高等学校教学用書

# 數学解析教程

## 第二卷

A. Ф. 別尔曼特著

高等教育出版社

本書係根据苏联國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的别尔曼特（А. Ф. Бермант）著"數学解析教程"（Курс математического анализа）第二卷 1953 年第五版修訂本譯出，1950 年第四版修訂本的中譯本已由重工業出版社出版。原書經苏联文化部高等教育司批准作为高等工業学校教学参考書。

本書第二卷講多变量函數及其微分法、微分法則、重積分、微分方程及三角級數等。


**數学解析教程**

第二卷

書号428(課399)

А. Ф. 别尔曼特 著

張理京 譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号）

新華書店總經售

京華印書局印刷
北京南新華街甲三七号

開本 850×1168 1/32 印張 11 7/16 字數308,000
一九五五年十月北京第一版 印數1—12,000
一九五五年十月北京第一次印刷 定價(7)￥1.43

# 目　　次

# 第十章　多变量函数及其微分法

## §1. 多变量函數

136(151). 函數概念·函數表示法

定义　如果兩个变量的每一对所考慮的數值，对应了另一个变量的一个或幾个數值，那末第三个变量就叫做前兩个变量的函數。

可以任意变動的那兩个变量(它們的值可由我們隨意指定)叫做自变量。

例如，矩形的面積 $S$ 是兩个独立变量——矩形的兩边 $a$ 及 $b$——的函數。这函數的表達式是

$$S=ab.$$

理想气体的体積 $v$ 是其压力 $p$ 及溫度 $T$ 的函數。$v$ 的表達式可以从那含 $v, p$ 及 $T$ 三者的門德雷業夫-克拉配倫方程求出:

$$v=\frac{RT}{p}\ (R=\text{常量}).$$

所謂給出兩个变量的函數(二元函數)，就是指示出下面兩件事：1)自变量所取得的一对一对的全体數值，以及 2)从所給自变量值定出其对应函數值的方法。跟單变量函數的情形一样，双变量函數的最重要的表示法也有三种：1)表格法，2)解析法(用公式)及 3)圖形法。

用表格法表示時，函數是这样規定的：就某些对自变量值，指出它們所对应的函數值。通常这可以用"双口"表格來給定，我們只要看下面

定出了螺旋傳動的效率 $\eta$ 跟摩擦係數 $\mu$ 及螺旋角 $\alpha$ 之間的關係的这个表格(見 Берлов 著"机器零件"),就应該知道这种表格是怎样填製的:

| $\mu$ \ $\alpha$ | $\frac{\pi}{36}$ | $\frac{\pi}{18}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{9}$ | $\frac{5\pi}{36}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 0.897 | 0.945 | 0.961 | 0.970 | 0.974 |
| 0.02 | 0.812 | 0.895 | 0.925 | 0.941 | 0.950 |
| 0.03 | 0.743 | 0.850 | 0.892 | 0.914 | 0.927 |
| 0.04 | 0.683 | 0.809 | 0.861 | 0.888 | 0.904 |
| 0.05 | 0.633 | 0.772 | 0.831 | 0.863 | 0.882 |

跟單变量函數的情形一样，双变量函數的最重要的表示法是**解析表示法**,或即**公式表示法**。

用解析法表示函數時，我們在解析式中指出了自变量値与其对应函數値之間的數学运算關係,以及这些运算的先後次序，換句話説，我們要給出含有三个变量的一个公式(見 n°10)。

