F. 卡施 著
陈家鼐 译

科学出版社

模与环

模　与　环

F. 卡施 著
陈家鼐 译

科 学 出 版 社
1 9 9 4

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书对模论作了完整的论述，后三章侧重专题讨论．第 1 章介绍范畴和函子；第 2—4 章介绍环、模、环同态、模同态、直积、直和、自由模；第 5 章介绍内射及投射模；第 6 章介绍 Artin 及 Noether 模；第 7 章为局部环及相关定理；第 8、9 章为半单性、根和底座；第 10 章为平坦模和张量积；第 11 章是完全环；第 12 章是完全对偶环；第 13 章是拟 Frobenius 环．本书适合攻读代数方向的大学生及研究生使用．

F. Kasch

MODULN UND RINGE

B. G. TEUBNER GMBH, STUTTGART, 1977

模 与 环

F. 卡施 著

陈家鼐 译

责任编辑 徐宇星

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 5 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1994 年 5 月第一次印刷 印张：12 1/4

印数：1—1 300 字数：318 000

ISBN 7-03-003864-9/O · 678

定价： 13.50 元

序

本书主要有两个目的. 首先对模与环论的基本概念予以表述. 表述力求繁简得当，使本书既适合作教材又适合自学之用. 其次是以一种容易理解的方式来发展几个专题的讨论. 这几个专题迄今为止还难以在教科书里看到，但在我们所涉及的领域中却占有重要的地位. 它们主要指的是完全对偶环和拟 Frobenius 环 (QF 环).

总之，本书旨在使读者达到这样一个境地，即能够从最简单的基本定义出发，对于那些在科研发展中具有时代意义的问题和讨论有所领会.

为了达到以上目的，书中给出了大量的、难易程度不同的习题. 做这些题目不仅是为了熟悉书中所讲的材料，同时还可接触到书中没讲的一些概念和发展导向.

本书的体制受到下列观点的左右，即投射模和内射模的概念在整个模和环的理论中具有根本的重要性. 因此我尽早予以阐述. 这样它们在处理古典理论部分时也可以被用上.

同样，把生成子和余生成子作为基本概念尽早加以发展，使得我们可以充分利用. 这些，再加上各种的有限条件，大致就形成了本书的主要观点. 其发展的顶峰是内射余生成子或满足有限条件的内射余生成子(即 QF 环)的理论.

为了不使书的篇幅过大，范畴的概念只涉及到其必不可少的部分. 由于已有不少关于范畴的好书可读（例如 B. Pareigis 的 Kategorien und Funktoren, Stuttgart, 1969)，读者可以很容易补充这方面的知识.

对于所处理的题材，首先选取必要的基本概念，其次也考虑，怎样以最简捷的方式引出最后三章的内容.

本书是由作者在几个不同的大学讲课和主持讨论班的内容的基础上写成的。因此，教学经验也在书中有所体现。熟悉书中素材的人将不难发现，书中并不总是选择“最短的”证明，有时也进行一些必要的演算。在有的地方有时还重复或者给出一个与前不同的证明。所有这些都是出于一个考虑：使本书更好懂一些。当然，涉及到教学问题，我深知见仁见智之处是很多的。

就我所知，一本教科书不用像研究论文那样，对于个别结果的出处交待得非常清楚。因此我在本书中只在少数特别重要的地方才给出人名。对于许多经过很多人共同努力才取得成果，要准确给出其归属并非易事。我从许多别的书上得到的经验似乎是：与其误给还不如不给。

除了为读者选出一部分关于模与环教材与专著外，还结合最后三章的内容选列了若干论文原作以激发读者研究的兴趣。这里，纯粹是个人的选择，不涉及对作者们的评价。

许多同事、合作者和学生对本书提出了建议和有见地的批评，使我受益不浅。在此对大家致以衷心的感谢。特别要感谢 W. Müller, W. Zimmermann 和 H. Zöschinger 先生给予我的支持。最后几章是经过同 H. Zöschinger 先生的深入讨论才形成的，他为此还提供了大量的习题。没有上述几位对于数学与教法上的问题所怀有的浓烈兴趣，这本书是肯定不会获得今天这样的面貌的。

最后让我向出版人和出版社有益和高效的合作而致谢。

慕尼黑，1976 年秋

F. 卡施

英译本序(部分)

