

高等学校教学用书

# 数学解析教程

第二卷

A. Ф. 别尔曼特著

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別爾曼特 (А. Ф. Бермант) 著“數學解析教程”(Курс математического анализа) 第二卷 1953 年第五版修訂本譯出, 1950 年第四版修訂本的中譯本已由重工業出版社出版。原書經蘇聯文化部高等教育司批准作為高等工業學校教學參考書。

本書第二卷講多變量函數及其微分法、微分法則、重積分、微分方程及三角級數等。

## 數 學 解 析 教 程

第二卷

書號425(課399)

---

A. Ф. 別 爾 曼 特 著  
張 理 京 譯  
高 等 教 育 出 版 社 出 版  
北 京 玻 璃 廠 一 七 〇 號  
(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四號)  
新 華 書 店 總 經 售  
京 華 印 書 局 印 刷  
北 京 南 新 華 街 甲 三 七 號

---

開本 850×1168<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印張 11<sup>7</sup>/<sub>16</sub> 字數308,000  
一九五五年十月北京第一版 印數1—12,000  
一九五五年十月北京第一次印刷 定價(7) 1.43

# 目 次

第十章 多變量函數及其微分法 .....	487
§ 1. 多變量函數 .....	487
136. 函數概念・函數表示法(487) 137. 函數的記号及分類(489) 138.	
多變量函數的幾何意义(491)	
§ 2. 函數的最簡單的研究 .....	495
139. 函數的定義域・域的概念(495) 140. 極限(499) 141. 多變量函	
數的連續性・間斷點(501) 142. 連續函數的幾個屬性・初等函數(504)	
143. 函數的性态・等高線(506)	
§ 3. 多變量函數的導數及微分 .....	509
144. 偏導數(509) 145. 微分(513) 146. 微分的幾何意义(519)	
147. 微分在近似計算法上的应用(521) 148. 方向導數(524) 149. 双	
變量函數的可微分性(527)	
§ 4. 微分法則 .....	530
150. 複合函數的微分法(530) 151. 隱函數及其微分法(535) 152. 函	
數的參量表示法及其微分法(539)	
§ 5. 累次微分法 .....	542
153. 高階導數(542) 154. 高階微分(547)	
第十一章 微分法的应用 .....	550
§ 1. 台勞公式・多變量函數的極值 .....	550
155. 多變量函數的台勞公式及台勞級數(550) 156. 極值・必要条件	
(554) 157. 關於最大值及最小值的問題(558) 158. 極值的充分条	
件(560) 159. 条件極值(565)	
§ 2. 矢量分析初階 .....	571
160. 純數宗量的矢性函數・微分法(571) 161. 梯度(578)	

§ 3. 曲線・曲面	581
162. 平面曲線(581) 163. 平面曲線族的包絡(583) 164. 空間曲線・螺旋線(589) 165. 曲率及撓率・弗萊納三面形及弗萊納公式(595) 166. 曲面(601)	
<b>第十二章 重積分及累次積分法</b>	<b>604</b>
§ 1. 二重積分及三重積分	604
167. 體積問題・二重積分(604) 168. 積分的總的定義・三重積分(608) 169. 二重積分及三重積分的基本性質(609) 170. 二重積分及三重積分的基本性質(續)・域的可加函數・牛頓-萊布尼茲公式(613)	
§ 2. 累次積分法	617
171. 二重積分的計算法(矩形域)(617) 172. 二重積分的計算法(任意域)(623) 173. 三重積分的計算法(629)	
§ 3. 極坐標, 柱坐標及球坐標的積分	634
174. 極坐標二重積分(634) 175. 柱坐標與球坐標的三重積分(638)	
§ 4. 二重積分及三重積分的應用	643
176. 解題程序(643) 177. 幾個幾何問題(646) 178. 靜力學中的幾個問題(649)	
§ 5. 旁義積分・依賴於參量的積分	653
179. 旁義二重及三重積分(653) 180. 取決於參量的積分・萊布尼茲法則(658)	
<b>第十三章 曲線積分及曲面積分</b>	<b>667</b>
§ 1. 對長度的曲線積分	667
181. 關於功的問題・對曲線長度的積分(667) 182. 對長度的曲線積分的屬性、計算法及用法(669)	
§ 2. 對坐標的曲線積分	673
183. 對坐標的曲線積分(673) 184. 組合曲線積分・格林公式(679) 185. 曲線積分不取決於積分路線時應滿足的條件(684) 186. 全微分的準則・基本定理的另一種陳述(688) 187. 原函數的求法(693) 188. 用曲線積分解題的程序・水力學及熱力學的問題(697)	

