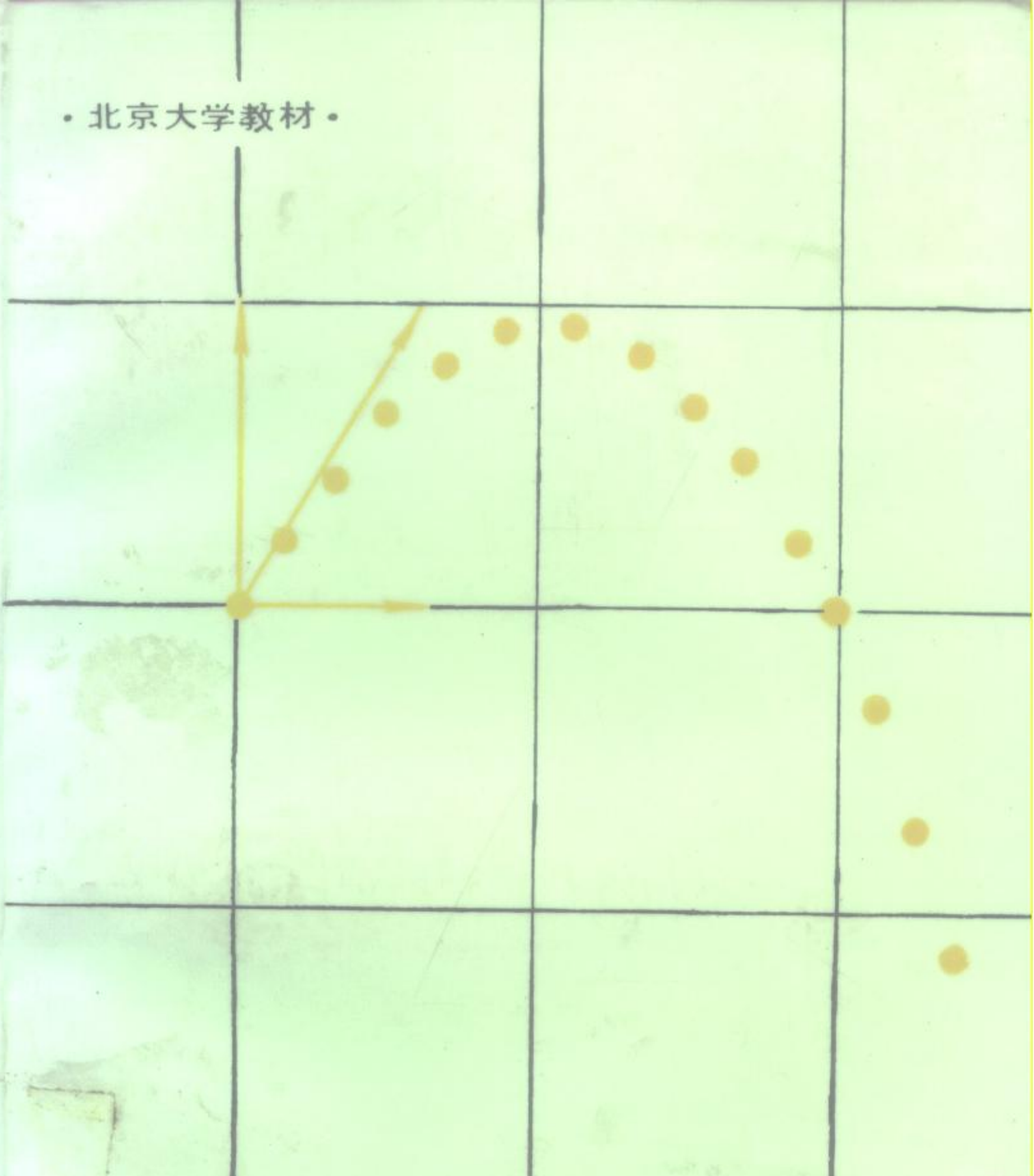
·北京大学教材·



# 分析动力学

陈滨 编著

北京大学出版社

北京大学教材

# 分析动力学

陈滨 编著

北京大学出版社

## 内 容 简 介

本书是系统全面地论述分析动力学的著作。除包括有传统的经典内容外，还包括了近几十年来关于分析动力学理论和应用研究中的重要新成果，其中一部分是作者长期研究的结果。

全书共分五章。第一章是关于约束的研究。本书特别强调约束的研究，并以关于约束数学性质和力学性质的研究成果作为分析动力学的基石。第二章是Lagrange力学完整的叙述。第三章介绍非完整系统动力学。本章除介绍了经典的有关非完整系统动力学的研究成果外，还介绍了近年来关于Kane方程的研究。第四章讨论了力学的变分原理。第五章给出了Hamilton力学的内容并以天体力学为例介绍Hamilton力学的应用。每章末均附有习题。

