

现代数学译丛

交换代数导引

[英] M. F. 阿蒂亚 著
I. G. 麦克唐纳

科学出版社



51.487
335

现代数学译丛

交换代数导引

(英) M. F. 阿蒂亚 著
I. G. 麦克唐纳

冯绪宁 刘木兰 戴宗铎 译

万哲先 校

科学出版社

1982

DS99 / 1.5

内 容 简 介

交换代数是代数几何及代数数论的重要工具,它对代数几何的作用如同微分学对微分几何的作用一样。本书用近代观点简明扼要地介绍了交换代数的主要内容,是一本较好的入门书。本书的特点是:强调了模的作用;着重介绍了“局部化”这个技术性工具;阐明了交换代数与代数几何的关系;每章附有大量习题,读者通过做题可学到交换代数的技巧。

本书可供数学工作者、特别是代数学和代数几何学工作者、大学数学系高年级学生及研究生阅读。

M. F. Atiyah I. G. MacDonald

INTRODUCTION TO COMMUTATIVE ALGEBRA

Addison-Wesley Publishing Company, 1969

现代数学译丛

交 换 代 数 导 引

【英】 M. F. 阿蒂亚 著
I. G. 麦克唐纳

冯绪宁 刘木兰 戴宗铎 译

万哲先 校

责任编辑 杜小杨 张鸿林

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 11 月 第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32

1982 年 11 月 第一次印刷 印张: 5 5/8

印数: 0001—7,150 字数: 143,000

统一书号: 13031 · 2086

本社书号: 2850 · 13—1

定 价: 1.10 元

序 言

交换代数本质上是研究交换环的。大体上讲,它由两个源泉发展而来:(1)代数几何,(2)代数数论。在(1)中,它所研究的环的原型是域 k 上的多变元多项式环 $k[x_1, \dots, x_n]$;在(2)中,则是有理整数环 $\mathbf{Z}$ 。两者之中,又以代数几何的影响更为深远。在由 Grothendieck 发展的现代的代数几何中,业已包含了很多代数数论的内容。交换代数则是这种新的代数几何的基础之一。正如微分学给微分几何提供了工具一样,交换代数给代数几何提供了完整的局部化工具。

本书出自为牛津大学三年级学生所开设的一个课程。它的本来目的是为了较快地介绍这个专题,并使得只学过普通代数基本课程的学生能够阅读它。另一方面,我们不打算用它来代替篇幅较大的关于交换代数的著作,如 Zariski-Samuel[4] 或 Bourbaki[1]。我们集中讨论某些中心课题,而不去触及象域论这样范围较广的题目。在内容上,我们比 Northcott[3]包括得广一些,讲法也同它有本质的区别。按照现代趋势,我们更多地强调了模和局部化。

交换代数中最核心的概念就是素理想,这是算术中素数或几何中点的概念的推广。集中注意于“接近一个点”这个几何概念其代数类比是环相对于一个素理想作**局部化**这个重要过程。所以,用几何语言对局部化的结果加以探讨是很自然的,在 Grothendieck 的**概型**(scheme)理论中已经系统地作到了这点。我们对于很多结果以练习和注释的形式用概型语言加以说明,一方面是作为对 Grothendieck 的工作^[2]的导引,同时也因为它提供了几何直观。

由于本书的前身是讲稿,因此文体相当简洁,几乎没有一般的题外说明,许多证明过程也压缩了。我们始终不打算扩大书的篇幅,希望能用简练的表达方式把现今已成为一种优美引人的理论

的数学结构说得更加清晰。我们的原则是通过一系列简单的步骤建立主要定理,而略去常规的验证过程。

目前,任何一个著述交换代数的作者都会遇到一个难题,即如何安排对现代发展起了如此重要作用的同调代数。在一本小书中原原本本地讲述同调代数是是不可能的,但是,完全忽略它也是不明智的。我们所采用的折衷方案是使用最基本的同调代数方法,如正合序列、图表等等,而不涉及那些需用深刻的同调论研究所得的结果,我们希望以这种办法为学习同调代数的系统课程打下基础,而这种课程是那些愿意深入学习代数几何的读者所必修的。

