上卷 第二版

自动调节理论的数学基础

〔苏联〕 Б·К·切莫达诺夫 主编

ZIDONG TIAOJIE LILUN
DE SHUXUE JICHU

化学工业出版社

自动调节理论的数学基础

上 卷

第 二 版

〔苏联〕 Б.К.切莫达诺夫 主编
孙 义 鹄 译

化 学 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书（上卷）介绍矩阵演算和线性代数的必要的概念，并着重介绍描述许多自动调节系统中过程的微分方程理论以及复变函数理论基础，对于数学问题的叙述是与自动调节理论基本问题的研究同时进行的。

本书可供专门从事自动调节工作的科研和工程技术人员、高等院校自控专业及其他有关专业师生阅读和参考。

Под Редакцией Б. К. Чемоданова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Том Ⅰ. Изд. 2-е

М., «Высш. школа», 1977.

自动调节理论的数学基础

上 卷

第 二 版

孙 义 编 译

责任编辑：任文斗

封面设计：任 辉

化学工业出版社出版

（北京和平里七区十六号楼）

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本787×1092 1/16 印张19字数466千字印数1—4,220

1986年8月北京第1版1986年8月北京第1次印刷

统一书号15063·3783定价3.95元

目　录

第三篇 复变函数理论基础

第一篇　矩阵演算和线性代数的基本原理

第1章　矩阵和线性方程

§1. 数值矩阵及其运算

1. 基本概念及定义　由m行和n列构成的表称为m×n维矩形矩阵，其形如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \triangleq [a_{ij}]. \tag{1}$$

在这个表中，元素的第一个注脚表示元素所在行的编号，而第二个注脚表示元素所在列的编号。例如，元素a_{ij}位于第i行第j列。矩阵的元素a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)可以是实数或复数。

当m=n时，矩阵称为方阵，这样的矩阵具有形式

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

同样维数的矩阵A和B，如果它们的相应元素是相等的，则矩阵A和B称为是相等的。设$A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，如果$a_{ij}=b_{ij}$ ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)，这时，A=B。

通常，矩阵用大写拉丁字母A，B，C等来表示。

由矩阵A，用它的列来代替它的行的方法而得到的n×m维矩阵，称为m×n维矩阵A的转置矩阵A^T，即，如果

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

那么，转置矩阵是

$$A^T=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

我们考察矩阵的代数运算。

设矩阵A和B的维数m×n是相同的，若有同样维数的第三个矩阵C，它的各元素等于原来的矩阵A与B的相应元素的和，则矩阵C称为矩阵A与B的和，即

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

设矩阵C和矩阵A的维数相同，而它的各元素等于矩阵A的相应元素与数 λ 的乘积，则矩阵C称为矩阵A与数 λ 的乘积（或数 λ 与矩阵A的乘积）：

$$C=A\lambda=\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

设有矩阵C，它的各元素是按公式

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m_1;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_2) \tag{7}$$

来确定的，这样的矩阵C称为 $m_1\times n_1$ 维矩阵A与 $m_2\times n_2$ 维矩阵B的乘积（乘积是在 $n_1=m_2$ 条件下，即在被乘数的列数等于乘数的行数时确定出来的），因此，

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m_11} & a_{m_12} & \cdots & a_{m_1n_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n_2} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m_21} & b_{m_22} & \cdots & b_{m_2n_2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{1k}b_{kn_2} \\ \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{2k}b_{kn_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{m_1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{m_1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n_1=m_2} a_{m_1k}b_{kn_2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

例1 已知矩阵A和B：$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，求这两个矩阵的乘积 $C=AB$。

根据等式（8），有

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+9 & 4+12 & 2+6 \\ 5+3 & 10+4 & 5+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 16 & 8 \\ 8 & 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

在许多情况下，需计算两个矩阵乘积的转置矩阵。我们证明等式

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

的正确性。

设$\mathbf{A}=[a_{ij}]$，$\mathbf{B}=[b_{ij}]$；根据等式（7），$\mathbf{AB}=\left[\sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}b_{kj}\right]$，而根据等式（4），

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\left[\sum_{k=1}^{n_1} a_{jk}b_{ki}\right].$$

对于转置矩阵$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=[b_{ji}]$和$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=[a_{ji}]$，相类似地可以求出$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{n_1} b_{ki}a_{jk}$。