本书可作为大学力学、数学、物理学以及工程专业高年级学生及研究生的教材或教学参考书，也可供有关教师、研究工作者及工程技术人员参考。

北京大学教材

分 析 动 力 学

陈 滨 编著

责任编辑：邱淑清

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168毫米　32开本　17.75印张　450千字

1987年12月第一版　1987年12月第一次印刷

印数：00001—6,200册

统一书号：13209·193　定价：3.75元

# 序

由 Lagrange 和 Hamilton 所奠基的分析动力学（亦称为“分析力学”或“经典动力学”）是一门已经成熟发展了的学科．和目前兴起的种种新学科相比，它确实显得古老了．但是，这门古老的学科在今天人类认识和改造自然界的斗争中，其价值并没有减少．生产和科学的实践还正在提出一系列的新课题迫切地需要这门学科加以研究．

分析动力学作为经典物理学普遍而统一的动力学理论一直很引人注目．它是经典物理的基石之一，同时也是很多数学理论的发源地和恰当的应用对象．成熟发展的经典动力学理论给现代物理学的发展准备好了阶梯．分析动力学的研究不仅有理论价值，也有着巨大的实用意义．它的研究一方面提供了现代应用力学以及动力学一般理论最基本的原理和方法，另一方面，它本身也给出了在振动、稳定性、刚体与刚体系统、天体与宇航器的运动等领域中一系列有实用价值的成果．

正是由于这个原因，目前不少专业的大学本科教学计划中都安排有分析动力学的初步内容，而在高年级选修课和研究生课程中则有着分析动力学更深入更完备的论述．作为这种较深入课程用的教材或专著，在国外已有不少，但国内出版的却还不多．作者在给北京大学力学系一般力学与控制理论专业研究生讲授分析动力学课程时只好自编讲义．本书就是在这个讲义的基础上修改补充而成的．为了不和本科生教学计划中的内容有太多的重复，有关用第二类 Lagrange 方程解题的部分本书就不再发挥，而把重点放在基本理论的发展上．由于最近几年关于非线性非完整系统动力学的研究，在分析动力学的某些基本概念问题上产生了不

少争论，而在这些争论问题上的观点显然会影响着我们对分析动力学基本理论的陈述。在本书中，我们论证了我们的观点和方法。但只要有可能，我们将尽量保持着传统的叙述方式。关于应用课题，本书对振动，陀螺，车辆动力学，宇航器以及天体力学给予了特别的注意。在本书的基本内容中，我们只使用比较普及的数学工具，这是为了适应目前一般非数学专业学生的普遍情况。但是在某些非基本的补充材料中，我们则比较自由地使用一些更深入的数学工具。在这样做的时候，将尽可能给予说明或注明出处，以方便于读者的理解。

作者感谢汪家诉教授，黄克累教授，李灏教授，吕茂烈教授，他们在百忙中审阅了本书初稿并提出了宝贵的修改意见。我的老师钱敏教授审阅了全书。对于他的指导和帮助，作者表示深切的谢意。本书的习题的选编很不成熟，其中一部分是自编的，一部分来自其他的著作①。对于这些著作的作者、译者，这里一并志谢。

陈　滨

1983年11月于北京大学

① 例如，Е.С.Пятницкий 等编，《Сборник по аналитической механике》，Издательство《Наука》，1980，刘正福，王忠礼译，华东工程学院印，1982年10月。

# 目　　录

# 绪　论

观察自然界或研究工程技术，机械运动是一个经常碰到的普遍现象。研究物质机械运动和平衡的规律是力学的任务①。

除史前期以外，力学学科的开始可以算自1687年牛顿（I.

| 阶段＼项目 | 时　期 | 主要人物及工作 | 主要特征 |
|---|---|---|---|
| 第一阶段 | 1687年 | 牛顿：《自然哲学的数学原理》 | 力学和分析数学的开端 |
| 第一阶段 | 17世纪到18世纪的一百年 | Bernoulli, Euler, d'Alembert 等 | 数学和力学发展的黄金时代 |
| 第二阶段 | 1788年 | Lagrange：《分析力学》 | 创建了分析的和体系的力学理论——Lagrange力学 |
| 第二阶段 | 18世纪到19世纪的一百年 | Laplace, Gauss, Hamilton, Jacobi, Hertz, Liouville, Poincaré, Maxwell等 | 分析动力学的成熟发展与在物理学上碰到困难 |
| 第三阶段 | 1881年 | Michelson 实验与 Einstein 的狭义相对论 | 现代物理学的开端 |
| 第三阶段 | 19世纪到20世纪的一百年 | Lorentz, Einstein, Planck, Schrödinger, Heisenberg 等<br>Plandtl, Жуковский, Saint-Venant, Ляпунов等 | 相对论力学与量子力学的发展<br>现代应用力学的发展 |

