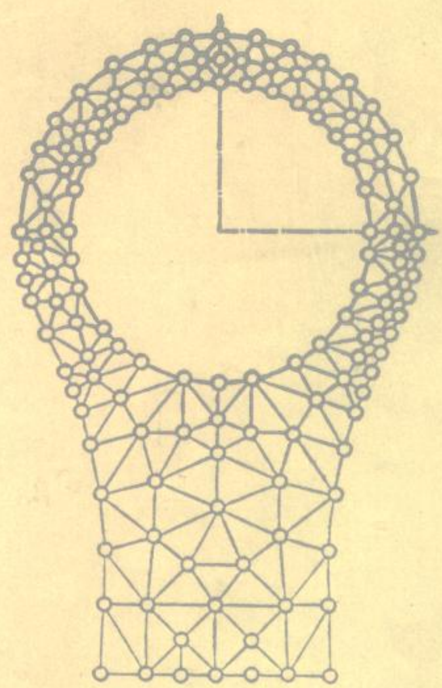
蒋友谅编

# 有限元法基础



国防工业出版社

# 有 限 元 法 基 础

蒋友谅 编

国 防 工 业 出 版 社

## 内 容 简 介

本书主要针对弹性力学平面问题、轴对称问题和稳定温度场，介绍了有限元法的基本原理、程序设计与工程应用。书中力学概念通俗易懂，数学推导比较详细，深入浅出，便于自学。可供造船、机械和其它工程技术人员及有关工科专业大学生学习有限元法时的参考。

有 限 元 法 基 础

蒋 友 谅 编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

上海商务印刷厂排版　　国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张 18 5/8　444 千字

1980 年 12 月第一版　1980 年 12 月第一次印刷　印数：0,001— 4,800 册

统一书号：15034·2015　　定价：1.95 元

# 前　言

有限元法是六十年代初期随着电子计算机的发展而发展起来的一种新的数值计算方法。它的理论基础牢靠，物理概念直观，解题效能高，适用性强。目前，不但可用来解决固体力学中的大部分问题，而且已经渗透到流体力学、热传导与电磁学等其它学科，成为偏微分方程数值解的有效手段。有限元法起初应用于航空工程，由于该方法的有效性，后来便迅速而广泛地应用于造船、建筑与机械等各种工程技术领域。

为了推广与普及有限元法，编者在有限元法初级学习班讲义的基础上，根据教学实践经验，经过修改和补充，编成本书。书中力求以通俗易懂的力学概念和较为详细的数学推导，深入浅出地向一般工程技术人员和工科专业大学生介绍一点有限元法的基础知识，使读者初步掌握一些有限元法的基本原理、程序设计和在工程中的用法，并为读者进一步学习有限元法打一点基础。

考虑到有些读者可能没有学过矩阵代数或弹性力学，所以本书第一、二章介绍了书中用到的一些矩阵代数和弹性力学有关知识。对未学过这两方面知识的读者来说，可供学习之用，对学过这两方面知识的读者来说，可供复习或查阅之用。

由于平面问题与轴对称问题是弹性力学中比较简单的问题；三节点三角形单元是有限元法中比较常用的单元，所以本书第三、五章针对三节点三角形单元，比较详细地介绍了平面问题与轴对称问题的有限元法，这是本书的两个主要内容。另外，为了使读者对其它单元型式有所了解，在第四章中还以平面问题为例，简单介绍了六节点三角形单元和四节点矩形单元及其有关问题。

鉴于大多数读者对结构力学比较熟悉，所以本书第三、四、五章一律按结构力学方法进行分析。但是，为了给读者进一步深入学习有限元法和阅读有关文献资料打一点基础，本书第六章还介绍了一点变分原理和基于变分原理的有限元法，其中对非结构问题的稳定温度场计算进行了比较详细的分析和讨论。

由于程序设计是有限元法工程应用的前提条件，所以本书第七章以DJS-8机FORTRAN语言为例，针对平面问题三节点三角形单元，比较详细地介绍了有限元法程序设计的几个基本问题，这是本书的第三个主要内容。另外，为了便于读者复习或查阅 FORTRAN 语言的一些规定，本书附录一摘录了 FORTRAN 语言的主要部分；为了使读者对用第七章方法所编源程序有一个全面而系统的了解，本书附录二列出了两个有限元法源程序。