例如,下列每个公式

$$z=ax+by+c,\ z=\frac{xy}{x^2+y^2},\ z=\frac{\sin(2x+3y)}{\sqrt{1+(x-y)^2}}$$

都把 $z$ 表示为 $x$ 及 $y$ 的一个函數。

數学解析中的一切处理方法，差不多都是針对着函數的解析表示式的。

双变量函數的圖形表示法我們在 $n°138$ 中要講到的。

---

就任意个自变量的函數來說，它的定义是完全跟双变量函數的定义類似的。

**定义**　如果 $n$ 个自变量的每一批所考慮的 $n$ 个値对应了另一变量的一个或幾个値,最後那个变量就称为前 $n$ 个自变量的函數。

例如，長方体的体積 $V$ 是三个独立变量——長方体的側稜 $a, b, c$

——的函數：

$$V=abc.$$

又如电流所產生的熱量 $Q$ 决定於电压 $E$、电流强度 $I$ 以及時間 $t$，而这些量之間的函數關係則由下面的公式給出：

$$Q=0.24\,IEt.$$

$n(n>2)$个自变量的函數也可以用表格給出，但在 $n=3$ 時，用表格法來給出函數已經非常麻煩。

用解析法表示 $n$ 个变量的函數時，我們在解析式中指出了函數值与 $n$ 个对应自变量值之間的數学运算關係，以及这些运算的先後次序。

例如，底下每个等式

$$u=ax+by+cz+d,\quad u=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

都把 $u$ 給定为 $x, y, z$ 的一个函數。

必要時，我們可把常量看作是任意个自变量的函數，这就是，把常量看作是对於每一批自变量值都保持同一數值的那种函數。

本書中的所有論証，差不多都是只就双变量函數來說的，因为關於多变量函數的相应論証，照例都可以用完全相仿的形式作出。

137(152). 函數的記号及分類　要表示 $u$ 是 $x, y, z, t\cdots$ 的函數時，我們可以这样寫：

$$u=f(x, y, z, t, \cdots);$$

在函數記号(这个記号不只限於字母 $f$，也可用别的字母)後面的括弧裏，我們指出了函數所依賴的一切自变量。

如果讓自变量之一，例如 $x$，保持常數值 $x=a$，而另一自变量 $y$ 仍算作是可变的，那末函數 $z=f(x, y)$ 就变成一个变量 $y$ 的函數：$z=f(a, y)$。同样若使 $y$ 保持常數值 $y=b$，則得一个变量 $x$ 的函數：$z=f(x, b)$。

若双变量函數的每一对所考慮的自变量值对应着一个函數值時，就說那种双变量函數是單值的；若某一对自变量值所对应的函數值多

於一个時，就說函數是多值的。

例如，下列兩个函數

$$z=ax+by+c,\quad z=e^{xy}\sin(x+y)$$

是單値的，而函數

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2},\quad z=\mathrm{Arcsin}(x-y)$$

是多値的，並且其中第一个是双値函數，第二个是"無限多値"函數。

以後，要是沒有別的声明，我們講的都是單値函數。解析学中在用到"多値式子"時，每次總要講究怎样选取对应於函數的單値支。

多变量函數通常可以看作是自变量的複合函數。設 $u$ 已表示为宗量 $t, v, w\cdots$ 的函數：

$$u=\varphi(t, v, w, \cdots),$$

而 $t, v, w, \cdots$ 本身又都是自变量 $x, y, z, \cdots$ 的函數：

$$t=\psi(x, y, z, \cdots),\quad v=\xi(x, y, z, \cdots),\quad w=\eta(x, y, z, \cdots), \cdots$$

於是，$u$ 是自变量 $x, y, z, \cdots$ 的函數，是由上面这一連串函數給定的(連串給出法)。函數

$$u=\varphi[\psi(x, y, z, \cdots),\ \xi(x, y, z, \cdots),\ \eta(x, y, z, \cdots), \cdots]=$$
$$=F(x, y, z, \cdots)$$

叫做自变量 $x, y, z, \cdots$ 的複合函數(函數的函數)。

例如

$$z=e^t\sin v,$$

(其中 $t=xy,\ v=x+y$)便是 $x$ 及 $y$ 兩个自变量的複合函數。

自变量 $x, y, \cdots$ 的複合函數 $u$，可以通过兩批或更多批的中間环節來給定。

直接由若干个宗量來表示的複合函數，可能实际上是个數不同的一些自变量的函數。例如，若函數

$$z=f(u, v)$$

的宗量 $u$ 及 $v$ 都是自变量 $x$ 的函數，也就是，若 $u=\varphi(x),\ v=\psi(x)$,

那末 $z$ 就是一个自变量 $x$ 的複合函數:

$$z=f[\varphi(x),\ \psi(x)]=F(x).$$

在解析学及其应用上所碰到的，常常是以自变量的基本初等函數作为中間环節的那些複合函數。

如果用加、减、乘、除法以及取整數次的乘方來运算各个自变量的値便能求得多变量函數値的，这种多变量函數就叫做**有理函數**。例如，$z=\dfrac{3x^2-5xy+1}{x^2y-y^2-1}$ 就是 $x$ 及 $y$ 的有理函數。

如果在計算有理函數値的時候，無需用那含自变量的式子來除，那末这种有理函數就叫做**整有理函數**或**多項式**。例如，$z=3x^3y-5x^2y^2-y^3+xy-1$ 就是多項式。

一次多項式或**線性函數**

$$z=ax+by+c,\quad u=ax+by+cz+d,\ 等等,$$

因为它很簡單，所以是特別重要的多項式($a, b, c, \cdots$是常量；$x, y, \cdots$是自变量)。

138(153). 多变量函數的幾何意义　表示單变量函數的幾何意义時，我們应用平面。現在表示兩个自变量函數的幾何意义，我們要应用空間。給定这种函數的方程中含有三个变量，而在圖形上表示这三个变量時可用(比方說)空間笛卡兒直角坐标系中的三个坐标軸(圖 1)。