① 当然，这是就力学的狭义理解而言。

Newton）的《自然哲学的数学原理》一书的出版。这本书，Lagrange称之为“人类智慧的最伟大的产物”。从那时至今，正好约三百年。非常凑巧，我们可以以一百年为一段，把这三百年分成三个阶段。上页的表格粗略地回顾了这三百年力学发展各个阶段的特征。

作为力学学科的开创人物——牛顿，他的重大贡献是：找到了制约自然界物质机械运动的相当普遍的规律，同时也发明了研究这种规律的数学方法——微积分，也就是今天发展成为“分析”的数学学科。牛顿的原理及其方法的成就使得当时科学界不少人产生这样的观念：好像已经找到了制约自然界一切运动的根本规律，一切都可以纳入牛顿的模式来加以理解和认识了。

但是，人们在研究实践中发现问题不是那么简单。实际的困难至少来自这三个方面：

1. 牛顿的模式把影响物体运动的原因统统归结为力。而实际上，大量的运动是受约束的运动。原则上说，约束对运动的作用虽确可以归结为力，但这些力就像未知的运动一样，是有待决定的。因此，如果局限在牛顿的力学模式中，寻求受约束系统的运动就产生了困难。换句话说，牛顿的模式对研究受约束系统的力学是不方便的。

仅从概念上说，约束（至少是几何约束）的作用可以看成是沿约束面法向强度极大的吸力场作用的极限（见1.5.1）。采用这种看法似乎可以不把约束作为独立的动力学基本因素，而仅研究牛顿的模式。但可惜的，这种想法对动力学的研究来说并不富有成果。动力学也可以走另一个极端，这就是Hertz的理论。他完全摒弃力这个概念，而仅以约束为基础。这样的做法也是不自然的。Lagrange走的是中间道路，在他的体系中，力和约束都作为动力学的基本因素。既承认力的作用，又承认约束的作用。我们今天的分析动力学仍然本着Lagrange的这个思想。

2. 数学的困难：建立了动力学原理或者建立了系统的动力

学方程，并不是研究的终结。因为我们并沒有一般的办法去找到动力学方程的积分。这就像微分方程理论中Liouville关于Riccati方程的研究结果一样①，使得动力学方程的求解问题成为一个一直需要研究的课题。在力学上，著名的结果是关于重刚体绕不动点的转动问题和三体问题，在一般情况下找不到足够的第一积分。这对于我们原来的愿望来说，是一个重大的打击。如何千方百计地去寻找较多的动力学方程积分以及如何最好地利用这些积分，成为古典数学力学家们努力的重要目标。在找不到动力学方程组足够的第一积分的情况下，如何研究力学系统的运动特性，如何定性地研究解的结构，如何定量地进行计算，这构成近代数学、力学中极为重要的课题。特别是分析动力学位形空间所具有的微分流形构造以及近年来关于奇异吸引子的发现，使得这些研究更具有丰富的色彩。

3. 物理上的困难：当人们天真地想把牛顿的模式拿去研究光、电磁、微观粒子等现象时，碰到了像接近光速的相对论效应，微观粒子的波粒二象性等难题。在这种情况下，作为整个经典动力学的基本观念：时间的绝对性与时空分离的观念，质能分离的观念，运动的确定性描述观念等等都受到了挑战。在人们不得不承认新的物理事实之后，就极需要在已经成熟的经典力学理论中寻找那样一些理论的形式和方法，使得它能够顺利地摆脱经典概念的束缚，而且成为自然地过渡向非经典力学的桥梁。经典力学的分析动力学形式为这种过渡作出了最好的准备。

分析动力学是数学、力学研究者们在克服上述诸困难中工作成果的部分记录。1788年，也就是牛顿的经典著作发表之后约一百年，Lagrange完成了他的著作《分析力学》。这开辟了经典力学的第二个阶段。这本著作在很大的程度上克服了牛顿力学上述的第一个困难（并沒有完全克服。在Lagrange的著作中还沒有非