对一般工程技术人员来说，学习有限元法主要是为了应用。所以本书第八章讨论了应用有限元法的几个具体问题，介绍了几个工程应用实例。其中§8-2数据检查的程序设计可与附录二中数据检查源程序对照学习。

本书原稿承蒙北京工业学院王崇宇、蒋维城、薛大为、蔡坪等同志以及陈志强同志的认真审阅和热情帮助，这里表示衷心的感谢。

书中电算程序部分系参考北京大学数学系所编程序经修改、编写而成，几个工程应用实例是选自《内燃机结构强度研究》(机械工业出版社，77年版)书中有关上海交通大学、沪东

造船厂和上海柴油机厂等单位的资料，在此一并说明。

限于编者水平，本书肯定有不少缺点和错误，恳切希望读者批评指正。

编　　者

# 目　录

# 第一章　矩阵代数的有关知识

## §1-1　矩阵的概念

在有限元法中，用矩阵代数进行分析与计算，不但非常简洁，方便，而且也最适合于编写电子计算机程序。

矩阵的概念与其它数学概念一样，也是从实践中产生的。为了便于认识矩阵，我们先举一个简单例子。

**例 1**　工厂库房每天分发电器元件，要把各车间各班组所需各种元件的件数排列成表，便于分发。如某车间有四个组，各组每天所需各种元件的件数如下：

| 组　别 | 甲种元件 | 乙种元件 | 丙种元件 |
|---|---|---|---|
| I | 5 | 4 | 3 |
| II | 5 | 3 | 4 |
| III | 4 | 4 | 2 |
| IV | 5 | 5 | 0 |

它也可以用数表形式简单地表示为

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}。$$

这种由数字排成的矩形数表，在数学上称为矩阵。

(1)　矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数按照一定方式排成 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

我们称它为 $m$ 行 $n$ 列矩阵，简称 $m\times n$ 阶矩阵，并用 $[A]$ 表示，即

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

这里每一横排称为行，每一纵排称为列，每一个数称为元素。其中 $a_{ij}$ 表示矩阵第 $i$ 行第 $j$ 列的元素，而 $a_{ij}$ 的第一个下角字 $i$ 是行的位置，第二个下角字 $j$ 是列的位置。例 1 中的元件件数矩阵是一个 $4\times3$ 阶矩阵，若也用 $[A]$ 表示，则它的第 1 行第 2 列的元素 $a_{12}$ 是 4，第 3 行第 3 列的元素 $a_{33}$ 是 2，等等。

(2) 行矩阵与列矩阵

只有一行的 $1\times n$ 阶矩阵

$$[A]=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \tag{1-2}$$

称为行矩阵(或行向量)。

只有一列的 $m\times 1$ 阶矩阵

$$[B]=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \tag{1-3}$$

称为列矩阵(或列向量)。

(3) 零矩阵

所有的元素均为零的矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

称为零矩阵,并用[0]表示。例如

$$[0]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

就是一个 $2\times 3$ 阶零矩阵。

(4) 转置矩阵

把一个 $m\times n$ 阶矩阵 $[A]$ 的行和列依次互换,所得新的 $n\times m$ 阶矩阵,称为 $[A]$ 的转置矩阵,并用 $[A]^T$ 表示。

设
$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

则
$$[A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

例如
$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

则
$$[A]^T=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}。$$

(5) 方阵

当一个矩阵的行数与列数相等,即 $m=n$ 时,这个 $n\times n$ 阶矩阵称为 $n$ 阶方阵,并记为

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

例如
$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 8 \\ 7 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$
就是一个 3 阶方阵。

在 $n$ 阶方阵(1-5)式中，元素 $a_{11}$, $a_{22}$, $\cdots$, $a_{nn}$ 所在的直线称为主对角线，主对角线上的元素 $a_{11}$, $a_{22}$, $\cdots$, $a_{nn}$ 称为主对角元素。

(6) 对称方阵

一个方阵，如果它的对称于主对角线的元素都两两相等，即 $a_{ij}=a_{ji}$，则称此方阵[A]为对称方阵。例如

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix},$$

就是一个 4 阶对称方阵。

(7) 对角线方阵与单位方阵

一个方阵，如果它的主对角线以外的元素都是零，则称为对角线方阵。其形式为

$$[A]=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

也可简单地表示为

$$[A]=\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \quad a_n \end{bmatrix}。$$

