与集X的元素不相对应。此外，如果两个映射F_1、F_2的定义域相同，并且对定义域内任何元素x，有$F_1(x)=F_2(x)$，则称这两个映射相等。

（2）图的基本定义

（2.1）图

图是由结点或称顶点的非空集X与X的一个映射F所构成的偶对，写成$G=(X,F)$。在一幅图中，集X的元素可表示为平面上的点，如果两个点x和y，当$y=F(x)$，则x到y所作的一条矢线，即联结两个结点的有向线段表示的映射称为图的弧，写成u，全体u的集合写成U。如图2-1所示。

图的结点的集合　$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

图的弧的集合　$U=\{(x_1,x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5)\}$或写成$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$。在弧$u_1$中，结点$x_1$称为弧的起点，结点$x_2$称为弧的终点。

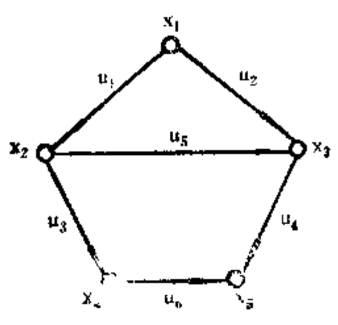


图 2-1　图的定义

（2.2）路

在图$G=(X,U)$中，弧列（u_1，u_2，…，u_m）中每一条弧的终点紧接其后那条弧的起点，则这样的弧列称为路。由有限条弧组成的路称为有限路。在一条路中，同一条弧只通过一次的称为单路。若存在通过两次以上的弧，则称为复路。若一条路连续通过顶点x_1，x_2，…，x_k，则该条路可写成$u=[x_1, x_2, \cdots, x_k]$。

一条路的弧列所包含的弧的个数称为路的长度。通过不同结点的路称为基本路。

(2.3) 回路

开始并终止于同一个结点的路称为回路或环路。回路是一条有限路，也是一条单路。如果一个回路都只通过任何结点一次，则称这一回路为基本回路。如果回路的长度为 1 、即仅由弧 (x,x) 构成的回路称为环。如果每一个回路以某向量，如 $\underline{c}=(c_1, c_2, \cdots c_m)$ 表示，当回路顺弧u_k的方向通过时，令$c_k=1$；否则令$c_k=0$。由此定义一条回路对应于m维空间R^m中的一个向量$\underline{c}$为回路向量。如果几个回路向量是线性无关的，则定义与之对应的回路为独立回路。

(2.4) 对称图和反对称图

若 $(x,y)\in U\Rightarrow(y,x)\in U$，则定义 $G=(X,U)$ 为对称图。在对称图中，两个相邻的顶点 x，y 必定以两条方向相反的弧相联结。若$(x,y)\in U\Rightarrow(y,x)\notin U$，则定义 $G=(X,U)$ 为反对称图。在反对称图中，两个相邻的顶点仅按一个方向相连接。描述化工系统中各单元设备或过程连接关系的拓扑图都是反对称图。

(2.5) 图中的一些特殊点

如果一幅图中的点，不存在其它点到这一点上的映射（或弧），或者不存在这一点到其它点的映射，这样的点称为悬挂点。与悬挂点通过弧相连接但不在回路上的点称为非回路点。在一幅图中，有两个以上输入弧的点称为混合点，混合点可能在回路上，也可能不在回路上。有些混合点，至少有路通向两个以上其它混合点，或者除了混合点本身不与其它任何一个混合点有通路，则这种混合点称为基本混合点。凡是在独立回路上的基本混合点称为独立回路点。

(2.6) 图的可达性

从结点x_i出发可达到结点 x_j，则从 x_i到x_j长度最短的路称为测地线。测地线的长度称为测地距，以 $d(x_i, x_j)$ 表示。显然，$d(x_i,x_i)=0$。在一个简单有向图的顶点集合中，若从x_i到x_j和从x_j到x_k均有一条路，则从 x_i到 x_k显然也存在一条路，这一特性称为图的可达性，可达性是反对称的。它具有下列数值特征：