§3. 曲面積分 .....	702
189. 對面積的曲面積分及對坐標的曲面積分(702)	
190. 組合曲面積分	
• 斯托克斯公式(708)	
191. 奧氏公式(713)	
<b>第十四章 微分方程</b> .....	<b>716</b>
§ 1. 一階微分方程 .....	716
192. 可分離變量的微分方程(716)	
193. 一般概念(721)	
194. 能夠化為可分離變量的微分方程(726)	
195. 全微分方程 • 積分因子(731)	
§ 2. 一階微分方程(續) .....	737
196. 方向場 • 近似解(737)	
197. 奇異解 • 克累羅方程(743)	
198. 正交軌道線及等交軌道線(748)	
§ 3. 二階及高階微分方程 .....	750
199. 一般概念(750)	
200. 特殊情形 • 高階微分方程的例子(753)	
201. 解的近似求法(758)	
§ 4. 線性微分方程 .....	760
202. 齊次方程(760)	
203. 非齊次方程(768)	
§ 5. 常係數線性方程 .....	773
204. 常係數齊次方程(773)	
205. 常係數非齊次方程(778)	
206. 常係數非齊次方程的解的一般公式(783)	
207. 振盪 • 共鳴(787)	
§ 6. 補充問題 .....	792
208. 可以化為常係數方程的幾種線性方程(792)	
209. 微分方程組(794)	
<b>第十五章 三角級數</b> .....	<b>798</b>
§ 1. 三角多項式 .....	798
210. 問題的性質(798)	
211. 福里哀係數及其性質(800)	
§ 2. 福里哀級數 .....	807
212. 基本定理(807)	
213. 任意區間上的福里哀級數 • 缺項級數(810)	
214. 舉例(813)	
215. 福里哀級數的均勻收斂性 • “在方均值意義上”的收斂性(819)	
216. 巴塞華爾—透普諾夫定理(825)	

- 
- § 3. 克路洛夫法・諧量分析法 .....828
217. 係數的階(828)    218. 改進三角級數收斂性的克路洛夫法(831)
219. 举例(834)    220. 实用諧量分析法・样板(838)

## 第十章 多变量函数及其微分法

### § 1. 多变量函数

#### 136(151). 函数概念·函数表示法

定义 如果两个变量的每一对所考虑的数值，对应了另一个变量的一个或几个数值，那末第三个变量就叫做前两个变量的函数。

可以任意变动的那两个变量(它们的值可由我们随意指定)叫做自变量。

例如，矩形的面积  $S$  是两个独立变量——矩形的两边  $a$  及  $b$  ——的函数。这函数的表达式是

$$S = ab.$$

理想气体的体积  $v$  是其压力  $p$  及温度  $T$  的函数。 $v$  的表达式可以从那含  $v, p$  及  $T$  三者的门德雷业夫-克拉配伦方程求出：

$$v = \frac{RT}{p} \quad (R = \text{常量}).$$

所谓给出两个变量的函数(二元函数)，就是指示出下面两件事：  
1) 自变量所取得的一对一对的全体数值，以及 2) 从所给自变量值定出其对应函数值的方法。跟单变量函数的情形一样，双变量函数的最重要的表示法也有三种：1) 表格法，2) 解析法(用公式)及 3) 图形法。