译者之所以有意翻译本书，是基于这样一个信念，即出版本书的英文版将是很有意义的。后来又受到了两篇书评的进一步鼓舞。书评说，将本书英译将是具有相当价值的。英译本是根据德文原版直接译出，基本上没有任何变动，只有引理 5.2.4 和 5.2.5 以及推论 11.1.4 是例外，它们的证明都比原来的简洁。另外，第 11 章第 7 节是新加进来的。

（下略）

Stirling, 1981 年春　　　　　　D. A. R. Wallace

中 译 本 序

对于本书的介绍，原序和英译本序中都已说得很多了．我自1987年以来，曾数度采用本书作为研究生环论课的教材，我得出的突出经验是：初学者通过一年左右的学习，能对环论的基本内容和方法有一个比较全面而又相当深入的理解，具备一定的基础和素养，甚至于成为环论研究的新手．就这一点来说，本书确实可列为少数优秀的教材之一．这也是我译本书的主要原因之一．在这点上，我译此书的愿望之迫切，比之英译者 Wallace 先生可说是有过之无不及的．

本书是根据1977年的德文原版翻译的，并采纳了1981年的英译本所作的改进和补充，即引理5.2.4和5.2.5、推论11.1.4以及§11.7是根据英译本译出的．

译稿的整理和校对曾得到刘恒亮、郝荣霞两位同志的宝贵的帮助．郝荣霞同志根据英译本译出了全部的习题．科学出版社的负责同志们在印行过程中提供了有效的、愉快的合作，在此一并致谢．

北京，1992年夏　　　　陈家鼐

符　号　表

符号	意义
$\wedge$	且
$\vee$	或(非排除性的)
$\forall$	对所有的,对每个
$\exists$	存在
$\Rightarrow$	推出
$\Longleftrightarrow$	等价于
$:\Leftrightarrow$ $:=$	定义
$\lightning$	矛盾
$\subseteq$	子集
$\subsetneqq$	真子集
$\not\subset$	不包含于
$\hookrightarrow$	子对象
$\underset{\neq}{\hookrightarrow}$	真子对象
$\not\hookrightarrow$	非子对象
$/$	整除（a/b 意为 a 整除 b）
$\setminus$	补集（$A\setminus B:=\{a\mid a\in A, a\notin B\}$）
$\square$	证毕
$\mathbf{N}$	自然数集（$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$）
$\mathbf{Z}$	整数环
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathbf{R}$	实数域
$\overset{\circ}{\hookrightarrow}$	小子模
$\overset{*}{\hookrightarrow}$	大子模

注意 $A,B,C\cdots$和 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\cdots$之间的不同(例如 $M\in\mathbf{M}_R$)。

目　　录

第 1 章　范畴的基本概念

1945 年以来,数学的一个新的分支,即范畴理论，开始发展起来. 这一理论不仅本身已成为一门重要的学科，带给我们许多的概念和方法，它还有助于我们对数学整体的理解. 它的意义在于，能使我们把源自数学各分支的重要概念和研究联系起来统一地去发展. 特别地它能使我们对不同结构的共同性质加以描述和研究.

这样范畴理论导致了大量的新观点和新问题的提出，它们不仅在范畴理论本身有其重要性，同时也在不同的具体范畴中提出了新的研究课题. 这一点对于模范畴更为典型，而后者又反过来促进了范畴学的发展.

范畴理论中的基本概念已经愈来愈多地被引进到数学的“日常语言”之中,并在数学的不同领域里被用来描述概念和事实. 特别是在模范畴中,范畴语言的知识已是必不可少的了.

下面我们就来介绍这些语言知识. 我们将力求涉及面不要太宽，而只深入到对于往后的理解必不可少的概念. 关于范畴的进一步知识可以参阅本丛书中的 B. Pareigis 所著的《范畴与函子》一书.

1.1　范畴的定义

我们假定集和类这两个概念是已知的. 约略地说，类可以理解为“非常大”的集，同时不能对它施以可能引起悖论的运算. 例如，不能像对集那样定义所有子类的类. 在类和集的公理化理论中,集恰是这样的类:它们本身都是某个类的元素. 类也可以直观地理解为“所有具有某种性质的事物的全体.”

关于类的准确定义可以参考专门著作.对于本书下面的内容，准确的关于类的知识并非绝对必要，因为从类的概念并不能导出数学的结论.