得出的（$\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$的表达式和$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的表达式证明了等式（9）的正确性。

2．矩阵的性质　我们就上面介绍过的加法和乘法运算来叙述矩阵的某些性质。

1．矩阵的加法运算具有可交换性质，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}. \tag{10}$$

2．矩阵的加法运算具有结合性质，即

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}. \tag{11}$$

由性质1和2可以看出，当有限个矩阵相加时，被加数可按任何一种次序写出，而决定相加次序的括号可任意放置。

3．存在着这样的唯一的矩阵$\mathbf{X}$，即如果把它加在任何一个矩阵$\mathbf{A}$上，则矩阵$\mathbf{A}$不发生变化，就是说

$$\mathbf{A}+\mathbf{X}=\mathbf{A}. \tag{12}$$

满足条件（12）的矩阵是唯一的，该矩阵的所有元素都为零，这样的矩阵称为零矩阵并记作0，即

$$\mathbf{X}=0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

4．对于任何一个矩阵$\mathbf{A}$，存在着这样的唯一的矩阵$\mathbf{B}$，即这两个矩阵的和等于零矩阵，就是说

$$\mathbf{A}+\mathbf{Y}=0. \tag{14}$$

矩阵$\mathbf{Y}$的所有元素等于矩阵$\mathbf{A}$的所有元素，但具有相反的符号，因此

$$\mathbf{A}+\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}=0.$$

把矩阵$\mathbf{Y}$记作$-\mathbf{A}$并称为矩阵$\mathbf{A}$的负矩阵，即

$$-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

这样的矩阵C称为维数相同的两个矩阵的差$\mathbf{A}-\mathbf{B}$，对于矩阵C，有等式$\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}$。差恒存在且等于和$\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$。实际上，

$$\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{B}+[\mathbf{A}+(-\mathbf{B})]=\mathbf{B}+[(-\mathbf{B})+\mathbf{A}]=$$
$$=[\mathbf{B}+(-\mathbf{B})]+\mathbf{A}=0+\mathbf{A}=\mathbf{A},$$

即，选出的矩阵C满足差的定义。

5．如果a和b为常数，A为矩阵，那么，有关系式

$$a(b\mathbf{A})=(ab)\mathbf{A}=b(a\mathbf{A}). \tag{16}$$

6．如果a为常数，A和B为维数相同的矩阵，那么，有关系式

$$a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}. \tag{17}$$

7．如果a和b为常数，A为矩阵，那么，有关系式

$$(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}. \tag{18}$$

8．1与任何矩阵相乘不会改变这个矩阵，即

$$1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}. \tag{19}$$

9．如果a为常数，A和B分别是$m_1\times n_1$和$m_2\times n_2$（$n_1=m_2$）维矩阵，那么，有关系式

$$a(\mathbf{AB})=(a\mathbf{A})\mathbf{B}. \tag{20}$$

10．矩阵的乘法运算具有结合性质（当矩阵相乘时，确定相乘次序的括号可以任意放置），即

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}. \tag{21}$$

式中矩阵A，B和C的维数分别为$m_1\times n_1$，$n_1\times n_2$，$n_2\times n_3$。

11．在所有$n\times n$维矩阵中，存在着这样的唯一的矩阵E，即它的左面或右面乘以任意方阵A不会改变矩阵A，就是说

$$\mathbf{AE}=\mathbf{EA}. \tag{22}$$

用矩阵A与矩阵E直接相乘的方法，很容易验证，分布在主对角线上的元素等于1，而其余的元素均等于零的矩阵是满足等式（22）的矩阵E，即

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

矩阵E称为单位矩阵。

在对角线上分布着同样的元素，而其余元素均等于零的这样的矩阵称为纯量矩阵。注意到等式（23），容易看出，

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{E}. \tag{24}$$

12．矩阵的乘法运算对于加法具有分配性质，即

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}. \tag{25}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{CA}+\mathbf{CB}. \tag{26}$$

由性质4可以得出结论，矩阵的乘法对于减法是可分配的，即

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}-\mathbf{BC}. \tag{27}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{CA}-\mathbf{CB}. \tag{28}$$

13．数值因子α可以放在任何一个矩阵因子旁边，即

$$\alpha(\mathbf{AB})=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}). \tag{29}$$