例如
$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$
就是一个 4 阶对角线方阵。

若对角线方阵主对角线上的元素均为 1，即

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \quad 1 \end{bmatrix},$$

则称为单位方阵，并用$[I]$表示。例如

$$[I]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

就是一个3阶单位方阵。

(8) 三角方阵与单位三角方阵

主对角线以下的各元素为零的方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\\text{\huge 0}&&&a_{nn}\end{bmatrix},$$

称为上三角方阵。主对角线以上的各元素为零的方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11}&&&\text{\huge 0}\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&&a_{nn}\end{bmatrix},$$

称为下三角方阵。

主对角线以下各元素为零，主对角线上各元素为1的方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&1&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\\text{\huge 0}&&&a_{n}\end{bmatrix}\qquad(1\text{-}7)$$

称为单位上三角方阵。主对角线以上各元素为零，主对角线上各元素为1的方阵

$$[A]=\begin{bmatrix}1&&&\text{\huge 0}\\a_{21}&1&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&1\end{bmatrix},$$

称为单位下三角方阵。例如矩阵

$$\begin{bmatrix}1&3&4&0\\&1&7&8\\&&1&2\\&\text{\huge 0}&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&&&\\6&1&\text{\huge 0}&\\5&9&1&\\2&0&4&1\end{bmatrix},$$

前者是4阶单位上三角方阵；后者是4阶单位下三角方阵。

## §1-2 矩阵的加减与数乘

综上可知，矩阵并不代表一个数值，而是一些数构成的表格，因此矩阵的运算就与数的运算有所不同，只能在规定的法则下进行。这里我们先来介绍矩阵的加减与数乘。

(1) 矩阵的相等

要讨论矩阵的运算，首先要说明矩阵的相等。

如果有两个矩阵[A]和[B],即

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

它们的行数和列数都相同,并且它们所有的对应元素都两两相等,即

$$a_{ij}=b_{ij} \tag{1-8}$$

则称矩阵[A]与矩阵[B]相等,记为

$$[A]=[B] \tag{1-9}$$

例如 $[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad [C]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$

则 $[A]=[B]$, 而 $[A]\neq[C]$, $[B]\neq[C]$。

(2) 矩阵的加减法

在例1中如果各组所需元件件数增加了,四个组增加的件数也用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

这时发给各组元件的件数显然应该是

$$\begin{bmatrix} 5+2 & 4+1 & 3+1 \\ 5+3 & 3+2 & 4+3 \\ 4+2 & 4+1 & 2+2 \\ 5+3 & 5+0 & 0+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}。$$

这个新矩阵的元素是由两个元件件数矩阵的对应元素相加而成,即

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5+2 & 4+1 & 3+1 \\ 5+3 & 3+2 & 4+3 \\ 4+2 & 4+1 & 2+2 \\ 5+3 & 5+0 & 0+2 \end{bmatrix}。$$

这就是矩阵的加法运算。

现设有两个 $m$ 行 $n$ 列矩阵[A]与[B],规定[A]与[B]的加减运算为

$$[A]\pm[B]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn}\end{bmatrix} \tag{1-10}$$

应注意，只有阶数相同(即行数相同，列数也相同)的矩阵，才谈得上是否相等，才能进行加法和减法运算。

**例 2** 已知

$$[A]=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix},$$

求 $[C]=[A]+[B]$，$[D]=[A]-[B]$。

**解** 由矩阵的加减法规则可知

$$[C]=[A]+[B]=\begin{bmatrix}-2+3 & 0+0 & 1+1\\ 3+0 & 2+2 & 0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 4\end{bmatrix},$$

$$[D]=[A]-[B]=\begin{bmatrix}-2-3 & 0-0 & 1-1\\ 3-0 & 2-2 & 0-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}。$$

显然 $[A]+[0]=[A]$，$[A]-[0]=[A]$，就是说矩阵$[A]$加零矩阵或减零矩阵仍然等于矩阵$[A]$。可见，零矩阵在矩阵的加减法中和数零在数的加减法中起类似的作用。

矩阵的加法满足交换律和结合律:

a) $[A]+[B]=[B]+[A]$;

b) $([A]+[B])+[C]=[A]+([B]+[C])$。

(3) 数与矩阵的乘法

在例 1 中，如果每个组每种元件件数都要增加一倍，这时元件件数矩阵是

$$\begin{bmatrix}2\times5 & 2\times4 & 2\times3\\ 2\times5 & 2\times3 & 2\times4\\ 2\times4 & 2\times4 & 2\times2\\ 2\times5 & 2\times5 & 2\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 8 & 6\\ 10 & 6 & 8\\ 8 & 8 & 4\\ 10 & 10 & 0\end{bmatrix}。$$