1.1.1 **定义** 一个类 $\boldsymbol{K}$ 由以下内容给出:

I. 一个类 $\mathrm{Obj}(\boldsymbol{K})$ 叫做 $\boldsymbol{K}$ 的对象类,它的元素则叫做 ($\boldsymbol{K}$ 的) 对象,并以 $A,B,C,\cdots$ 来表示.

II. 对任一个对象 (A,B) 有一个集 $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B)$ 并规定对于不同的对象对 $(A,B)\neq(C,D)$,$\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B)\cap\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(C,D)=\phi$. $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B)$ 的元素叫做从 A 到 B 的态射,并以 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 来表示.

III. 对任何三元对象组 (A,B,C) 有一映射 $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(B,C)\times\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B)\ni(\beta,\alpha)\longmapsto\beta\alpha\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,C)$ 叫做乘法并满足

(1) 结合律: $\gamma(\beta\alpha)=(\gamma\beta)\alpha$, 对所有的

$\alpha\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B),\beta\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(B,C),\gamma\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(C,D)$.

(2) 恒等态射的存在: 对任意对象 $A\in\mathrm{Obj}(\boldsymbol{K})$ 存在一个态射 $1_A\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,A)$,它叫做 A 的恒等态射并满足以下性质: 对于任意 $\alpha\in\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B)$ 有 $\alpha 1_A=1_A\alpha=\alpha$.

现在给出一些记法和简单性质.

在不致引起误解的情况下,我们简记

$$\mathrm{Mor}(A,B)=\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B)$$

此外,记

$$\mathrm{Mor}(\boldsymbol{K}):=\bigcup_{A,B\in\mathrm{Obj}(\boldsymbol{K})}\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{K}}(A,B)$$

为 K 的态射的类. 我们也采取以下简记法:

$$A\in\boldsymbol{K}:\Longleftrightarrow A\in\mathrm{Obj}(\boldsymbol{K})$$

$$\alpha\in\boldsymbol{K}:\Longleftrightarrow\alpha\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{K})$$

现在设 $\alpha\in\mathrm{Mor}(A,B)$,则像讨论映射时一样,我们定义

α 的源 $=\mathrm{Dom}(\alpha):=A$

α 的标 $=\mathrm{Cod}(\alpha):=B$

由于对于不同的对 (A,B)，集 $\mathrm{Mor}(A, B)$ 是彼此交空的，$\mathrm{Dom}(\alpha)$ 和 $\mathrm{Cod}(\alpha)$ 是由 α 唯一决定的。

$\alpha\in\mathrm{Mor}(A,B)$ 也写作

$$\alpha: A\to B \text{ 或 } A\xrightarrow{\alpha}B$$

记号 $A\to B$ 表示 $\mathrm{Mor}(A, B)$ 中的一个元素，箭头$\longrightarrow$表示 $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{K})$ 中的一个元素

下图的交换性

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \gamma\downarrow & & \downarrow\beta \\ D & \xrightarrow{\delta} & C \end{array}$$

意为 $\beta\alpha=\delta\gamma$。

若对于 $\alpha,\beta\in\mathrm{Mor}(\boldsymbol{K})$ 可以给出乘积 $\beta\alpha$，则总意味着定义 1.1.1 中对于乘法所规定的要求，$\mathrm{Cod}(\alpha)=\mathrm{Dom}(\beta)$ 是被满足的

1.1.2 命题 恒等态射是 1_A（由 Ⅲ(2) 中给定的性质）唯一决定的。

证明：设 e_A 也是 A 的一个恒等态射，则有

$$e_A=e_A1_A=1_A$$

1.1.3 定义 设 $\boldsymbol{K}$ 是一个范畴，$\alpha: A\to B$ 是 A 的一个态射，则以下记法意为

(1) α 是单态射：$\Longleftrightarrow\forall C\in\boldsymbol{K}\forall\gamma_1, \gamma_2\in\mathrm{Mor}(C, A)[\alpha\gamma_1=\alpha\gamma_2\Rightarrow\gamma_1=\gamma_2]$.

(2) α 是满态射：$\Longleftrightarrow\forall C\in\boldsymbol{K}, \forall\beta_1,\beta_2\in\mathrm{Mor}(B, C)[\beta_1\alpha=\beta_2\alpha\Rightarrow\beta_1=\beta_2]$.

(3) α 是双态射：$\Longleftrightarrow\alpha$ 是单态射且 α 是满态射

(4) α 是同构：$\Longleftrightarrow\exists\beta\in\mathrm{Mor}(B,A)[\beta\alpha=1_A\wedge\alpha\beta=1_B]$.