在每章结尾我们都安排了大量习题,这些题目有的容易,有的难。对那些较难的,我们通常给以提示,有时给出完整的答案。我们曾得到 R. Y. Sharp 先生的帮助,他作了全部习题,不只一次地帮助我们纠正了错误。

有很多数学家对本书所阐述的理论的发展作出过贡献,我们打算一一列举了。但是,我们还要向 J. P. Serre 和 J. Tate 两位表示感谢,因为我们向他们学习了这个课题,他们的影响对于本书的材料选取和表达方式都起了决定性的作用。

参 考 资 料

- [1] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Hermann, Paris (1961—65).
- [2] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Éléments de Géométrie Algébrique, Publications Mathématiques de l'I. H. E. S.*, Nos 4, 8, 11, ..., Paris. (1960—).
- [3] D. G. Northcott, *Ideal Theory*, Cambridge University Press (1953).
- [4] O. Zariski, and D. Samuel, *Commutative Algebra I, II*, Van Nostrand, Princeton (1958, 1960).

• • •

记 号 和 术 语

环和模用大写斜体字表示，它们中的元素用小写斜体字表示。一个域常记作 k 。理想用小写德文字母表示。 $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 分别代表有理整数环、有理数域、实数域和复数域。

我们总把映射写在左方，这样元素 x 在映射 f 之下的象写作 $f(x)$ ，而不是 $(x)f$ 。映射 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 的合成是 $g \circ f$ ，而不是 $f \circ g$ 。

称映射 $f: X \rightarrow Y$ 是单的，如果由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可得 $x_1 = x_2$ ；是满的，如果 $f(x) = Y$ ；既单又满的映射则称为**一一对应**（或**一一映射**）。

在证明完毕（或略去证明）时记以符号 ■。

集合的包含用符号 $\subseteq$ 表示，我们以符号 $\subset$ 表**真**包含。所以 $A \subset B$ 意味着 A 包在 B 中且不等于 B 。

目 录

序言	iv
记号和术语	vi
第一章 环和理想	1
环和环同态	1
理想, 商环	2
零因子, 幂零元, 可逆元	3
素理想和极大理想	4
小根和大根	6
理想的运算	7
扩张和局限	12
习题	14
第二章 模	23
模和模同态	23
子模和商模	25
子模上的运算	25
直和与直积	27
有限生成的模	28
正合序列	30
模的张量积	32
纯量的局限和扩充	37
张量积的正合性	37
代数	39
代数的张量积	40
习题	41
第三章 分式环和分式模	48
局部性质	53
理想在分式环中的扩张和局限	54

习题	57
第四章 准素分解	66
习题	72
第五章 整相关性和赋值	78
整相关性	78
上升定理	80
整闭整环, 下降定理	82
赋值环	85
习题	88
第六章 链条件	98
习题	103
第七章 Noether 环	105
Noether 环中的准素分解	108
习题	110
第八章 Artin 环	118
习题	121
第九章 离散赋值环和 Dedekind 整环	123
离散赋值环	124
Dedekind 整环	126
分式理想	127
习题	130
第十章 完备化	132
拓扑和完备化	133
滤链	138
分次环和分次模	139
相伴的分次环	145
习题	148
第十一章 维数理论	152
Hilbert 函数	152
Noether 局部环的维数理论	156
正则局部环	161
超越维数	162

习题.....	164
汉英名词索引.....	166
英汉名词索引.....	169

第一章 环和理想

我们首先简略地复习一下环的定义和基本性质。这可以说明要求读者具备的水平并用来规定有关记号和约定。然后讨论素理想和极大理想。本章最后一部分讨论在理想上进行的一系列初等运算。在本章末尾的习题中引进了 Grothendieck 概型的语言。

环和环同态

环 A 是具有两个二元运算(加法和乘法)的集合,使得

1) A 对于加法是一个交换群(这样, A 有零元素, 记为 0 , 而对于每个元素 $x \in A$ 有(加法)逆元素 $-x$).