这里遇到用一个数来乘矩阵中所有各个元素的情况，这就是数与矩阵的乘法运算。一般地，数 $\lambda$ 与矩阵$[A]$的乘法规定为

$$\lambda[A]=\lambda\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{bmatrix} \tag{1-11}$$

设 $\lambda$ 和 $\mu$ 为常数，$[A]$和$[B]$为矩阵，则数与矩阵相乘有如下运算规律:

a) $\lambda(\mu[A])=\mu(\lambda[A])=(\lambda\mu)[A]$;

b) $(\lambda+\mu)[A]=\lambda[A]+\mu[A]$;

c) $\lambda([A]+[B])=\lambda[A]+\lambda[B]$。

**例 3** 设 $\lambda=2$, $\mu=3$,

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix},$$

则
$$(2+3)[A]=5[A]=5\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 25\\ 5 & 10\end{bmatrix},$$

$$2[A]+3[A]=2\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & 15\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 25\\ 5 & 10\end{bmatrix},$$

可见
$$(2+3)[A]=2[A]+3[A]。$$

而
$$2([A]+[B])=2\left(\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}4 & 8\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 16\\ 6 & 6\end{bmatrix},$$

$$2[A]+2[B]=2\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 6\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 16\\ 6 & 6\end{bmatrix},$$

可见
$$2([A]+[B])=2[A]+2[B]。$$

## §1-3 矩阵的乘法

矩阵的乘法比较复杂，也很重要。现仍以例1的分发元件为例：如果三种元件的单价分别是1.5元、1元、0.5元，可以排成列矩阵(单价矩阵)，即

$$\begin{Bmatrix}1.5\\ 1\\ 0.5\end{Bmatrix}\begin{matrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{甲种元件单价}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{乙种元件单价}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{丙种元件单价}\end{matrix}$$

那么每天各组的元件消耗费可用矩阵(消费矩阵)表示为

$$\begin{Bmatrix}5\times1.5+4\times1+3\times0.5\\ 5\times1.5+3\times1+4\times0.5\\ 4\times1.5+4\times1+2\times0.5\\ 5\times1.5+5\times1+0\times0.5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}13\\ 12.5\\ 11\\ 12.5\end{Bmatrix}\begin{matrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{I 组消费}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{II 组消费}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{III 组消费}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{IV 组消费}\end{matrix}$$

我们知道通常对一种元件来说，每天的消费等于件数与单价的乘积。现在是多种元件多种单价，我们同样可认为消费矩阵等于件数矩阵与单价矩阵的乘积，即

$$\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 5 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 2\\ 5 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.5\\ 1\\ 0.5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\times1.5+4\times1+3\times0.5\\ 5\times1.5+3\times1+4\times0.5\\ 4\times1.5+4\times1+2\times0.5\\ 5\times1.5+5\times1+0\times0.5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}13\\ 12.5\\ 11\\ 12.5\end{Bmatrix}。$$

现在我们来看看，矩阵的相乘有哪些规律性的东西。如果我们把件数矩阵记为$[A]$，单价矩阵记为$\{x\}$，消费矩阵记为$\{C\}$，则可以发现：

第一，矩阵$[A]$与矩阵$\{x\}$相乘，$[A]$的列数和$\{x\}$的行数必须相等；

第二，乘积$\{C\}$也是一个矩阵，它的行数与$[A]$的行数相等，它的列数与$\{x\}$的列数相等；

第三,$\{C\}$的第一行(第一列)的元素是$[A]$的第一行与$\{x\}$(第一列)对应元素乘积之和;$\{C\}$的第二行(第一列)的元素是$[A]$的第二行与$\{x\}$(第一列)对应元素乘积之和;$\{C\}$的第三行、第四行的元素同样可得。

一般地说,一个$m\times n$阶矩阵$[A]$与一个$n\times 1$阶列矩阵$\{x\}$的乘积是一个$m\times 1$阶列矩阵$\{C\}$。将$[A]$的第$i$行各元素分别乘$\{x\}$对应的各元素,然后相加就得到$\{C\}$的第$i$行元素,即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{Bmatrix} \tag{1-12}$$