用表格法表示时，函数是这样规定的：就某些对自变量值，指出它们所对应的函数值。通常这可以用“双口”表格来给定，我们只要看下面

定出了螺旋傳動的效率  $\eta$  跟摩擦係數  $\mu$  及螺旋角  $\alpha$  之間的關係的這個表格(見 Берлов 著“機器零件”),就應該知道這種表格是怎樣填製的:

$\mu \backslash \alpha$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$
0.01	0.897	0.945	0.961	0.970	0.974
0.02	0.812	0.895	0.925	0.941	0.950
0.03	0.743	0.850	0.892	0.914	0.927
0.04	0.683	0.809	0.861	0.888	0.904
0.05	0.633	0.772	0.831	0.863	0.882

跟單變量函數的情形一樣,雙變量函數的最重要的表示法是解析表示法,或即公式表示法。

用解析法表示函數時,我們在解析式中指出了自變量值與其對應函數值之間的數學運算關係,以及這些運算的先後次序,換句話說,我們要給出含有三個變量的一個公式(見  $n^{\circ}10$ )。

例如,下列每個公式

$$z = ax + by + c, \quad z = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{\sin(2x + 3y)}{\sqrt{1 + (x - y)^2}}$$

都把  $z$  表示為  $x$  及  $y$  的一個函數。

數學解析中的一切處理方法,差不多都是針對着函數的解析表示式的。

雙變量函數的圖形表示法我們在  $n^{\circ}138$  中要講到的。

就任意個自變量的函數來說,它的定義是完全跟雙變量函數的定義類似的。

定義 如果  $n$  個自變量的每一批所考慮的  $n$  個值對應了另一變量的一個或幾個值,最後那個變量就稱為前  $n$  個自變量的函數。

例如,長方體的體積  $V$  是三個獨立變量——長方體的側稜  $a, b, c$



——的函数：

$$V = abc.$$

又如电流所产生的热量  $Q$  决定于电压  $E$ 、电流强度  $I$  以及时间  $t$ ，而这些量之间的函数关系则由下面的公式给出：

$$Q = 0.24 IEt.$$

$n(n > 2)$  个自变量的函数也可以用表格给出，但在  $n = 3$  时，用表格法来给出函数已经非常麻烦。

用解析法表示  $n$  个变量的函数时，我们在解析式中指出了函数值与  $n$  个对应自变量值之间的数学运算关系，以及这些运算的先后次序。

例如，底下每个等式

$$u = ax + by + cz + d, \quad u = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

都把  $u$  给定为  $x, y, z$  的一个函数。

必要时，我们可把常量看作是任意个自变量的函数，这就是，把常量看作是对每一批自变量值都保持同一数值的那种函数。

本书中的所有论证，差不多都是只就双变量函数来说的，因为关于多变量函数的相应论证，照例都可以用完全相仿的形式作出。

137(152). 函数的记号及分类 要表示  $u$  是  $x, y, z, t, \dots$  的函数时，我们可以这样写：

$$u = f(x, y, z, t, \dots);$$

在函数记号(这个记号不只限于字母  $f$ ，也可用别的字母)后面的括弧里，我们指出了函数所依赖的一切自变量。

如果让自变量之一，例如  $x$ ，保持常数值  $x = a$ ，而另一自变量  $y$  仍算作是可变的，那末函数  $z = f(x, y)$  就变成一个变量  $y$  的函数： $z = f(a, y)$ 。同样若使  $y$  保持常数值  $y = b$ ，则得一个变量  $x$  的函数： $z = f(x, b)$ 。

若双变量函数的每一对所考虑的自变量值对应着一个函数值时，就说那种双变量函数是单值的；若某一对自变量值所对应的函数值多

於一个時，就說函數是多值的。

例如，下列兩個函數

$$z = ax + by + c, \quad z = e^{x^2} \sin(x + y)$$

是單值的，而函數

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \text{Arcsin}(x - y)$$

是多值的，並且其中第一個是雙值函數，第二個是“無限多值”函數。

以後，要是沒有別的聲明，我們講的都是單值函數。解析學中在用到“多值式子”時，每次總要講究怎樣选取對應於函數的單值支。

多變量函數通常可以看作是自變量的複合函數。設  $u$  已表示為宗量  $t, v, w, \dots$  的函數：

$$u = \varphi(t, v, w, \dots),$$

而  $t, v, w, \dots$  本身又都是自變量  $x, y, z, \dots$  的函數：

$$t = \psi(x, y, z, \dots), \quad v = \xi(x, y, z, \dots), \quad w = \eta(x, y, z, \dots), \dots$$