1. $d(x_i, x_j)\geqslant 0$；

2. $d(x_i,x_i)=0$；

3. $d(x_i,x_j)+d(x_j,x_k)\geqslant d(x_i,x_k)$；

4. 若x_i至x_j不可达，则$d(x_i,x_j)=\infty$；

5. 若在一幅简单有向图中的结点数为 n，则任何基本路的长度小于或等于 $(n-1)$。任何基本回路的长度均小于或等于 n 。

上述关于图的基本定义都是指有向图而言，但有向图中弧、路、回路、可达性等的概念都可推广应用于无向图，与之对应的概念是边、链、环……。

（3）图的数值表示法

为了便于在计算机上进行运算，通常用一些特定的矩阵表示图的数值特征。

(3.1) 布尔矩阵

布尔矩阵是其元素由 0 、 1 两个数值构成的方阵。在一个非负实数的集合中，定义两种运算：

广义和是使任何两个数λ_1、λ_2恒对应于一个非负实数 λ，可写成

$$\lambda=\lambda_1\dot{+}\lambda_2 \tag{2-1}$$

广义积是使任何两个数λ_1、λ_2恒对应于一个非负实数λ'，可写成

$$\lambda'=\lambda_1 \dot{\times} \lambda_2 \tag{2-2}$$

若两个矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$，其元素全部为非负整数，则其广义和以矩阵s表示，可写成

$$\left.\begin{array}{l} s=A \dot{+} B=(s_{ij}) \\ s_{ij}=a_{ij} \dot{+} b_{ij} \end{array}\right\} \tag{2-3}$$

其广义积以矩阵P表示，可写成

$$\left.\begin{array}{l} P=A \cdot B=(P_{ij}) \\ P_{ij}=(a_{i1} \dot{\times} b_{1j}) \dot{+} (a_{i2} \dot{\times} b_{2j}) \dot{+} \cdots \dot{+} (a_{in} \dot{\times} b_{nj}) \end{array}\right\} \tag{2-4}$$

广义和与广义积的运算规则如下：

$$\lambda_1 \dot{+} \lambda_2=\lambda_2 \dot{+} \lambda_1 \tag{2-5}$$

$$\lambda_1 \dot{+} (\lambda_2 \dot{+} \lambda_3)=(\lambda_1 \dot{+} \lambda_2) \dot{+} \lambda_3 \tag{2-6}$$

$$\lambda_1 \dot{\times} \lambda_2=\lambda_2 \dot{\times} \lambda_1 \tag{2-7}$$

$$\lambda_1 \dot{\times} (\lambda_2 \dot{\times} \lambda_3)=(\lambda_1 \dot{\times} \lambda_2) \dot{\times} \lambda_3 \tag{2-8}$$

$$\alpha \dot{\times} (\lambda_1 \dot{+} \lambda_2)=(\alpha \dot{\times} \lambda_1) \dot{+} (\alpha \dot{\times} \lambda_2) \tag{2-9}$$

如果矩阵的所有元素均为0和1，则其运算规则如下：

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \dot{+} 1=1 & 1 \dot{\times} 1=1 \\ 1 \dot{+} 0=1 & 1 \dot{\times} 0=0 \\ 0 \dot{+} 0=0 & 0 \dot{\times} 0=0 \end{array}\right\} \tag{2-10}$$

或可简化成

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \dot{+} \lambda_2=\max\{\lambda_1,\ \lambda_2\} \\ \lambda_1 \dot{\times} \lambda_2=\min\{\lambda_1,\ \lambda_2\} \end{array}\right\} \tag{2-11}$$

(3.2) 图的相邻矩阵

图的相邻矩阵是由图的结点构成的方阵。若图$G=(X,U)$，其中$X=\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n\}$，则可写出一个$n\times n$矩阵A，矩阵A的每个元素$a_{ij}$的定义如下：

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & 若(x_i,\ x_j)\in U \\ 0 & 若(x_i,x_j)\notin U \end{cases} \tag{2-12}$$

矩阵的第i行是由以结点x_i为起点的各边所确定，第i行中其值为1的元素个数，等于从结点x_i出发的次数。第j列中其值为1的元素个数等于到达结点x_j的次数。

对于一幅给定的图$G=(X,U)$，相邻矩阵依赖于X中各个元素的次序，对于X中各元素的不同次序，相应可得到图G的不同的相邻矩阵。把矩阵的一些行与对应的列相交换，则/图G的任一个相邻矩阵可找出同一个图的另一个相邻矩阵。图的相邻矩阵的性质如下：