若把矩阵写成表的形式并对它们实现所指出的运算，则很容易证实上述矩阵性质的正确性。

矩阵的乘法运算不具有交换的性质。实际上，设已知两个矩阵**A**和**B**：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

这时，

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA}=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{bmatrix},$$

由此可以得出结论，$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$。

当矩阵**A**和**B**相乘时，需指明实现乘法运算的次序。例如，如果出现乘积**AB**，则表明矩阵**B**的左面乘以矩阵**A**，而如果出现乘积**BA**，则表明矩阵**B**的右面乘以矩阵**A**。

设有这样一个矩阵，它由一个列所组成，即，它的维数为$n\times1$，

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{30}$$

这时，单列的转置矩阵由一个行所组成（具有$1\times n$维）：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots x_n]. \tag{31}$$

把由一个列或由一个行所组成的矩阵称为算术向量。显然，作为矩阵的一种特殊形式，向量具有矩阵的所有性质。

§2. 行列式及其性质

1．**反序及排列** 设已给定n个自然数1，2，3，…，n。通过使这个数列的各个元素改变位置的方法，可以得到由n个元素组成的n!个所有可能的组合。按一定的次序而出现的由n个不同元素组成的每一个组合称为这n个元素的排列。例如，对于三个数1，2，3，可得3!＝6个排列：

123，132，213，231，312，321.

排列中较大的数目出现在较小数目之前的那种情况，称为反序。两个数在排列中，如果较大的数排在较小的数之前，则构成反序。例如，在排列132中，有一个反序，而在排列321中，有三个反序。

为计算任何一个排列中反序的个数，需按增长的次序逐个查看排列的元素，每一次计算出位于查看的元素之前且大于这个元素值的元素的个数。把所得的结果相加，即可求得反序的个数。排列中反序的个数是以粗体方括号把这个排列封闭起来的方式来表示的；例如，可以写出：

$$[132]=1,\ [321]=3,\ [51324]=5.$$

如果排列具有偶数个反序，那么，排列就称为偶排列；如果反序的个数为奇数，那么，排列就称为奇排列。

改变排列的两个数码位置的这种作法称为对换。

定理1. 对换使排列的奇偶性变更。

证 我们考察由n个元素：$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots\alpha_n$组成的排列。设对换是在元素$\alpha_i$与$\alpha_j$间实现的。在对换之后，元素$\alpha_i$和$\alpha_j$与位于$\alpha_i$左方的元素形成的反序数不变。分布在$\alpha_j$右方的元素的反序数也不改变。用m来表示分布在$\alpha_i$和$\alpha_j$之间元素的个数。设在对换之前，这m个元素中有$\mu$个与元素$\alpha$构成反序，而有$\nu$个元素与元素$\alpha_i$没有构成反序。又设有$\mu_1$个元素与$\alpha_j$构成反序，而有$\nu_1$个元素与$\alpha_j$没有构成反序。显然，$\mu+\nu=\mu_1+\nu_1=m$，即

$$\nu=m-\mu,\quad \nu_1=m-\mu_1. \tag{1}$$

在对换之后，分布在α_i与α_j之间且原先与α_i或α_j构成反序的元素将不再具有反序，反之亦然。此外，在对换之后，如果$\alpha_i<\alpha_j$，则使α_i与α_j之间的反序增加；又如果$\alpha_j<\alpha_i$，则对换使α_i与α_j之间的反序消失。于是，在对换之后，反序个数变化了数值

$$[(\mu+\mu_1)-(\nu+\nu_1)]\pm 1. \tag{2}$$

由式（2）及（1）可以得出结论，在对换之后，反序个数的变化等于

$$2(\mu+\mu_1-m)\pm 1, \tag{3}$$

即，对换之后，反序个数的变化是奇数的。■❶

2. n阶行列式 我们考察n×n维方阵，即由n^2个元素组成的表：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

我们引入下列定义。在n×n维方阵的每一行及每一列中各取出其中一个元素，且仅各取出其中一个元素，把这些元素的所有可能乘积的代数和称为n×n维方阵的n阶行列式，其中，每一个被加数的符号由因子项的第一个及第二个脚码组成的排列中反序个数所决定；如果反序数是偶数，则被加数是正的，如果是奇数，则被加数是负的。

对于行列式，引入符号

---

❶ ■表示任何一个命题证毕的记号。

$$\det\mathbf{A}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

根据定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{s+t}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{6}$$

