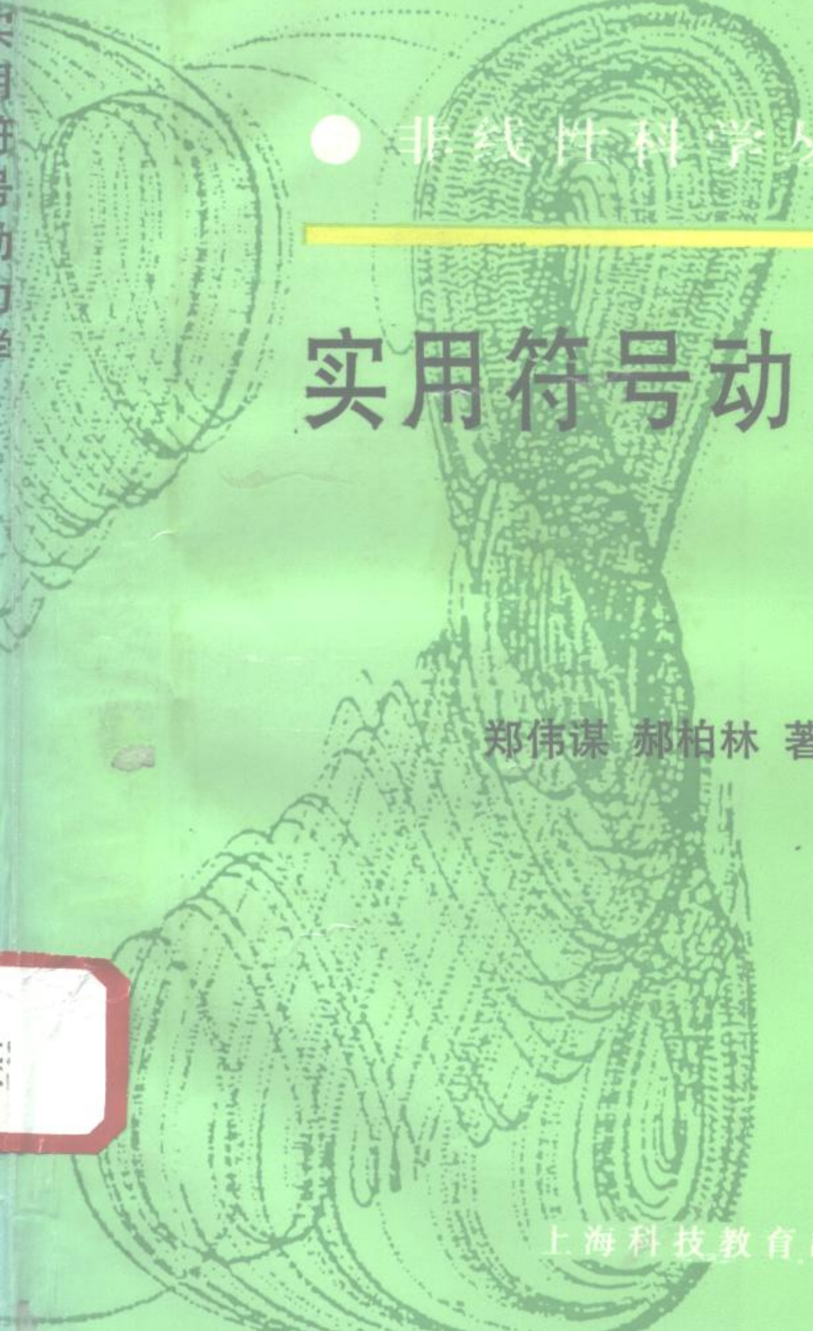
非线性科学丛书

实用符号动力学

郑伟谋 郝柏林 著



上海科技教育出版社

非线性科学丛书

实用符号动力学

郑伟谋　郝柏林　著

周作领　丁鄂江　审阅

上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”中的一种，介绍实用符号动力学的基础知识及一些应用。全书计分六章，即：引论，单峰映射的符号动力学，一维多临界点映射，圆映射的符号动力学，二维映射符号动力学，符号动力学方法在常微分方程分支和混沌中的应用。本书不拘泥于数学严格性，力求实用、形象直观。书中也包含有著者的一些独创性工作。