1. 如果有向图是自反的，则相邻矩阵的对角元素必为1。
2. 如果是对称图，则相邻矩阵亦是对称矩阵，即$a_{ij}=a_{ji}$。
3. 如果是反对称图，则对所有$i,j,a_{ij}=1$，且有$a_{ji}=0$；若$a_{ij}=0$，且有$a_{ji}=1$。
4. 零图的相邻矩阵为零矩阵。
5. 如果图中各结点只有环而无弧，则相邻矩阵为单位阵。

6. 图G的逆图（即把图G的各条弧的方向逆转所得的图）$\overline{G}$的相邻矩阵是矩阵A的转置矩阵A^T。

7. 若相邻矩阵主对角元素为1，则表示顶点上有一个环。

8. 设图G的相邻矩阵为A，且从图G顶点j到顶点i有长度为K的通路存在，则A^K的元素（i，j）为1，否则为零。A^K的对角元素表示了回路的存在与否，即$A^0=I$。

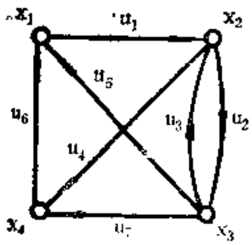
9. $\sum_{K=0}^{P} A^K$表示长度为P的通路是否存在，且有$\sum_{K=0}^{P} A^K=(A+I)^P$。若图中无回路，则存在某一$\nu$值（$\nu \leqslant n$），使$A^K=0(K \geqslant \nu)$成立。其中n为图G的顶点总数。

10. 对有回路的图，虽然满足上述要求的ν不存在，但只要N足够大，则有

$$\sum_{K=0}^{N} A^K=(A+I)^N$$

收敛于一个确定的矩阵R，若R的元素（i，j）为1，则从顶点j沿n个指定的支路方向到达顶点i；若元素（i，j）为零，则j不能到达顶点i，定义矩阵R为可达矩阵。

图G=(X，U)及其对应的相邻矩阵如图2-2所示。



$$A=\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

图 2-2　图及图的相邻矩阵

(3.3) 图的连接矩阵

图的连接矩阵是由图的顶点和弧所构成的方阵。若图G=(X，U)的顶点的集合和弧的集合分别表示为

顶点的集合　$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

弧的集合　　$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$

则可写出一个m×n矩阵S，其元素S_{ij}的定义如下：

$$S_{ij}=\begin{cases} +1 & \text{若}x_i\text{是}u_j\text{的起点} \\ -1 & \text{若}x_i\text{是}u_j\text{的终点} \\ 0 & \text{若}x_i\text{不是}u_j\text{的顶点} \end{cases} \tag{2-13}$$

图的连接矩阵对应于一个齐次线性方程组，因此可以用连接矩阵求齐次线性方程组的解。齐次线性方程组的定义如下：

$$\left.\begin{array}{l} S_{11}x_1+S_{12}x_2+\cdots\cdots+S_{1m}x_m=0 \\ S_{21}x_1+S_{22}x_2+\cdots\cdots+S_{2m}x_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n1}x_1+S_{n2}x_2+\cdots+S_{nm}x_m=0 \end{array}\right\} \tag{2-14}$$

写成矩阵向量形式：

$$\underline{S}\underline{X}=0 \tag{2-14 a}$$

如果图G=(X,U)是反对称图，S是图G关于弧的连接矩阵，则回路向量$\underline{C}$必满足线性方程组$\underline{S}\,\underline{C}=0$；反之，若$\underline{S}\,\underline{C}=0$的方程组只取0和1，则其解也一定是回路向量，$\underline{S}\,\underline{C}=0$方程组取0和1的解有任意个，但其中必有n个解是线性独立的，而其余解则是线性独立解的线性组合。若矩阵S的秩为P，且P≤m，则方程组有（m-P）个线性独立解，即方程

组对应的图G有(m-P)个独立回路。

图2-2所示图G对应的连接矩阵如下：

$$
S=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

（3.4）图的相邻矩阵、连接矩阵的用途

以矩阵表示的一幅图便于图的分析和简化，由图的相邻矩阵不难把图中一些特殊点，如输入、输出结点、非同路点、混合点和基本混合点区分出来。用图的连接矩阵则不难判别混合点、独立回路和独立回路点。