於是， $u$  是自變量  $x, y, z, \dots$  的函數，是由上面這一連串函數給定的（連串給出法）。函數

$$\begin{aligned} u &= \varphi[\psi(x, y, z, \dots), \xi(x, y, z, \dots), \eta(x, y, z, \dots), \dots] = \\ &= F(x, y, z, \dots) \end{aligned}$$

叫做自變量  $x, y, z, \dots$  的複合函數（函數的函數）。

例如

$$z = e^t \sin v,$$

（其中  $t = xy, v = x + y$ ）便是  $x$  及  $y$  兩個自變量的複合函數。

自變量  $x, y, \dots$  的複合函數  $u$ ，可以通過兩批或更多批的中間環節來給定。

直接由若干個宗量來表示的複合函數，可能實際上是個數不同的一些自變量的函數。例如，若函數

$$z = f(u, v)$$

的宗量  $u$  及  $v$  都是自變量  $x$  的函數，也就是，若  $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ ，

那末  $z$  就是一个自变量  $x$  的複合函数:

$$z = f[\varphi(x), \psi(x)] = F(x).$$

在解析学及其应用上所碰到的, 常常是以自变量的基本初等函数作为中間环节的那些複合函数。

如果用加、减、乘、除法以及取整数次的乘方来运算各个自变量的值便能求得多变量函数值的, 这种多变量函数就叫做有理函数。例如,

$$z = \frac{3x^2 - 5xy + 1}{x^2y - y^2 - 1}$$
 就是  $x$  及  $y$  的有理函数。

如果在计算有理函数值的时候, 无需用那合自变量的式子来除, 那末这种有理函数就叫做整有理函数或多項式。例如,  $z = 3x^2y - 5x^2y^2 - y^3 + xy - 1$  就是多項式。

一次多項式或线性函数

$$z = ax + by + c, \quad u = ax + by + cz + d, \text{ 等等,}$$

因为它很简单, 所以是特别重要的多項式 ( $a, b, c, \dots$  是常量;  $x, y, \dots$  是自变量)。

138(153). 多变量函数的几何意义 表示单变量函数的几何意义时, 我们应用平面。现在表示两个自变量函数的几何意义, 我们要应用空间。给定这种函数的方程中含有三个变量, 而在图形上表示这三个变量时可用(比方说)空间笛卡儿直角坐标系中的三个坐标轴(圖 1)。

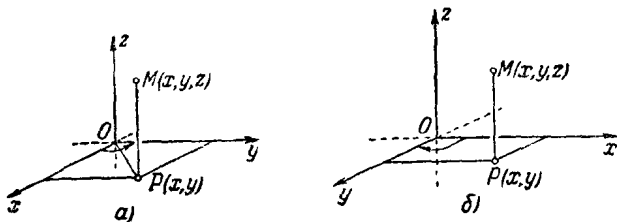


圖 1.

我們要知道, 在空間(如在平面的情形一样)有兩種根本不同的笛卡儿直角坐标系。这两种坐标系的差别在于其坐标轴的指向(坐标轴相互間的擺法)不同。在圖 1, a) 中所画的是所謂右手坐标系, 而在圖 1, b) 中

的是所謂左手坐标系。

如果从正  $Oz$  軸的那一边來看  $xOy$  平面,那末在右手坐标系中,正的半段  $Ox$  軸是以反時針方向取最短路徑轉到正的半段  $Oy$  軸上去的。在左手坐标系中,上面所說的那種旋轉方向是跟時針的旋轉方向相合的。如果按大指、食指、中指的次序分別跟  $Ox, Oy, Oz$  这三个坐标軸对应起來,那末在右手的这三个手指就形成右手坐标系,在左手的这三个手指就形成左手坐标系。