本书可供理工科大学教师、大学高年级学生、研究生、博士后阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由周作领、丁鄂江审阅。

非线性科学丛书

实用符号动力学

郑伟谋 郝柏林 著

周作领 丁鄂江 审阅

上海科技教育出版社出版发行

（上海市冠生园路393号）

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 6.5　字数 165,000

1994年11月第1版　1994年11月第1次印刷

印数 1—3200 本

ISBN 7-5428-1015-4/O·52　定价：6.20元

非线性科学丛书编辑委员会

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法．“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域．这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域．其中，非线性科学占有极其重要的位置．这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升．

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题．每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧．诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型．不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系．

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化．一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质．这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法．反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质．到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系．

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理. 于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域. 虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例. 这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识. 原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测. 然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构.

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象. 从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律. 如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程. 标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题. 物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用. “非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿. 各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和. 非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步. 于是, 有了动员在前沿工作的教学和研究人员, 以集体力量撰写一套"非线性科学丛书"的想法. 在上海科技教育出版社的大力支持下, 这一计划得以付诸实现.

这套"非线性科学丛书"不是高级科普, 也不是大块专著. 它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展, 帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域, 同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材. 非线性科学的全貌将由整套丛书刻划, 每册努力讲清一个主题, 一个侧面, 而不求面面俱到, 以免失之过泛. 在写作风格上, 作者们将努力深入浅出, 图文并茂, 文献丰富; 力求有实质内容, 无空洞议论, 以真刀真枪脚踏实地武装读者. 从读者方面, 自然要求具备理工科大学本科的数学基础, 和读书时自己主动思索与推导的习惯.

"非线性科学丛书"的成功, 取决于读者和作者的支持. 我们衷心欢迎批评和建议.

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前　言

自然科学和工程技术的发展，不断把原来只为数学家知晓的概念和方法，变成广大实际工作者必须掌握的语言和工具；实际问题的分析处理，又使原有的数学概念获得丰富的内容和长足的进步．这种相互作用，在非线性科学的发展过程中表现得尤为清楚．符号动力学的实用化，提供了一个生动的实例．

符号动力学是研究动力学行为的严格方法．从原则上讲，一切有志进入非线性动力学领域的人，应当从掌握符号动力学入手．然而，对于非数学专业的科学和技术工作者，这仍非易事．本书作者就是在实际研究工作中接触和了解符号动力学，并且获得一些结果；通过实践对符号动力学的某些方面有了较多体会．符号动力学的基本精神是简单的，但必须下相当功夫才能熟练掌握．

阅读本书，只要求具备工科大学本科的数学基础，最好对于非线性动力学的基本内容也有所接触．例如，阅读过这套“非线性科学丛书”中郝柏林撰写的《从抛物线谈起——混沌动力学引论》[1]，或阅读过文献集《混沌 II》[2]一书的导言部分．然而，更重要的是在读书过程中应自己动笔写写算算，去补足推导的细节或应用于自己感兴趣的实际问题．另外，书中收录了一些 BASIC 短程序，看懂这些程序对理解正文内容很有益处．

本书的叙述力求完整和自洽．极少数略为艰深的推导，或内容上相对独立而不便在正文中全面展开的论题，将放在附录中．书中所引的参考文献一律列在书末．书中还反映了我们研究组的若干结果．整个研究工作曾受到中国科学院开放实验室计划(1986～1992)和中国自然科学基金(1986～1991)的支持．

目　录

第1章

引　论

人类对自然界的研究和观测，只能在一定精度下进行.测量技术可以精益求精，不断进步，但永远作不到“绝对准确”. 研究和测量的根本目的，在于对客观事物或过程的基本的、不变的性质作出严格的结论. 究竟能不能从精度有限的测量数据得出这类严格结论呢？

精细的测量必定带来大量的数据，而用以刻划事物根本性质的特征量通常为数不多，为了得到这少数特征量，未必要从大量精细的原始数据出发. 其实，整个自然科学体系都是在对事物进行“粗粒化”或“约化”的描述. 这一纲领在动力学系统的研究中可以较好地实现. 符号动力学就是在有限精度下对动力学过程实行严格描述的一套方法.