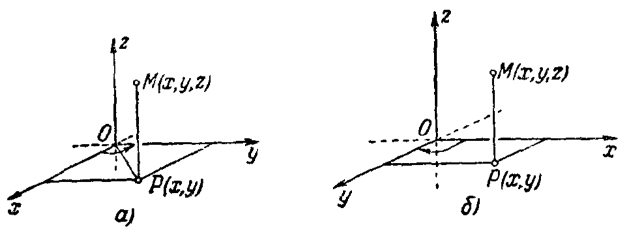


圖 1.

我們要知道，在空間(如在平面的情形一样)有**兩种**根本不同的笛卡兒直角坐标系。这兩种坐标系的差別在於其坐标軸的指向(坐标軸相互間的擺法)不同。在圖 1, $a$ 中所画的是所謂**右手坐标系**，而在圖 1, $б$ 中

的是所謂左手坐标系。

如果从正 $Oz$ 軸的那一边來看 $xOy$ 平面，那末在右手坐标系中，正的半段 $Ox$ 軸是以反時針方向取最短路徑轉到正的半段 $Oy$ 軸上去的。在左手坐标系中，上面所說的那种旋轉方向是跟時針的旋轉方向相合的。如果按大指、食指、中指的次序分别跟 $Ox, Oy, Oz$ 这三个坐标軸对应起來，那末在右手的这三个手指就形成右手坐标系，在左手的这三个手指就形成左手坐标系。

在解析学的許多問題中，用哪一种(右手的或左手的)坐标系是根本沒有關係的。但是在有一些問題中，由所取坐标系所規定的空間"指向"就很重要。由於平面坐标系平常都是取右手系的(从上往下看平面)，所以我們的空間坐标系也选取右手系(見圖 1, $a$)。

設已給兩个自变量 $x$ 及 $y$ 的函數 $z$。我們知道这函數的幾何形象(或者說它的圖形)是空間具有特种坐标的一些點(以自变量 $x$ 及 $y$ 的值为横坐标及縱坐标，以兩者的对应函數值 $z$ 为竪坐标的一些點)的軌跡。自变量 $x$ 及 $y$ 的每一对數值，都在 $xOy$ 平面上定出一點 $P(x, y)$；在點 $P$ 处垂直於 $xOy$ 平面且表示函數值的那个線段的端點，就是表示自变量值及函數值三者的那个點 $M(x, y, z)$(見圖 1)。跟一切可能的 $(x, y)$ 值相对应的，也就是說，跟 $xOy$ 平面上點 $P$ 的一切可能位置相对应的空間所有这种點 $M$，就構成了函數的幾何形象(圖形)。在平常的情形下，这幾何形象是个曲面。

反过來說，在备有坐标系的空間給出了曲面之後，我們就把 $z$ 定为 $x$ 及 $y$ 的一个函數。因为这曲面上點的竪坐标是由横坐标及縱坐标決定的，就是說，曲面上點的竪坐标乃是横坐标和縱坐标的函數。在这种情形下，我們說函數 $z=f(x, y)$ 是由圖形給定的。

如果函數是由解析式 $z=f(x, y)$ 來給定的，那末这解析式便是曲面(所給函數的圖形)的方程。

例如，函數

$$z=\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}$$

的圖形是橢球面的上半部(圖 2),其中心在原點,半軸長为 $a, b, c$, 且各位於 $Ox, Oy, Oz$ 軸上,因为關係式

$$z=\pm\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}\quad\left(\text{或}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$$

就是这橢球面的方程。函數

$$z=x^2+y^2$$

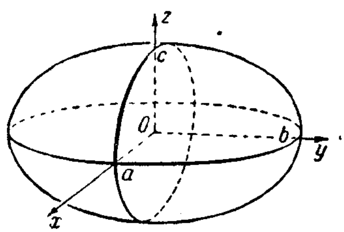


圖 2.

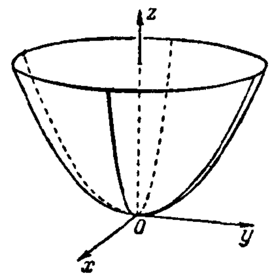


圖 3.