在解析学的許多問題中,用哪一种(右手的或左手的)坐标系是根本沒有關係的。但是在有一些問題中,由所取坐标系所規定的空間“指向”就很重要。由於平面坐标系平常都是取右手系的(从上往下看平面),所以我們的空間坐标系也选取右手系(見圖 1, a)。

設已給兩個自变量  $x$  及  $y$  的函数  $z$ 。我們知道这函数的幾何形象(或者說它的圖形)是空間具有特种坐标的一些點(以自变量  $x$  及  $y$  的值为橫坐标及縱坐标,以兩者的对应函数值  $z$  为豎坐标的一些點)的軌跡。自变量  $x$  及  $y$  的每一对數值,都在  $xOy$  平面上定出一點  $P(x, y)$ ; 在點  $P$  处垂直於  $xOy$  平面且表示函数值的那个線段的端點,就是表示自变量值及函数值三者的那个點  $M(x, y, z)$ (見圖 1)。跟一切可能的  $(x, y)$  值相对应的,也就是說,跟  $xOy$  平面上點  $P$  的一切可能位置相对应的空間所有这种點  $M$ , 就構成了函数的幾何形象(圖形)。在平常的情形下,这幾何形象是个曲面。

反过來說,在备有坐标系的空間給出了曲面之後,我們就把  $z$  定为  $x$  及  $y$  的一个函数。因为这曲面上點的豎坐标是由橫坐标及縱坐标決定的,就是說,曲面上點的豎坐标乃是橫坐标和縱坐标的函数。在这种情形下,我們說函数  $z = f(x, y)$  是由圖形給定的。

如果函数是由解析式  $z = f(x, y)$  來給定的,那末这解析式便是曲面(所給函数的圖形)的方程。

例如,函数

$$z = \frac{c}{ab} \sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}$$

的圖形是橢球面的上半部(圖 2), 其中心在原點, 半軸長為  $a, b, c$ , 且各位於  $Ox, Oy, Oz$  軸上, 因為關係式

$$z = \pm \frac{c}{ab} \sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2} \quad \left( \text{或} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right)$$

就是這橢球面的方程。函數

$$z = x^2 + y^2$$

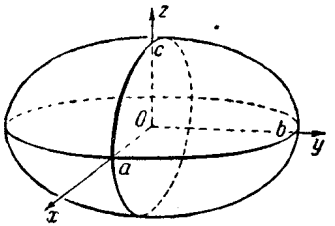


圖 2.

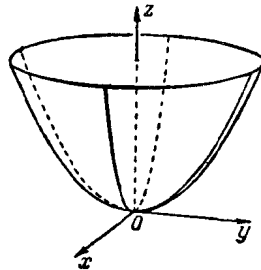


圖 3.

表示旋轉拋物面(圖 3), 因這拋物面的方程是  $z = x^2 + y^2$ 。線性函數

$$z = ax + by + c$$

表示平面; 特別是对應於方程  $z = c$  ( $c$  為常數) 的乃是平行於坐標面  $xOy$  的平面。

所以, 正如單變量函數與平面曲線之間的關係一樣, 雙變量函數與空間曲面之間也有互相對應的關係: 每個函數通常可用某個曲面表示, 每個曲面定出某個函數。

函數的單值性在幾何上表示為這樣的一件事實: 垂直於  $xOy$  的任一直線, 與表示函數的那個曲面相交不多於一點。

現在, 我們可以給任意個自變量的函數都作出一致的幾何解釋。這裏, 像已往所規定的一樣, 我們假定所說的函數都是單值的。

拿函數  $y = f(x)$  來說。它的自變量  $x$  是用直線上 ( $Ox$  軸) 移動的點

$P(x)$ 來表示的，而自變量的對應函數值  $y$  是用  $P$  點處垂直於  $Ox$  軸的線段來表示的。

在函數  $z=f(x, y)$  的情形下， $x$  和  $y$  兩個自變量合在一起也是用點  $P(x, y)$  來表示的，不過這個點現在是在平面 ( $xOy$  平面) 上移動的了，而對應的函數值  $z$  則用點  $P$  處垂直於  $xOy$  平面的線段來表示。