① 参阅秦元勋，《微分方程所定义的积分曲线》，上册，第7页，科学出版社，北京，1959。

完整约束的概念。非完整系统动力学是后来研究的成果），在一定的程度上克服了牛顿力学的第二个困难。Lagrange得到了力学系统在完全一般性广义坐标描述下具有不变形式的动力学方程组，并突出了能量函数的意义。Lagrange系统实际上概括了比牛顿力学要广泛得多的系统，同时它也提供了对力学系统的动力学，稳定性，振动过程作一般性研究的可能。在这方面的研究中，Liouville，Routh，Rayleigh，Ляпунов，Whittaker等人的成果最为著名。这些成果不但构成了Lagrange力学的重要内容，而且在更广泛的系统中（例如电气系统、控制系统等等）得到应用。Lagrange力学的另一重要发展是研究非完整系统。特别是非线性非完整系统的研究，导致了对分析动力学一系列基本概念，诸如虚位移，虚速度，dδ交换性，变分原理等作深入的探讨。非完整系统在工程技术上的重要性也促进了这种研究的发展。这种研究一直延伸到现在，并在最近一些年来受到很大的重视①。

经典力学发展的第三阶段是和Hamilton的工作分不开的。Hamilton对光学和力学之间深刻联系的思想促进了他对经典动力学作出了创造性的研究。他的成就概要为两点：第一，力学的原理不仅可以按牛顿的方式来叙述，也可以按某种作用量（数学上是某种泛函）的逗留值（有时是极小值）方式来叙述。第二，力学的状态描述和动力学方程可以找到一种优美的正则形式以及等价的"波动形式"，这些形式有着极好的数学性质。Jacobi继续了Hamilton的研究。Hamilton-Jacobi方法不仅仅开辟了解决天体力学以及物理学中一系列重要的动力学问题的途径，同时作为波动力学的先导，给量子力学的发展提供了启示。按Hamilton所描述的经典力学原理和动力学方程的形式，最适宜于成为向现代物理学过渡的桥梁。在这方面，我们只要举出最小作用量原理提供了建立相对论力学和量子力学最简练的而富有概括性的出发点，

① 见参考文献[4]，[5]，[11]，[12]，[13]。

以及Schrödinger方程、Heisenberg方程和Hamilton力学的紧密联系就可以说明。即使局限在经典范围内，Hamilton体系所包含的动力学现象也有着异常丰富的研究前景。非保守的经典动力学系统中奇异吸引子的发现以及有关所谓"浑沌"(Chaos)现象的研究模糊了确定性与随机性的界限，这是近年来关于动力学理论有基本意义的成果之一①。

最近一百年来现代物理学的发展只是使经典力学失去了那种误认为可以"统率一切"的虚假的光辉，但并没有使它失去巨大的应用价值。近一百年来现代应用力学的迅速发展就是明证。客观世界中宏观物质规律的错综复杂性以及力学方程组求解的困难，提供了应用力学长期研究的领域。分析动力学提供了这种应用力学研究最基本的原理和方法。由分析动力学研究所直接生长起来的关于振动、稳定性、陀螺、刚体与刚体系统、宇航器与天体力学的理论已经成为相当宽广的领域，而非线性力学，基于变分原理的直接法，可控体或生物体的动力学，以及有限自由度体系和连续体动力学之间的联系与过渡等等都正在受到很大的重视。有关这些问题的研究一定能更加丰富分析动力学的內容并大大开阔它的应用范围。

① 见参考文献[14],[15],[16]。

# 第一章　约束的研究

物体的机械运动就是物体的空间位置随时间的变动，而约束就是对物体机械运动附加的一种强制性的限制条件。除已知的给定力以外，由于约束而另加在运动物体上的力，就像该物体的运动一样是有待决定的。因此对于动力学问题，约束需要和力一样，作为一个基本因素来加以考虑。为此，需要对约束的种类和性质作深入的分析。

## §1.1　运动的多维空间描述

无论是对物体的运动加以研究或是对约束加以研究，都需要引入以下的描述。这里强调的实质，乃是关于为描述物体运动而引入的坐标随时间变化的函数所应具有的性质以及它们整体性的几何表现。

### 1.1.1　笛卡尔位形空间 $C$

对于物体运动的客观空间，我们引入一个笛卡尔坐标系 $Oxyz$。为描述一个质点，需要知道它的质量 $m$，以及每时刻的向径 $\boldsymbol{r}(t)$，或者记为

$$\text{质点：}\{m;\ \boldsymbol{r}(t):\ x(t),y(t),z(t)\}$$

其中 $t\in b$，$b$ 定义为由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的一维连续统；$m=\text{const}\in R^+$，正实数；$x(t),y(t),z(t)$ 为单值连续实函数。

以下来描述质点组：$N$ 个质点，编号为 $\nu=1,2,\cdots,N$；都在同一个笛卡尔坐标系 $Oxyz$ 内计算，表述为

$$\text{质点组：}\{m_\nu;\ \boldsymbol{r}_\nu(t):\ x_\nu(t),y_\nu(t),z_\nu(t);\ \nu=1,2,\cdots,N\}$$