表示旋轉拋物面(圖 3),因这拋物面的方程是 $z=x^2+y^2$。線性函數

$$z=ax+by+c$$

表示平面;特別是对应於方程 $z=c$($c$ 为常數)的乃是平行於坐标面 $xOy$ 的平面。

所以,正如單变量函數与平面曲線之間的關係一样,双变量函數与空間曲面之間也有互相对应的關係:每个函數通常可用某个曲面表示,每个曲面定出某个函數。

函數的單値性在幾何上表示为这样的一件事实:垂直於 $xOy$ 的任一直線,与表示函數的那个曲面相交不多於一點。

---

現在,我們可以給任意个自变量的函數都作出一致的幾何解釋。这裏,像已往所規定的一样,我們假定所説的函數都是單値的。

拿函數 $y=f(x)$ 來説。它的自变量 $x$ 是用直線上($Ox$ 軸)移動的點

$P(x)$來表示的，而自变量的对应函數值 $y$ 是用 $P$ 點处垂直於 $Ox$ 軸的線段來表示的。

在函數 $z=f(x, y)$的情形下，$x$ 和 $y$ 两个自变量合在一起也是用點 $P(x, y)$來表示的，不过这个點現在是在平面($xOy$ 平面)上移動的了，而对应的函數值 $z$ 則用點 $P$ 处垂直於 $xOy$ 平面的線段來表示。

定义 如果點 $P$ 的每一个位置对应了某个量的確定值，那末該量就叫做動點 $P$ 的函數。

因此，在上面所講的兩种情形下，我們都可以把函數看作是點 $P$ 的函數：

$$y=f(P), \quad z=f(P),$$

不过在第一种情形下，这个點 $P$ (函數的宗量)只是在直線上移動的，而在第二种情形下則是在平面上移動的。

三个自变量的函數也可以看作是點的函數，这就是，看作是在三維空間(普通空間)內移動的點 $P(x, y, z)$的函數：

$$u=f(P)=f(x, y, z).$$

至於要講到这种函數的相仿於單变量函數及双变量函數的幾何表示法，那末我們就必須用到四維空間。講到四維空間这个詞，我們是把它理解为 $x, y, z$ 及 $u$ 这四者一切可能值的集合，而集合中每一批这样的四个數，就是这四維空間中的一點。这样，三維空間內點 $P(x, y, z)$(函數的宗量)的每一个所論位置，都对应了四維空間內的一點 $M(x, y, z, u)$，而該點 $M$ 則表示那包含三个自变量值及其对应函數值四者的一批數。

对於四个自变量、五个自变量的函數及一般任意個自变量的函數來說，情形也相類似。$n$ 个自变量 $x, y, z, \cdots t$ 的函數 $u$ 是 $n$ 維空間內的動點 $P$ 的函數：

$$u=f(P)=f(x, y, z, \cdots t).$$

不过即使就双变量函數來說，已經由於我們对於空間直觀能力的限制与不可能描出空間的緣故，而不易直接应用双变量函數的幾何意义。所以我們研究双变量或多变量函數時，通常總想法把它化成單变量函數的研究(見 n°143)。

設已給函數 $z=f(x,y)$。假定自变量之一(如 $x$)保持不变：$x=x_0$。这样就限制了點 $P(x,y)$ 移動的自由度——它只能在 $xOy$ 平面的直線 $x=x_0$ 上移動。於是得到單变量函數：

$$z=f(P)=f(x_0,y);$$

从幾何上講，$x=x_0$ 这个条件意味着用平面 $x=x_0$ 來截那表示了函數 $z=f(x,y)$ 的曲面；設相截的結果在截面上得一平面曲線 $AB$(圖 4)。等式 $z=f(x_0,y)$ 是曲線 $AB$ 在 $yOz$ 平面上的正投影的方程。

同样，函數

$$z=f(P)=f(x,y_0)$$

的宗量 $P$ 是只能在 $xOy$ 平面的直線 $y=y_0$ 上移動的。这个單变量函數的圖形是曲線 $CD$(曲面与平面 $y=y_0$ 的截線，圖 4)在 $xOz$ 平面上的正投影。

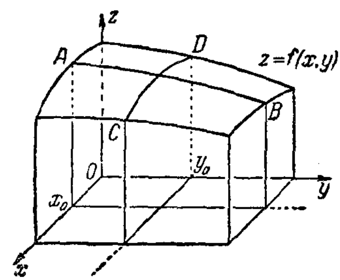


圖 4.