式中 s 为由第一个脚码组成的排列$i_1i_2\cdots i_n$中反序个数；而 t 为由第二个脚码组成的排列$j_1j_2\cdots j_n$中反序个数（$s=[i_1i_2\cdots i_n]$，$t=[j_1j_2\cdots j_n]$）。

我们来证明，如果行列式的任何一个被加数中，使两个因子的位置互换，那么，这个被加数的符号不变。实际上，根据定理 1，当两个因子对换时，由第一个及第二个脚码组成的排列改变了自己的奇偶性，而和的奇偶性不变。这样，依次改变一对因子的位置，总可以使行列式每一个被加数的诸因子的第一个脚码按增长次序而排列。在这种情况下，每一个被加数的符号不变，因而，可把行列式的表达式写成一般的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{7}$$

我们举几个例子。

例1 计算二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{0+0}a_{11}a_{22}+(-1)^{0+1}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{8}$$

例2 计算三阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=(-1)^{0+0}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{0+2}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{2+0}a_{21}a_{32}a_{13}\\ &\quad+(-1)^{0+3}a_{13}a_{22}a_{31}+(-1)^{0+1}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{2+3}a_{23}a_{32}a_{11}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.\end{aligned} \tag{9}$$

由举出的这两个例子可以看出，上面得到的 n 阶行列式的概念概括了高等学校的高等数学教程中大家所熟知的二阶和三阶行列式的概念。

3. 行列式的性质 没有一个简单的法则可用来计算高阶行列式。这样的行列式是根据下列性质来进行计算的。

1. 如果在行列式中行用列来代替，同时保持它们出现的顺序，那么，行列式的值不变。换言之，方阵的行列式等于与它相对应的转置矩阵。

我们考察两个行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{和} \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这两个行列式彼此的差别在于：它们之中一个的列是另一个的同名行（就出现的顺序而言）。我们从行列式D中取出任意一个被加数$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$；它也是行列式Δ的被加数，因为在这个被加数中包含有每一行和每一列的诸元素，且这些元素各只包含有一个，同时，由第一个及第二个脚码组成的排列中反序的和具有同样的奇偶性。这样，行列式D的所有被加数以同样的符号包含在行列式Δ中，由此可以得出结论，D＝Δ。

所以，如果行列式的行具有某种性质，那么，行列式的列也具有同样的性质。因此，今后我们只就行列式的行来陈述行列式的所有性质。■

2. 如果行列式之其中一行是零，那么，行列式等于零。

事实上，行列式的每一个被加数是从每一行中取出的诸元素的乘积；因而，在每一个被加数中包含有零元素，而因为行列式等于诸元素的乘积的和，所以这个行列式等于零。■

3. 如果在行列式中把两行的位置互换，那么，行列式的绝对值不变，而行列式的符号变成反号。

我们考察下列两个行列式，在这两个行列式中行i和k互换位置：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{和}\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

选出行列式D的任意一个被加数$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$。这个被加数也是第二个行列式Δ的被加数。然而，因为行列式Δ中各列仍然是行列式D所具有的各列，而两行位置互换，所以，由元素的第二个脚码组成的排列，对于两个行列式来说，具有同样的奇偶性，而由第一个脚码组成的排列中反序个数相差1，即奇偶性发生变化。因而，两个行列式所有的被加数绝对值是相同的，但是具有相反的符号，即Δ＝－D。■

4. 两行相同的任一行列式等于零。

设D为具有相同两行的行列式。把这两项位置互换，这时，一方面，根据前一性质，新的行列式Δ＝－D，另一方面，因为当一行用相同的另一行来代替时，行列式不变。这只有当D＝0时才有可能。■

5. 如果行列式任何一行的元素具有公因子，那么，这个公因子可以移到行列式符号外面。

实际上，根据定义，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ma_{k1} & ma_{k2} & \cdots & ma_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots ma_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=m\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}=m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

由此可以得出结论，为了把行列式乘以某一常数m，只需把行列式的任何一行或任何一列的所有元素乘以这个常数即可。

6．任何两行成比例的行列式等于零。

设行列式D的第 j 行元素等于第 i 行元素乘以常数m；这时，由性质4和5直接可以得出性质 6 的正确性。■

7．如果行列式的某 i 行是两个被加数的和，那么，该行列式可分成同阶的两个行列式的和，其中，第一个被加数可作为第一个行列式中第 i 行元素，而第二个被加数可作为第二个行列式中第 i 行元素，其余各行仍是与原行列式相同的行。