2) 乘法是结合的:

$$(xy)z = x(yz).$$

而且对于加法是分配的:

$$x(y+z) = xy + xz,$$

$$(y+z)x = yx + zx.$$

我们所考查的环都是交换环:

3) 对所有 $x, y \in A$, $xy = yx$,

且具有单位元(记为 1):

4) $\exists 1 \in A$, 使得对所有 $x \in A$, $x1 = 1x = x$

这样, 单位元是唯一的。

在整本书里, “环”这个字都表示具有单位元的交换环。即适合上面的公理 1)-4) 的环。

注记。在 4) 中我们并不排除 $1 = 0$ 这一可能性, 如果这样的话, 那么对于任意元素 $x \in A$ 有

$$x = x1 = x0 = 0,$$

这就是说 A 由一个元素 0 组成. 这种环称为**零环**, 为了简略起见将它也记为 0 .

环同态是一个从环 A 映入环 B 的映射 f , 它具有以下性质:

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (即 f 是加法交换群的同态, 因此 $f(x - y) = f(x) - f(y)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(0) = 0$);

ii) $f(xy) = f(x)f(y)$;

iii) $f(1) = 1$.

换句话说, f 保持加法、乘法和单位元.

环 A 的子集 S 叫作 A 的**子环**, 如果 S 是加法子群, 对乘法封闭且含有 A 的单位元. 这时从 S 映入 A 的恒同映射就是个环同态.

如果 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$ 都是环同态, 那么它们的合成 $g \circ f: A \rightarrow C$ 也是环同态.

理 想 . 商 环

环 A 中的一个加法子群 $\mathfrak{a}$ 叫作环 A 的一个**理想**, 如果它具有性质 $A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ (即若 $x \in A$ 且 $y \in \mathfrak{a}$, 则 $xy \in \mathfrak{a}$). A 中乘法诱导出商群 $A/\mathfrak{a}$ 中唯一确定的乘法, 这就使得这个商群成为一个环, 叫做**商环**(或同余类环) $A/\mathfrak{a}$. $A/\mathfrak{a}$ 的元素是 A 对于 $\mathfrak{a}$ 的陪集, 而映射 $\varphi: A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ 将每个元素 $x \in A$ 映到它的陪集 $x + \mathfrak{a}$, 是环的满同态.

我们将经常用到下面这个事实:

命题 1.1 在环 A 的包含 $\mathfrak{a}$ 的那些理想 $\mathfrak{b}$ 与环 $A/\mathfrak{a}$ 的理想 $\bar{\mathfrak{b}}$ 之间存在着保持包含关系的一一对应: $\mathfrak{b} = \varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$. ■

设 $f: A \rightarrow B$ 是任一环同态, f 的核 $f^{-1}(0)$ 是环 A 中的一个理想 $\mathfrak{a}$, 而 f 的象 $f(A)$ 是环 B 中的子环 C , 同态 f 导出环同构 $A/\mathfrak{a} \cong C$.

我们有时采用记号 $x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}}$, 它等价于 $x - y \in \mathfrak{a}$.

零因子. 幂零元. 可逆元

环 A 中的**零因子**是指“整除 0”的元素 x , 即在 A 中存在着 $y \neq 0$, 使得 $xy = 0$. 没有非零零因子(且 $1 \neq 0$)的环叫作**整环**. 例如 $\mathbf{Z}$ 和 $k[x_1, \dots, x_n]$ (其中 k 是域而 $x_1, \dots, x_n$ 是无关变元), 都是整环.

元素 $x \in A$ 叫作**幂零的**, 如果 $x^n = 0$ 对某个 $n > 0$. 每个**幂零元**都是零因子(除非 $A = 0$), 但反过来, 一般说来不对.