## § 2. 函數的最簡單的研究

139(154). 函數的定义域·域的概念

I. 如果 $xOy$ 平面上的點 $P(x,y)$ 按某种法則对应了函數 $z$ 的值，我們就說函數 $z=f(x,y)$ 在點 $P(x,y)$ 处有定义。

定义 $xOy$ 平面上凡是使函數 $z=f(x,y)$ 有定义的所有那一批點，叫做該函數的定义域(或存在域)。

定义域可以是平面上任何样的一批點，不过，在解析学中所考慮的函數，通常都是定义在平面上被一曲線或若干曲線所圍成的某部分區域上(該區域內的个別點或个別線上，函數沒有定义的地方，可能要除外)。

定义 平面上为一曲線或若干曲線(这些曲線可以伸到無窮远)所圍的部分叫做域，而包圍域的曲線叫做它的边界。

如果把边界跟域連在一起，这域就叫閉域❶，如果边界不算在域裏面，这域就叫開域（在無需區別这兩种情形的問題裏，我們只說“域”）。

如果域內任意兩點可用全部位在域內的連續曲線（比方說，用折線）連接起來的，这种域叫做連域。

如果連域的边界由一根連續曲線構成，这連域叫做單連域（圖 5, $a$）。單連域还有这麼一个特點：域內的任何閉曲線，都可以在連續变形之後收縮为域內的一點，而無需通过不屬於該域的點。如圓就是單連域的典型例子。如果連域的边界是由兩条隔開的連續曲線（在特殊情形下，其中之一可能是一點）組成的，这連域就叫做双連域（圖 5, б）。双連域的典型例子是圓环（在特殊情形下，是除掉圓心的圓）。

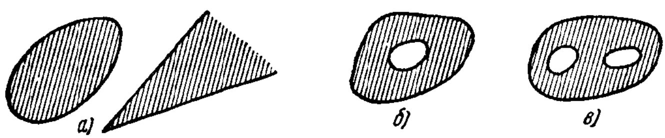


圖 5.

如果連域的边界是三条隔開的連續曲線，这連域就叫三連域（圖 5, в），其餘類推。

定义 以所給點为圓心而半徑等於 $r$ 的圓，叫做那所給點的 $r$-鄰域。

$xOy$ 平面上的域，如同 $Ox$ 軸上的區間一样，也可用一个或幾个不等式來給定。

例如：

1）拿各边在直線 $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ 上的矩形（圖 6）來說。这矩形所圍成的域 $D$ 可用下列不等式定出：

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d\ \text{（閉域）}$$

或

$$a< x< b,\quad c< y< d\ \text{（開域）。}$$

❶ 閉域的边界是不可能伸到無窮远的。

因为位於域 $D$ 上的任一點的坐标满足这些不等式，反过來說，满足这些不等式的任何二数 $x$ 及 $y$ 乃是域 $D$ 上某點的坐标。

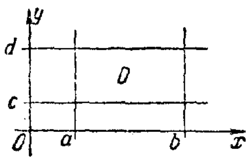


圖 6.

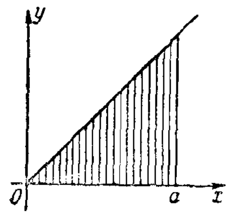


圖 7.

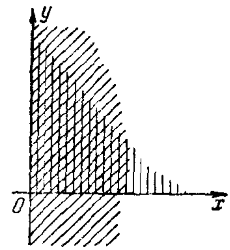


圖 8.

2）設域 $D$ 以中心在原點且半徑等於 $r$ 的圓周为界。則域 $D$ 可用下列不等式定出：

$$x^2+y^2\leqslant r^2 \ (\text{閉})$$
$$x^2+y^2<r^2 \ (\text{開})。$$

位於第一象限內的那部分圓，可用如下的一組不等式給出：

$$x^2+y^2\leqslant r^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \ \text{或}\ x^2+y^2<r^2,\ x>0,\ y>0.$$

3）以 $Ox$ 軸，第一象限坐标角平分線及直線 $x=a$ 为界的域 $D$(直角三角形，見圖 7)，可用下列不等式定出：

$$0\leqslant y\leqslant x,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ \text{或}\ 0<y<x,\ 0<x<a.$$

4）取 $Oy$ 軸右边的全部半平面作为域 $D$(圖 8)。这域顯然可用不等式 $x\geqslant 0$(或 $x>0$)給出。而不等式 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$(或 $x>0, y>0$)則定出 $xOy$ 平面的第一象限。(全部平面 $xOy$ 用不等式 $-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$ 作为条件而給出。)

凡是为一个或幾个曲面所圍成的一部分空間叫做空間域。空間域也跟平面域一样可用不等式給出。

三变量函數的定义域通常是个空間域，其中使函數無定义的个别點、个別線或个別面可能是例外。

II. 定义　凡是使解析式有確定(实)數值的所有那一批點，叫做