我们规定矩阵与矩阵的乘法运算规则如下:

设一个$m\times n$阶矩阵$[A]$和一个$n\times p$阶矩阵$[B]$,即

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix},$$

其中$[A]$的列数与$[B]$的行数相等,则矩阵$[A]$与矩阵$[B]$的乘积$[C]=[A][B]$是一个$m\times p$阶矩阵,其形式为

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mp} \end{bmatrix}。$$

其中每个元素$C_{ij}$等于$[A]$的第$i$行各元素与$[B]$的第$j$列各元素一一对应乘积之和,即

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\ 2, \cdots, m;\ j=1,\ 2, \cdots,\ p) \tag{1-13}$$

具体来说

$$\left.\begin{array}{l} C_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ C_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{mp} = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{array}\right\} \tag{1-14}$$

必须注意,只有当前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数时,两矩阵才能相乘,否则不能相乘。

**例 4** 已知

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix},$$

求 $[C]=[A][B]$。

**解** 因 $[A]$ 是 $3\times2$ 阶矩阵，$[B]$ 是 $2\times2$ 阶矩阵，故

$$[C]=[A][B]=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4\times1+1\times2 & 4\times(-1)+1\times3\\ (-1)\times1+1\times2 & (-1)\times(-1)+1\times3\\ 2\times1+3\times2 & 2\times(-1)+3\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 4\\ 8 & 7\end{bmatrix}。$$

由于 $[B]$ 的列数不等于 $[A]$ 的行数，所以 $[B]$ 与 $[A]$ 不能相乘。

**例 5** 已知

$$[A]=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

求 $[A][B]$ 和 $[B][A]$。

**解** 由于 $[A]$ 是 $3\times2$ 阶矩阵，$[B]$ 是 $2\times3$ 阶矩阵，所以 $[A]$ 与 $[B]$ 和 $[B]$ 与 $[A]$ 都能相乘，即

$$[A][B]=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 7 & 3 & 4\\ 10 & 5 & 5\end{bmatrix},$$

$$[B][A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}。$$

关于矩阵乘法，不难证明它具有下列性质：

a) $\lambda([A][B])=(\lambda[A])[B]=[A](\lambda[B])$，其中 $\lambda$ 是常数。

b) $[A]([B][C])=([A][B])[C]$，这表示矩阵乘法的结合律。

c) $([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C]$，$[C]([A]+[B])=[C][A]+[C][B]$，此二式表示矩阵乘法的分配律。

d) $[A][I]=[A]$，$[I][B]=[B]$。

e) $([A][B])^T=[B]^T[A]^T$，即两矩阵乘积的转置矩阵等于两矩阵分别转置后的乘积，但须逆其次序，这是矩阵乘法的逆序法则。

下列三个性质是矩阵乘法与数的乘法不同之处，要注意。

f) 一般来说 $[A][B]\neq[B][A]$，即矩阵乘法一般不满足交换律。譬如例 5 中就是 $[A][B]\neq[B][A]$，因为不等式左端是 $3\times3$ 阶矩阵，右端是 $2\times2$ 阶矩阵。

g) 如果 $[A][B]=[0]$，一般不能得出 $[A]=[0]$ 或 $[B]=[0]$。

**例 6** 若
$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix},$$
则由于
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$
故知
$$[A][B]=[0]。$$
此例从反面说明，虽然 $[A][B]=[0]$，但 $[A]\neq[0]$，$[B]\neq[0]$。

h) 如果 $[A][B]=[A][C]$，一般不能得出 $[B]=[C]$。

**例 7** 已知
$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\quad [C]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},$$
求 $[A][B]$ 和 $[A][C]$。

**解** 由矩阵乘法规则可知
$$[A][B]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},$$
$$[A][C]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}。$$
可见 $[A][B]=[A][C]$，但是 $[B]\neq[C]$。

需要指出的是，当 $[A]$ 的元素 $a_{ij}$ 取任意数值都有 $[A][B]=[A][C]$ 时，则 $[B]=[C]$。证明如下：

设
$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$
$$[B]=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix},$$
$$[C]=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p}\\c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np}\end{bmatrix}。$$
根据矩阵 $[A]$ 的任意性，首先在 $[A]$ 中取 $a_{11}=\lambda_1$，其余的元素均取为零，则由 $[A][B]=[A][C]$ 有