环 A 中的**可逆元**是指每一个“整除 1”的元素 x , 即对某个 $y \in A$ 有 $xy = 1$. 这样一个元素 y 唯一地被确定, 记作 x^{-1} . A 中的可逆元全体组成一个(乘法)交换群.

一个元素 $x \in A$ 的所有倍元 ax 组成一个**主理想**, 记作 (x) 或 Ax . 元素 x 是可逆元, 当且仅当 $(x) = A = (1)$. **零理想**(0)通常简记作 0.

如果环 A 中 $1 \neq 0$ 而且每个非零元都是可逆元, A 就叫做**域**, 任一域都是整环(反过来并不对, $\mathbf{Z}$ 就不是域).

命题 1.2. 设 A 是个非零环, 那么以下诸断言等价:

- i) A 是域;
- ii) 在 A 中除了 0 和 (1) 之外没有别的理想;
- iii) 任一从 A 映入非零环的同态都是单的.

证明 i) $\rightarrow$ ii). 设 $\mathfrak{a} \neq 0$ 是 A 中的理想, 那么 $\mathfrak{a}$ 包含一个非零元 x , 但 x 是可逆元, 因此, $\mathfrak{a} \supseteq x = (1)$, 所以 $\mathfrak{a} = (1)$.

ii) $\rightarrow$ iii). 设 $\varphi: A \rightarrow B$ 是一个环同态, 它的核 $\text{Ker}(\varphi)$ 是 A 中的理想, 且异于 1, 因此, $\text{Ker}(\varphi) = 0$, 这就是说 φ 是单的.

iii) $\rightarrow$ i). 设 x 是 A 的一个元素, 并假定它不是可逆元. 因 $(x) \neq (1)$, 所以环 $B = A/(x)$ 不是零环. 令 $\varphi: A \rightarrow B$ 是从 A 映到 B 之上的以 (x) 为核的自然同态. 根据假设, φ 是单的. 因此 $(x) = 0$, 也就是说 $x = 0$. ■

素理想和极大理想

环 A 中的理想 p 叫做**素理想**, 如果 $p \neq (1)$, 而从包含关系 $xy \in p$ 推出 $x \in p$ 或者 $y \in p$.

环 A 中的理想 m 叫做**极大理想**, 如果 $m \neq (1)$, 而且不存在理想 a 适合条件 $m \subset a \subset (1)$ (严格包含关系).

换句话说:

p 是素理想 $\iff A/p$ 是整环;

m 是极大理想 $\iff A/m$ 是域(根据(1.1)和(1.2)).

因此每个极大理想都是素理想(反过来, 一般说来不对). 零理想是素理想, 当且仅当 A 是整环.

设 $f: A \rightarrow B$ 是个环同态, 而 q 是 B 中的素理想, 因为 $A/f^{-1}(q)$ 与 B/q 的一个子环同构, 所以它不包含非零零因子, 因此理想 $f^{-1}(q)$ 是 A 中素理想. 然而, 如果理想 n 是 B 中的一个极大理想, 那么 $f^{-1}(n)$ 不一定是 A 中的极大理想. 我们只能断定它是素理想. (例如 $A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{Q}, n = 0$.)*)

素理想在整个交换代数中是很基本的, 下面的定理及其系理指出有足够多的素理想.

定理 1.3. 每个 $\neq 0$ 的环 A 中都有极大理想.(我们提醒一下, 我们只考虑有单位元的交换环.)

证明. 本定理的证明是 Zorn 引理¹⁾的一个标准应用.