符号动力学，作为动力学系统数学理论中的抽象篇章，已经有悠久的历史. 从20世纪20年代开始，它逐渐成为数学家证明定理的有力手段，但还鲜为物理工作者和一般科学技术人员所知.然而，60年代中期以来，混沌现象的研究日趋活跃，由原先极为抽象的符号动力学迅速发展出可以为实际工作者所掌握和运用的一种巧妙工具——我们称之为“实用符号动力学”的新方法. 本书之目的，就是向非数学工作者系统介绍实用符号动力学，我们的叙述将力求形象和直观，而不拘泥于数学形式的严格性.

§1　动力学系统

一个物理系统的状态，由一组变量的数值来刻划：用这些变量作坐标轴，支撑起一个“状态空间”或“相空间”；空间中的每一个点

代表系统的一种可能或不可能的状态;在这些变量的相互作用下,有时还受外部影响;系统的状态随时间变化,系统的代表点便在状态空间中运动,给出一条轨道.

这里所用的"相空间"一词,与理论力学中的习惯用法可能稍有不同.力学系统的相空间是由广义坐标和广义动量支撑起来的,因而总是偶数维空间.而且,首先用于描述不含耗散的保守系统的运动,保守的力学系统遵从刘维定理,相空间体积在演化过程中保持不变.含有耗散的系统,初始的相空间体积会不断缩小,最终可能成为维数远低于原来相空间的某种"吸引子".耗散起着自然的简化作用,使许多低维的动力学系统能够很好地模拟高维的实际系统.此外,动力学系统中的状态变量不一定与坐标或动量对应;独立的状态变量数目也不必为偶数.我们以后将在这种较为自由的意义下混用"状态空间"和"相空间"两个名词.

系统的状态通常还受到若干控制参数制约.这些参数构成参数空间.在不同的参数范围或参数空间的不同区域里,系统状态的时间变化过程即代表点在状态空间中的运动轨道,可能有本质上的不同.例如,对于一定参数范围运动是周期的,即轨道封闭,周而复始,而在另一参数区则有混沌运动.

描述某种物理系统状态变量如何变化的数学模型,构成一个动力学系统.通常,它含有若干控制参数.我们举几个例子.

一、把太阳、地球和月亮作为质点,描述其运动的力学方程组,是一个动力学系统.这是能量守恒的保守系统,不直接属于本书的研究范围.

二、在没有世代交迭的简化假定下,描述某种昆虫数目变化的"虫口"方程或抛物线映射[1]

$$x_{n+1}=1-\mu x_n^2, \tag{1.1}$$

其中 x_n 为属于线段 $I=(-1, 1)$ 的点,μ 是控制参数,通常 $0<\mu<2$.这个"单峰映射"的符号动力学是整个实用符号动力学的出发点.这将在本书第 2 章里详加讨论.

三、另一大类有广泛应用的一维映射，是从圆周到圆周的映射，简称圆映射. 这时，可将线段 I 的两个端点等同起来，构成一个封闭的圆周. 通常把圆周的长度取为 1. 圆映射的一般形式如

$$x_{n+1}=x_n+A+Bg(x_n),\ (\bmod 1) \tag{1.2}$$

这里 A 和 B 是参数，模运算(mod 1)的意思是舍去结果的整数部分，只保留其不足 1 的部分；$g(X)$则是周期为 1 的非线性函数：

$$g(X+1)=g(X).$$

相空间为圆周的符号动力学具有一些新的特点，我们将在第 4 章里专门讨论.