定義 如果點  $P$  的每一個位置對應了某個量的確定值，那末該量就叫做動點  $P$  的函數。

因此，在上面所講的兩種情形下，我們都可以把函數看作是點  $P$  的函數：

$$y=f(P), \quad z=f(P),$$

不過在第一种情形下，這個點  $P$  (函數的宗量) 只是在直線上移動的，而在第二種情形下則是在平面上移動的。

三個自變量的函數也可以看作是點的函數，這就是，看作是在三維空間 (普通空間) 內移動的點  $P(x, y, z)$  的函數：

$$u=f(P)=f(x, y, z).$$

至於要講到這種函數的相仿於單變量函數及雙變量函數的幾何表示法，那末我們就必須用到四維空間。講到四維空間這個詞，我們是把它理解為  $x, y, z$  及  $u$  這四者一切可能值的集合，而集合中每一批這樣的四個數，就是這四維空間中的一點。這樣，三維空間內點  $P(x, y, z)$  (函數的宗量) 的每一個所論位置，都對應了四維空間內的一點  $M(x, y, z, u)$ ，而該點  $M$  則表示那包含三個自變量值及其對應函數值四者的一批數。

對於四個自變量、五個自變量的函數及一般任意個自變量的函數來說，情形也相類似。

$n$  個自變量  $x, y, z, \dots, t$  的函數  $u$  是  $n$  維空間內的動點  $P$  的函數：

$$u=f(P)=f(x, y, z, \dots, t).$$

不過即使就雙變量函數來說，已經由於我們對於空間直觀能力的限制與不可能描出空間的緣故，而不易直接應用雙變量函數的幾何意義。所以我們研究雙變量或多變量函數時，通常總想法把它化成單變量函數的研究 (見  $n^{\circ}143$ )。

設已給函数  $z=f(x, y)$ 。假定自变量之一(如  $x$ )保持不变:  $x=x_0$ 。这样就限制了點  $P(x, y)$  移動的自由度——它只能在  $xOy$  平面的直線  $x=x_0$  上移動。於是得到單变量函数:

$$z=f(P)=f(x_0, y);$$

从幾何上講,  $x=x_0$  这个条件意味着用平面  $x=x_0$  來截那表示了函数  $z=f(x, y)$  的曲面; 設相截的結果在截面上得一平面曲線  $AB$ (圖 4)。等式  $z=f(x_0, y)$  是曲線  $AB$  在  $yOz$  平面上的正投影的方程。

同样, 函数

$$z=f(P)=f(x, y_0)$$

的宗量  $P$  是只能在  $xOy$  平面的直線  $y=y_0$  上移動的。这个單变量函数的圖形是曲線  $CD$ (曲面与平面  $y=y_0$  的截線, 圖 4) 在  $xOz$  平面上的正投影。

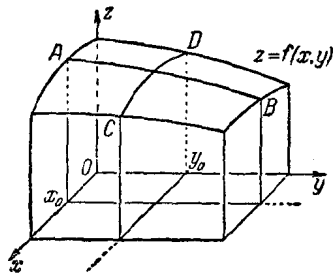


圖 4.