用 Σ 表示 A 中所有 $\neq (1)$ 的理想的集合. 按包含关系在 Σ

*) 如果 f 是满同态, 那么从 n 是 B 的极大理想可推出 $f^{-1}(n)$ 是 A 的极大理想.——译者注

1) 设 S 是个非空偏序集, 这就是说, 在 S 中给了一个关系 $x \leq y$, 它是自反的、传递的, 并具有性质: 从 $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 同时成立推出等式 $x = y$. S 的子集 T 叫做链, 如果对任意一对 $x, y \in T$, 一定有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$. Zorn 引理断言, 如果 S 中的每个链 T 都在 S 中有上界 (也就是说, 存在 $x \in S$, 使得对一切 $t \in T$, 有 $t \leq x$), 那么 S 中至少有一个极大元.

Zorn 引理等价于选择公理、良序原理等等, 可参看例如 P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand (1960).

中引进次序,集合 Σ 包含 0,因而非空. 为了应用 Zorn 引理,需要验证 Σ 中的每个链在 Σ 中都有一个上界, 设 (a_α) 是 Σ 中的一个理想链, 那么对任何一对足码 α, β , 都有 $a_\alpha \leq a_\beta$ 或 $a_\beta \leq a_\alpha$. 令 $a = \bigcup a_\alpha$. 那么易证 a 是理想, 因为 $1 \notin a_\alpha$ 对所有 α , 所以 $1 \notin a$. 因此 $a \in \Sigma$ 而 a 是所考察的链的上界. 由 Zorn 引理推出, Σ 中有一个极大元. ■

系理 1.4. 若 A 中一个理想 $a \neq (1)$, 则 A 中存在一个包有 a 的极大理想.

证明. 将(1.3)用到 A/a 上, 再利用(1.1). 也可将(1.3)的证明加以变形来直接证明. ■

系理 1.5. A 中任一非可逆元素都包在一极大理想中. ■

注记. 1) 如果环 A 是 Noether 环(第七章), 我们可以避免用 Zorn 引理而得到: 在所有 $\neq (1)$ 的理想组成的集合中有一个极大元.

2) 有的环恰只有一个极大理想, 例如域, 有唯一的一个极大理想 m 的环 A 叫作局部环, 而域 $k = A/m$ 叫做环 A 的同余类域.

命题 1.6. i) 设 A 是一个环, $m \neq (1)$ 是 A 中这样一个理想, 它使得任一元素 $x \in A \setminus m$ 都是可逆元, 那么 A 是局部环, m 是它的极大理想.

ii) 设 A 是一个环, m 是它的一个极大理想, 并假定 $1 + m$ 中任一元素 (即 $1 + x$, 而 $x \in m$) 都是 A 中可逆元, 那么 A 是局部环.

证明. i) 任一 $\neq (1)$ 的理想都由非可逆元组成, 因此都包在 m 中, 由此推出 m 就是 A 中唯一极大理想.

ii) 设 $x \in A \setminus m$. 因为 m 极大, x 和 m 一起就生成理想 (1) , 因此存在着这样的元素 $y \in A$ 和 $t \in m$ 使得 $xy + t = 1$. 由此推出 $xy = 1 - t$ 属于 $1 + m$, 因而是可逆元, 再利用 i) 即可. ■

仅有有限个极大理想的环叫作半局部环.

例. 1) $A = k[x_1, \dots, x_n]$, k 为域, 设 $f \in A$ 是一个不可约多项式. 由唯一因子分解定理推出理想 (f) 是一个素理想.

2) $A = \mathbf{Z}$. $\mathbf{Z}$ 中任一个理想均有形状 (m) , 这里 $m \geq 0$. (m) 是素理想当且仅当 $m = 0$ 或 m 是素数. 所有形如 (p) 的理想, 其中 p 是素数, 都是极大理想. $\mathbf{Z}/(p)$ 是由 p 个元素组成的域.

同样断言对于例 1) 当 $n = 1$ 时也成立, 然而当 $n > 1$ 时不成立. $A = k[x_1, \dots, x_n]$ 中所有常数项等于 0 的多项式组成的理想 $\mathfrak{m}$ 是一个极大理想. 因为它是将 $f \in A$ 映到 $f(0)$ 的同态 $A \rightarrow k$ 的核. 然而当 $n > 1$ 时理想 $\mathfrak{m}$ 不是主理想: 它的任意一组生成元都至少包含 n 个元素.