我们考察行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{kj_k}+c_{kj_k})\cdots a_{nj_n}.$$

若实现乘法运算并把结果分成两个和，则可求得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^t(a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{kj_k}\cdots a_{nj_n}+a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{kj_k}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{1} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

8．如果把行列式的任何一行加上行列式的乘以某一常数的另一行，则行列式的值不变。

我们把行列式D的第 i 行加上它的第 j 行并把进行这种变换之后所得的行列式记作 Δ：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ma_{k1} & a_{i2}+ma_{k2} & \cdots & a_{in}+ma_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D+mD_1.$$

根据性质6，$D_1=0$，因此，$\Delta=D$。■

由性质 8 可以得出结论，如果行列式的任何一行是其它各行的线性组合[1]，那么，这个行列式等于零。

4．子式和代数余子式 我们考察 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在这个行列式中任意选定 k 行和 k 列（$1\leqslant k\leqslant n$）。由处于选定的诸行和列的交点的元素，可以组成 k 阶行列式，我们把它称为行列式D的 k 阶子式。然后，在求得的行列式中划去所选定的 k 行和 k 列，这时，由余下的元素可组成（$n-k$）阶行列式，我们把它称为行列式D的余子式。把子式记作M，而把余子式记作$\overline{M}$。

例3 对行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

的第二行和第四行以及第一列和第三列，计算子式M和余子式$\overline{M}$。

在行列式D中选定第二行和第四行，第一列和第三列，这时

$$M=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad \overline{M}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

---

[1] 某些元素的线性组合是这些元素与任意常数的乘积的和。

设a_{ij}为行列式D的某一元素（显然，一阶子式是行列式的元素）。行列式D的元素的代数余子式，指的是以$(-1)^{i+j}$符号取出的元素a_{ij}的余子式，这里i为选定的行的编号，而j为列的编号。把代数余子式记作A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\overline{M}$。

例4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中代数余子式A_{21}。

利用代数余子式定义，有

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理2. 行列式的某一元素a_{ij}与它的代数余子式A_{ij}的乘积等于行列式D的所有可能的被加数的代数和，a_{ij}作为公因子包含在这些被加数中。

证 我们考察行列式的所有可能的被加数的代数和，这些被加数具有公因子a_{ij}并带有它们在原来行列式D中所带有的相同符号。把这个和记作S，这时

$$S=\sum(-1)^{s+t}a_{ij}a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{i-1\lambda}a_{i+1\mu}\cdots a_{n\rho},$$

式中序列$\alpha\beta\cdots\rho$的诸元素取数列$1\ 2\cdots j-1\ j+1\cdots n$中的值。用t表示由和S中被加数的各元素的第一个脚码组成的排列中反序个数，而用s表示由第二个脚码组成的排列中反序个数：

$$s=[i\ 1\ 2\cdots i-1\ i+1\cdots n]=i-1;$$

$$t=[j\alpha\beta\cdots\lambda\mu\cdots\rho]=j-1+[\alpha\beta\cdots\lambda\mu\cdots\rho]=j-1+t',$$

式中 $t'=[\alpha\beta\cdots\lambda\mu\cdots\rho]$。

若把反序个数相加，则可求得$s+t=i+j+t'-2$，由此

$$(-1)^{s+t}=(-1)^{(i+j)+t'-2}=(-1)^{i+j}(-1)^{t'}.$$

如果把这个值代入到和S中去，那么，可得

$$S=\sum(-1)^{i+j}(-1)^{t'}a_{ij}a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{i-1\lambda}a_{i+1\mu}\cdots a_{n\rho}$$
$$=(-1)^{i+j}a_{ij}\sum(-1)^{t'}a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{i-1\lambda}a_{i+1\mu}\cdots a_{n\rho}.$$

包含在最后一个等式右方的和中，由第一个脚码组成的排列没有反序，而由第二个脚码组成的排列具有t'个反序，因此，$S=(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_{ij}=a_{ij}A_{ij}$。■

下列定理确定了按行或列的元素来展开行列式的可能性。

定理3. 任何一个行列式可以表示成任何一行或任何一列的元素与相应的代数余子式的乘积的和，即，如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

那么，有等式

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}, \tag{10}$$