（4）偶图

给定一幅无向图$G=(X,U)$，X_I、X_{II}是图G的结点集合X的两个子集，如果图G中的某条边写成$x=(x_i,x_j)$，并且$x_i\in X_I$，$x_j\in X_{II}$，则它把图G的结点集合X分为X_I、X_{II}，则具有这种性质的X_I、X_{II}构成的无向图称为偶图，而X_I、X_{II}称为图G的互补结点子集。偶图的每一边将X_I中某个结点与X_{II}中某个结点相连。通常以X_I表示函数或因变量的结点，X_{II}表示自变量的结点，如图2-3所示。

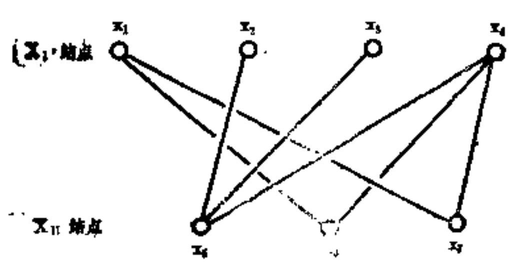


图 2-3　偶图

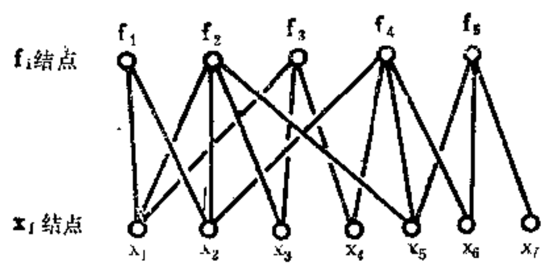


图 2-4　式（2-15）的偶图

表示方程组变量之间关系的偶图是一种实用、紧凑、简明易懂的图形结构。如果系统的数学模型以联立方程组表示：

$$
\left.\begin{array}{l}
f_1(x_1,\ x_2)=0 \\
f_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5)=0 \\
f_3(x_1,\ x_3,\ x_4)=0 \\
f_4(x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6)=0 \\
f_5(x_5,\ x_6,\ x_7)=0
\end{array}\right\} \tag{2-15}
$$

把方程组分成两类变量集合f_i、x_j，其中f_i在偶图中构成f结点，x_j构成x结点，连接结点的边数定义为局部自由度，变量X的数目M与方程式数目N之差定义为自由度，以F表示，即

$$F=M-N \tag{2-16}$$

F值表示系统数学模型中被选为设计变量的变量个数。式（2-15）的偶图如图2-4所示。在图中，结点f_1，f_2，……的局部自由度分别为2，4，……，结点x_1，x_2，……的局部自由度分别为3，3，……，则自由度为

$$F = M - N = 2$$

在系统的分解中，利用偶图的特性可以合理地选择系统的设计变量、设计计算顺序以及编制工艺流程。

（5）信号流图

信号流图是以图的结构表示线性方程组的变量之间关系的一种图示形式，由于这种形式直观、灵活、简便，在线性系统的分析中得到广泛的应用。

（5.1）基本定义

信号流图是由节点和连接节点的矢线构成的一种图形结构，是线性系统数学模型的一个逻辑表示形式。信号流图实质上是一幅网络图。图中各个节点（或称结点）表示线性方程组中的变量，用小圆圈表示，每个节点对应于变量，变量之间的相互关系通过连结节点的矢线表示。现用图2-5说明信号流图的一些基本概念和定义，