3) **主理想整环** 是所有理想都是主理想的整环. 在这种环里, 任一非零素理想都是极大的. 因为如果理想 $(x) \approx 0$ 是素理想, 而 $(y) \supset (x)$, 那么 $x \in (y)$, 令 $x = yz$, 因 $yz \in (x)$, 而 $y \notin (x)$, 所以推出 $z \in (x)$. 令 $z = tx$, 那么 $x = yz = ytx$, 于是 $yt = 1$, 因而 $(y) = (1)$.

小根和大根*)

命题 1.7. 环 A 的所有幂零元的集合 $\mathfrak{N}$ 是一个理想; 环 $A/\mathfrak{N}$ 中没有非 0 幂零元.

证明. 如果 $x \in \mathfrak{N}$, 显然有 $ax \in \mathfrak{N}$, 对所有 $a \in A$. 设 $x, y \in \mathfrak{N}$, 并设 $x^m = 0, y^n = 0$. 根据二项式定理 (它在任意交换环中亦成立), $(x + y)^{m+n-1}$ 是乘积 $x^r y^s$ 的带整系数的和, 其中 $r + s = m + n - 1$. 显然, 不等式 $r < m$ 和 $s < n$ 不能同时成立, 因此这些乘积中的每一个都是零, 这就是说 $(x + y)^{m+n-1} = 0$. 因此 $x + y \in \mathfrak{N}$. 这证明了 $\mathfrak{N}$ 是理想.

将元素 $x \in A$ 所属的 $A/\mathfrak{N}$ 中的同余类记作 $\bar{x}$. 那么 $\bar{x}^n$ 就是 x^n 所属的同余类. 因此 $\bar{x}^n = 0 \implies x^n \in \mathfrak{N} \implies (x^n)^k = 0$ 对某个 $k > 0 \implies x \in \mathfrak{N} \implies \bar{x} = 0$. ■

理想 $\mathfrak{N}$ 叫作环 A 的**小根**. 下面命题给出 $\mathfrak{N}$ 的另一种定义.

*) 小根又叫幂零元根, 大根又叫 Jacobson 根. ——译者注

命题 1.8. A 的小根即是 A 中所有素理想的交.

证明. 设 $\mathfrak{N}'$ 是 A 中所有素理想的交. 如果 $f \in A$, f 幂零, 而 $\mathfrak{p}$ 是一素理想, 那么对某个 $n > 0$, 有 $f^n = 0 \in \mathfrak{p}$, 由 $\mathfrak{p}$ 是素理想推出 $f \in \mathfrak{p}$, 因此 $f \in \mathfrak{N}'$.

反过来, 设 f 不是幂零元. 用 Σ 表一切具有性质

$$n > 0 \implies f^n \notin \mathfrak{a}$$

的理想 $\mathfrak{a}$ 的集合. 因为 $0 \in \Sigma$, 所以 Σ 不是空集. 将 Σ 按包含关系引进次序. 用(1.3)中同样的论证方法可证能够将 Zorn 引理应用到 Σ 上. 因此, Σ 有一个最大元, 将它记作 $\mathfrak{p}$. 再去证明 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 设 $x, y \notin \mathfrak{p}$, 那么理想 $\mathfrak{p} + (x)$ 和 $\mathfrak{p} + (y)$ 都严格包含 $\mathfrak{p}$, 所以都不属于 Σ . 因此

$$f^m \in \mathfrak{p} + (x), \quad f^n \in \mathfrak{p} + (y)$$

对某两个 m 和 n . 由此推出 $f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$. 因此理想 $\mathfrak{p} + (xy)$ 不属于 Σ . 所以 $xy \notin \mathfrak{p}$. 这样我们就有一个素理想 $\mathfrak{p}$ 它不包含 f , 因此 $f \notin \mathfrak{N}'$. ■

环 A 的大根 $\mathfrak{N}$ 定义为它所有的极大理想的交. 它可以描述如下:

命题 1.9. $x \in \mathfrak{N} \iff$ 对一切 $y \in A$, $1 - xy$ 都是可逆元.