四、描述地表大气热对流问题的偏微分方程组，经过大幅度简化之后，导致如下的含三个变量的常微分方程组[3]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\sigma(y-x),\\ \dot{y}&=rx-xz-y,\\ \dot{z}&=xy-bz,\end{aligned} \tag{1.3}$$

称为罗伦兹(E. N. Lorenz)模型. 这里变量 x、y、z 支起三维的相空间，三个参数 σ、b 和 r 通常固定两个. 例如取 $\sigma=10$, $b=8/3$, 而只变化对应于雷诺数的 r. 在 r 从 1 变到 350 的范围内可以观察到大量的周期解和混沌轨道. 罗伦兹在 $r=28$ 处看到的非周期轨道，曾是奇怪吸引子的最早实例之一.

方程(1.3)的右端没有显含时间，是一种自治的常微分方程组. 另一个可以用符号动力学作研究的自治方程组是描述神经元活动的罗斯-欣德马司(R. M. Rose-J. L. Hindmarsh)模型[4]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y-ax+bx+I-z,\\ \dot{y}&=l-ex-y,\\ \dot{z}&=r(s(x-f)-z).\end{aligned} \tag{1.4}$$

我们将在第 4 章中看到，罗伦兹模型(1.3)的绝大多数周期解可以与如下的一维立方映射

$$x_{n+1}=Ax_n^3+(1-A)x_n,\qquad x_n\in(-1,\ 1),\ A\in(0,\ 4) \tag{1.5}$$

对比.方程组(1.3)和映射(1.5)的共同之处，是它们都在 $x\to -x$, $y\to -y$ 的变换下保持不变，即具有反对称性.

反对称的和一般的立方映射也是从单峰映射(1.1)走向更复杂一维映射的一条途径. 因此，我们在第 2、3 章要继续研究它们.

五、许多含两个变量的常微分方程组可以表现出周期振荡行为，成为非线性振子. 如果它们再受到周期外力的驱动，周期振荡就可能发展成非周期的混沌运动. 这类有内在和外加两种周期竞争的系统，实例很多，例如，描述一种三分子化学反应的周期驱动"布鲁塞尔振子"[5],[6]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=A-(B+1)x^2y+\alpha\cos(\omega t),\\ \dot{y}&=Bx-x^2y,\end{aligned}\tag{1.6}$$

以及描述磁弹性杆非线性振动的都芬(G. Duffing)方程[7]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-x^3-\delta y+\alpha\cos(\omega t).\end{aligned}\tag{1.7}$$

上面这些周期驱动的非线性振子的参数空间中，存在着许多驱动周期的谐波和次谐波振动区域. 次谐波是周期为基本周期整数倍的振动，它的频率为基本频率的分数，故又称分频运动. 此外，还存在准周期运动和混沌运动的制度. 我们将在第 6 章中看到，这些运动制度在参数空间的某些部分可以和一维线段映射的符号动力学对应，或可用圆映射的符号动力学描述.

§2 符号动力学

符号动力系统是形式上最简单的一种动力学系统，它是实际动力学系统的一种高度概括和抽象. 设想由两个不同的字母 R 和 L，构造出许多无限长的符号序列. 例如，

$$RLRRLLLRLRL\cdots\cdots\tag{2.1}$$

和

$$LRRLLLRLRL\cdots\cdots\tag{2.2}$$

就是两个不同的序列. 我们在本节实例中，只写出一些半无穷序列.