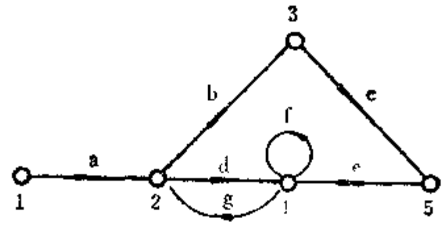


图 2-5 信号流图

1. 节点——用来表示变量或信号的点，如图2-5中1，2，3，4，5等。

2. 传输——表示节点之间的关系，如图2-5中的a，b，c等等，数值上等于两个节点之间的增益。

3. 支路——联结两个节点之间的矢线，如图2-5中a，b，c，……等有向线段。

4. 输入节点——又称源点，即只有输出支路的节点。它对应于线性方程组的自变量，如图2-5中的节点1。

5. 输出节点——又称汇点，即只有输入支路的节点，如图2-5中的节点5。

6. 混合节点——既有输入又有输出支路的节点，如图2-5中的节点2、3、4等。

7. 路径——从某一个节点出发，沿支路方向连续经过一些支路而终止于另一个节点或回到起始节点所构成的一种拓扑结构，如图2-5中的1-2-4-2-4-5。

8. 开路径——从某一个节点出发，依次经过一些支路，并且每个节点只通过一次，最后终止于另一个节点的路径。如图2-5中的1-2-3-5。

9. 前向路径——从输入节点到输出节点的一种开路径，如图2-5中的1-2-3-5、1-2-4-5。

10. 闭路径——从某一个节点出发，沿支路方向依次经过一些支路，并终止于同一节点，则构成一个闭路径。闭路径只通过节点一次，如图2-5中的2-4-2。只经过一条支路，并终止于同一个节点所构成的闭路径又称自环，如图2-5中的f。

11. 级联节点和级联支路——不在闭路径中的节点和支路，如图2-5中节点3和支路a、b、c、e等。

12. 再循环节点和支路——闭路径中的节点和支路径，如图2-5中的2、4和d、f、g等。

信号流图具有如下性质：

1. 支路表示变量之间的传输关系，信号只能沿支路按箭头方向传递，而支路则连接有因果关系的节点。

2. 支路是加权的，所谓权是支路传输的数值表征，其值等于方程中因变量的系数。

3. 一个节点可把所有输入支路的信号迭加，并把迭加信号传输到所有输出支路。

4．对于混合节点，可以增加一条具有单位传输值的支路，将它当作输出节点。

5．对给定的系统，信号流图不是唯一的。

（5.2）信号流图的简化规则

1．支路传输值的加法规则一有n条同方向并联支路，可以用一条等价支路表示，其传输值为n条并联支路的传输值之和，如图2-6所示。

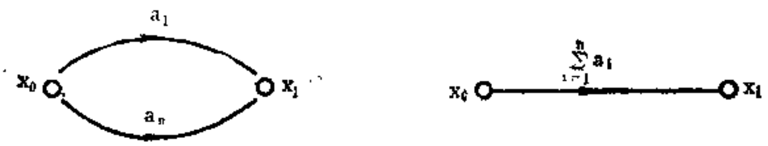


图 2-6　信号流图加法规则

加法规则对应的方程如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1x_0 + a_2x_0 + \cdots + a_nx_0 \\ &= x_0\sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned} \tag{2-17}$$

2．支路传输值的乘法规则一有n条同方向级联或串联支路，可以用一条等价支路表示，其传输值为n条支路的传输值之乘积，如图2-7所示。乘法规则所对应的方程如下：

$$X_n = x_0\prod_{i=1}^{n} a_i \tag{2-18}$$

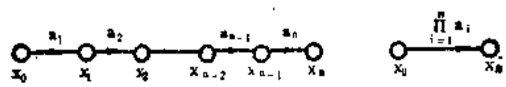


图 2-7　支路传输值的乘法规则

3．支路的移动规则一用于吸收节点，即消去网络中的一些节点。如图2-8所示，某节点N有m条输入支路，支路传输值分别为a_1，a_2，…，a_m，同时还有n条输出支路，支路传输值分别为b_1，b_2，…，b_n。设节点N对应的变量为z_n，则由图2-8可写出下列方程组：

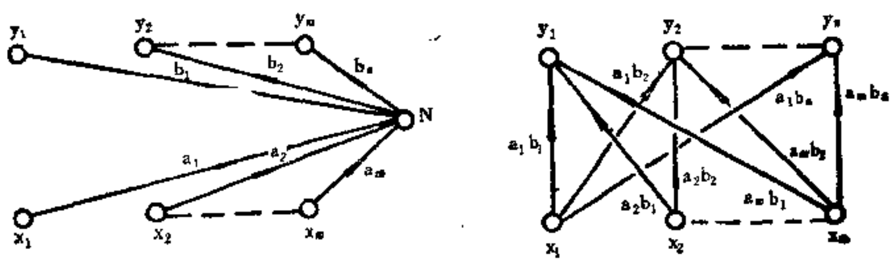


图 2-8　支路移动法则

$$\begin{aligned} &z_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_mx_m \\ &y_1 = b_1z_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_n = b_nz_n \end{aligned}$$

由上可得