证明. $\implies$: 如果 $1 - xy$ 不是可逆元, 那么根据(1.5), 这个元素属于某个极大理想 $\mathfrak{m}$. 但是, $x \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{m}$, 因此 $xy \in \mathfrak{m}$, 于是 $1 \in \mathfrak{m}$, 矛盾.

$\impliedby$: 假定 $x \notin \mathfrak{N}$, 而 $\mathfrak{m}$ 是某个极大理想. 这时 $\mathfrak{m}$ 和 x 一起就生成理想 (1). 因此对于某个 $u \in \mathfrak{m}$ 和某个 $y \in A$, 有 $u + xy = 1$. 这就是说 $1 - xy \in \mathfrak{m}$, 因此这个元素不是可逆元. ■

理想的运算

设 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是环 A 中的理想, 它们的和 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ 定义为所有的和 $x + y$ 的集合, 其中 $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{b}$, 它是包含 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的最理想. 更一般地, 还可以定义环 A 中任意一组理想(不一定是有限个)的和

$\sum_{i \in I} a_i$; 这个和中的元素是所有可能的形如 $\sum x_i$ 的和, 其中 $x_i \in a_i$, 对一切 $i \in I$, 且几乎所有元素 x_i (即除有限个外) 都是零元素. 这些理想的和是包含所有这些理想 a_i 的最小理想.

任意一组理想的交仍是理想, 因此环 A 的理想对于包含关系组成一个完备格.

环 A 中两个理想 a 和 b 的积 ab 定义为由一切可能的乘积 xy 所生成的理想, 其中 $x \in a$ 而 $y \in b$. 它是一切有限和 $\sum x_i y_i$ 的集合, 其中每个 $x_i \in a$, 每个 $y_i \in b$. 类似地可定义任意有限个理想的积. 特别, 对任意理想 a , 可定义它的幂 $a^n (n > 0)$. 照惯例, 规定 $a^0 = (1)$. 理想 $a^n (n > 0)$ 由所有可能的乘积 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 所生成, 其中 $x_i \in a$, 对一切 i .

例. 1) 如果 $A = \mathbf{Z}$, $a = (m)$, $b = (n)$, 那么 $a + b$ 由 m 和 n 的最大公因数所生成; $a \cap b$ 由它们的最小公倍数所生成; 而 $ab = (mn)$. 因此, 这时有 $ab = a \cap b \iff m, n$ 互素.

2) $A = k[x_1, \cdots, x_n]$, $a = (x_1, \cdots, x_n)$ 由元素 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的理想. 这时 a^m 是不含次数 $< m$ 的项的所有多项式 (连同 0) 的集合.

到目前为止所定义的三种运算 (和、交、积) 都是交换的和结合的, 分配律也成立:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

在环 $\mathbf{Z}$ 中, $\cap$ 和 $+$ 这两个运算中的每一个对另一个都是分配的. 但是在一般情形, 这个事实并不成立. 在这方面最好的结果是模律:

如果 $a \supseteq b$ 或 $a \supseteq c$, 则 $a \cap (b + c) = a \cap b + a \cap c$.

在环 $\mathbf{Z}$ 中, 有 $(a + b)(a \cap b) = ab$. 但在一般情形只有包含关系 $(a + b)(a \cap b) \subseteq ab$ 成立 (因为 $(a + b)(a \cap b) = a(a \cap b) + b(a \cap b) \subseteq ab$). 显然 $ab \subseteq a \cap b$, 因此

如果 $a + b = (1)$ 则 $a \cap b = ab$.

如果 $a + b = (1)$, 理想 a 和 b 叫作互素的. 对于互素的理想