本书第2、3章讨论的一维映射符号动力学自然导致这样的半无穷序列．二维映射的符号动力学就要用到两端都无穷的符号序列．各种各样的符号序列支起一个"符号序列空间"．序列(2.1)和(2.2)分别为此空间中不同的点．从序列(2.1)得到序列(2.2)的办法很简单：只要在(2.1)中舍去第一个字母 R 就成了．这种办法称为移位操作(或移位)．我们可以定义移位算符 $\mathscr{S}$：

$$\mathscr{S}s_0s_1s_2s_3\cdots\cdots=s_1s_2s_3s_4\cdots\cdots.$$

这里符号 s_i 是字母 R 或 L．$\mathscr{S}$ 的作用是舍去序列的第一个符号而得到由第二个符号开始的一个序列．移位算子重复作用 k 次，记作 $\mathscr{S}^k$．

符号动力学的状态空间或相空间就是符号序列空间，动力学则由移位操作 $\mathscr{S}$ 实现．没有任何动力学系统会比符号动力学系统再简单．对一个特定的符号序列，从初始点出发，不断施行移位，得到一串新的序列，即相空间中的一串点，这些点构成一条轨道．

在这个动力学中，符号序列如

$$LLLLLLLLLLLL\cdots\cdots$$

在 $\mathscr{S}$ 作用下不变，是动力学的一个不动点．符号序列如

$$RLRRLRRLRRLR\cdots\cdots$$

在移位三次后回到自身，给出由三个序列或三点构成的周期三轨道．不难看出，这三个序列中的每一个都是 $\mathscr{S}^3$ 的不动点．

这两个例子中涉及的符号序列都很有规则，可以分别缩写成 L^∞ 以及 $(RLR)^\infty$、$(LRR)^\infty$ 和 $(RRL)^\infty$．只要知道"现在"，就可以推知"未来"．

还有许许多多极为不规则的符号序列，产生它们的方法只有将字母逐个写出来，别无捷径，这些就是**混沌序列**．将移位操作不断作用在混沌序列上，可得到**混沌轨道**．

在上述两种极端之间，还有许多中间情形．例如，序列由一段非周期排列的符号开始，然后进入周期部分．这类序列在移位操作下最终达到周期序列，最简单的情形如 RL^∞，它在一次移位后成

为 L，即符号动力学的一个不动点.

对符号动力学系统的讨论，如果不与实际的动力学系统相联系，则如同一种数学游戏，无法显示其潜力. 一旦在两者之间建立起对应关系，符号动力学就可能成为研究实际系统的有力工具.原则上可以沿着扩展外延或充实内涵的不同方向去建立实际动力学系统与符号动力学系统的对应关系.

数学家们比较重视扩展概念的外延，使定理具有尽可能弱的前提，从而在更广的范围内成立，然而其具体内涵就相应减少，考虑某种相空间 X 中的完全确定论的动力学 f，它把 X 映射到自身：

$$f:\qquad X\to X.$$

只要 X 是紧致流型，它就具备有限的开覆盖. 以不同的字母来命名各片覆盖只需用到有限的字母集合，用这个字母集合可以通过动力学生成种种符号序列. 把这样的符号序列当作点，可以支起符号序列空间 Σ. 移位操作 $\mathscr{S}$ 定义了从 Σ 到自身的动力学

$$\mathscr{S}:\qquad \Sigma\to\Sigma,$$

数学上称为 Σ 的移位自同构. 不管 X 中点 x 的精确位置，只看它落在哪片覆盖中，而代之以相应的字母，这就实现了“粗粒化”，并且建立起对应关系 Ψ：

$$\Psi:\qquad x\to\text{字母}.$$

这种对应是相当一般的，甚至没有要求各片覆盖互不重叠，因而不仅允许 X 中的运动轨道与 Σ 中轨道有多一对应，而且一个点 x 也可能对应不止一个字母，对应关系 Ψ 必然很松弛，因为空间 X 和空间 Σ 的性质颇不相同. 例如，通常 X 是连续的、可微的、多半还是光滑的流型，而 Σ 则由离散的点组成. 当然，还可以在 Σ 中引入度规和拓扑，建立较丰富的数学结构.对于 X 的开覆盖，也可以提出进一步限制，例如要求不同的覆盖片除边界点外不能重叠，可以进一步使这种覆盖成为对 X 的“马尔可夫分割”，建立起 X 上确定论动力学 f 与 Σ 上马尔可夫链的概率论对应.