## § 2. 函数的最簡單的研究

### 139(154). 函数的定义域·域的概念

I. 如果  $xOy$  平面上的點  $P(x, y)$  按某种法則对应了函数  $z$  的值, 我們就說函数  $z=f(x, y)$  在點  $P(x, y)$  处有定义。

**定义**  $xOy$  平面上凡是使函数  $z=f(x, y)$  有定义的所有那一批點, 叫做該函数的定义域(或存在域)。

定义域可以是平面上任何样的一批點, 不过, 在解析学中所考慮的函数, 通常都是定义在平面上被一曲線或若干曲線所圍成的某部分區域上(該區域內的个别點或个别線上, 函数沒有定义的地方, 可能要除外)。

**定义** 平面上为一曲線或若干曲線(这些曲線可以伸到無窮远)所圍的部分叫做域, 而包围域的曲線叫做它的边界。

如果把边界跟域連在一起,这域就叫閉域<sup>①</sup>,如果边界不算在域裏面,这域就叫開域(在無需區別这两种情形的問題裏,我們只說“域”)。

如果域內任意兩點可用全部在域內的連續曲線(比方說,用折線)連接起來的,这种域叫做連域。

如果連域的边界由一根連續曲線構成,这連域叫做單連域(圖 5, a)。單連域还有這麼一个特點:域內的任何閉曲線,都可以在連續變形之後收縮为域內的一點,而無需通过不屬於該域的點。如圓就是單連域的典型例子。如果連域的边界是由兩条隔開的連續曲線(在特殊情形下,其中之一可能是一點)組成的,这連域就叫做双連域(圖 5, b)。双連域的典型例子是圓环(在特殊情形下,是除掉圓心的圓)。



圖 5.

如果連域的边界是三条隔開的連續曲線,这連域就叫三連域(圖 5, c),其餘類推。

**定义** 以所給點为圓心而半徑等於  $r$  的圓,叫做那所給點的  $r$ -鄰域。

$xOy$  平面上的域,如同  $Ox$  軸上的區間一樣,也可用一個或幾個不等式來給定。

例如:

1) 拿各边在直線  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=c$ ,  $y=d$  上的矩形(圖 6)來說。

这矩形所圍成的域  $D$  可用下列不等式定出:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \quad (\text{閉域})$$

或

$$a < x < b, \quad c < y < d \quad (\text{開域}).$$

<sup>①</sup> 閉域的边界是不可能伸到無窮遠的。



因为位於域  $D$  上的任一點的坐标满足这些不等式, 反过来說, 满足这些不等式的任何二數  $x$  及  $y$  乃是域  $D$  上某點的坐标。

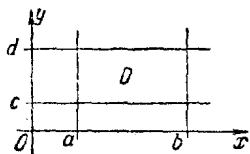


圖 6.

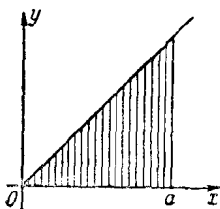


圖 7.

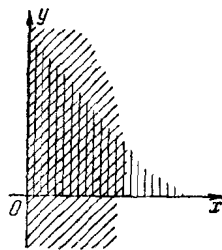


圖 8.

2) 設域  $D$  以中心在原點且半徑等於  $r$  的圓周为界。則域  $D$  可用下列不等式定出:

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad (\text{閉})$$

$$x^2 + y^2 < r^2 \quad (\text{開}).$$

位於第一象限內的那部分圓, 可用如下的一組不等式給出:

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 < r^2, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

3) 以  $Ox$  軸, 第一象限坐标角平分線及直線  $x=a$  为界的域  $D$  (直角三角形, 見圖 7), 可用下列不等式定出:

$$0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq a, \quad \text{或} \quad 0 < y < x, \quad 0 < x < a.$$

4) 取  $Oy$  軸右边的全部半平面作为域  $D$  (圖 8)。这域顯然可用不等式  $x \geq 0$  (或  $x > 0$ ) 給出。而不等式  $x \geq 0, y \geq 0$  (或  $x > 0, y > 0$ ) 則定出  $xOy$  平面的第一象限。(全部平面  $xOy$  用不等式  $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$  作为条件而給出。)

凡是为一个或幾個曲面所圍成的一部分空間叫做空間域。空間域也跟平面域一样可用不等式給出。

三变量函数的定义域通常是个空間域, 其中使函数無定义的个别點、个别線或个别面可能是例外。

II. 定义 凡是使解析式有確定(实)数值的所有那一批點, 叫做