(5) α 是自态射：$\Longleftrightarrow\mathrm{Dom}(\alpha)=\mathrm{Cod}(\alpha)$.

(6) α 是自同构：$\Longleftrightarrow\alpha$ 是同构且 α 是自态射。

1.1.4 **命题** α 是同构 $\Longrightarrow$ α 是双态射

证明：设 $\beta\alpha = 1_A, \alpha\beta = 1_B$. 由 $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2$ 有

$$\gamma_1 = 1_A\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_1 = \beta\alpha\gamma_2 = 1_A\gamma_2 = \gamma_2$$

由 $\beta_1\alpha = \beta_2\alpha$ 类似地有

$$\beta_1 = \beta_1 1_B = \beta_1\alpha\beta = \beta_2\alpha\beta = \beta_2 1_B = \beta_2$$

我们指出，1.1.4 的逆一般不成立（例子见习题）。不过，在许多重要的范畴里，比如说模范畴里，它却是成立的，后面我们将证明这一事实。

1.2 范畴的例子

在下面的例子中我们分别在（I）中给出对象类，（Ⅱ）中给出集 Mor(A,B)，（Ⅲ）中给出对于 $\alpha \in$ Mor(A,B), $\beta \in$ Mor(B,C) 的积 $\beta\alpha$. 各条公理的验证是很容易的.

1.2.1 $\boldsymbol{S}$ = 集范畴

（I）Obj$(\boldsymbol{S})$ = 集的类.

（II）Mor(A,B) = 所有从 A 到 B 的映射.

（III）$\beta\alpha$ = 映射 α 和 β 的合成.

1.2.2 $\boldsymbol{G}$ = 群范畴

（I）Obj$(\boldsymbol{G})$ = 群的类.

（II）Mor(A,B) := Hom(A, B) = 所有从 A 到 B 的群同态.

（III）合成.

1.2.3 $\boldsymbol{A}$ = Abel 群范畴

（I）Obj$(\boldsymbol{A})$ = Abel 群的类.

（II）和（III）同 $\boldsymbol{G}$

在这情形 Hom(A, B) 也可以被作成一个 Abel 群.

定义：B 中的群运算用加法来表示，设 $\alpha_1, \alpha_2 \in$ Hom(A, B),

则 $\alpha_1+\alpha_2$ 可以如下定义

$$\mathrm{Dom}(\alpha_1+\alpha_2):=A,\ \mathrm{Cod}(\alpha_1+\alpha_2):=B.$$

$$\forall a\in A[(\alpha_1+\alpha_2)(a):=\alpha_1(a)+\alpha_2(a)]$$

很容易验证，通过这一定义 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 确实是一个 Abel 群，特别地，这个群的零元素是从 A 到 B 的零映射，而对于任意 $\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)$，$-\alpha$的定义如下

$$\mathrm{Dom}(-\alpha):=A,\mathrm{Cod}(-\alpha):=B,$$

$$\forall a\in A[(-\alpha)(a):=-\alpha(a)]$$

1.2.4 $\boldsymbol{R}$ = 幺环范畴

(I) $\mathrm{Obj}(\boldsymbol{R})$ = 幺环的类.

(II) $\mathrm{Mor}(R,S)$ = 所有从 R 到 S 的幺环同态集（定义见 3.2.1).

(III) 合成.

1.2.5 $\boldsymbol{M}_R$ = 幺环 R 上所有 R 右幺模范畴

(I) $\mathrm{Obj}(\boldsymbol{M}_R)$ = R 右幺模的类(定义见 2.2.1).

(II) $\mathrm{Mor}(A,B):=\mathrm{Hom}(A,B)$ = 所有从 A 到 B 的模同态集(定义见 3.1.1).

(III) 合成.

像在 Abel 群范畴那里一样,$\mathrm{Hom}(A,B)$ 也可以通过与 1.2.3 中相同的定义被作成一个 Abel 群，但一般却作不成 R 模！以后将详细讨论.

如果 S 也是一个幺环，那么可以类似地定义 S 左幺模 ${}_S\boldsymbol{M}$ 和 S-R 双幺模 ${}_S\boldsymbol{M}_R$（定义见 2.1.1 及其后).

1.2.6 $\boldsymbol{T}$ = 拓扑空间范畴

(I) $\mathrm{Obj}(\boldsymbol{T})$ = 拓扑空间的类.

(II) $\mathrm{Mor}(A,B)$ = 所有从 A 到 B 的连续映射集.

(III) 合成.