

桿系的穩定性

И. К. 斯尼特科 著

建 筑 工 程 出 版 社

12

54

系统的稳定性

王 明 周 凤 孙 振 著

清华大学出版社

桿系的穩定性

东北工学院材料力学教研組 譯

建築工程出版社出版

內容提要 本書分為四章：第一章講基本原理和方法以及桿的穩定問題；第二章討論剛架的穩定性；第三章介紹剛架和拱的臨界載荷的近似計算法；第四章係壓-彎剛架和拱按極限狀態計算的實用方法。書中附有許多實例。

本書可供設計工程師以及研究穩定的實際計算方法的科學研究人員、教師和研究生作參考之用。

* * *

參加本書翻譯工作的為東北工學院材料力學教研組陶學文、王中心、楊恩德、賈伯庸、褚宗良、張玉忱、王增華；最後由陶學文、賈伯庸、褚宗良作校對。

原本說明

書 名 УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

著 者 Н. К. Снитко

出版者 Государственное издательство литературы по
строительству и архитектуре

出版地點 及 日期 Москва — 1952

桿系的穩定性

東北工學院材料力學教研組 譯

*

建築工程出版社出版 (北京市阜成門外南風士路)

(北京對書刊出版圖書業許可証出字第052號)

建築工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

書 號 294 232千字 850×1168 1/32 84插頁

1956年7月第1版 1956年7月第1次印刷

印 數：1—5,000冊 定價(10)1.70元

71.212
4722
12

目 錄

序	5
第一章 基本概念、桿的穩定問題	7
第一節 穩定理論發展史概述	7
第二節 基本原理、喪失第一類穩定性時的臨界載荷	12
第三節 第二類穩定性的喪失	16
第四節 確定歐拉臨界載荷的方法	20
第五節 壓彎桿和拉彎桿的彈性綫一般方程式	26
第六節 起始參數法確定常截面桿在複雜縱彎曲情形的 臨界載荷	41
第七節 局部受壓桿和壓拉桿的穩定問題	46
第八節 變截面柱受集中力系作用時的穩定性	52
第九節 差分方程式的应用、圖解分析法	56
第十節 能量法確定軸向分佈載荷的臨界值	65
第十一節 多跨彈性支座桿(起始參數法)	70
第十二節 虛變位原理应用在研究多跨彈性支座桿的穩 定性	78
第十三節 起始參數法確定拱的臨界載荷、三鉸拱	81
第二章 彈性變形範圍內的剛架系統穩定性	92
第十四節 引言、基本方法	92
第十五節 用端力矩和實際載荷表示的壓彎桿轉角公式	93
第十六節 壓彎剛架的四力矩方程式	97
第十七節 有結點綫變位的剛架的穩定問題、採用機動鍵形 式基本系的力矩法	101
第十八節 力矩法確定多層柱和剛架的臨界載荷的实例	106
第十九節 起始參數法在壓彎剛架的計算和穩定分析中的 应用	114
第二十節 固結剛架穩定性分析中的力矩焦點法	125



第二十一節	變位法計算壓彎剛架時的基本關係式	133
第二十二節	變位法作剛架穩定計算的一般過程、臨界載荷 計算实例	143
第二十三節	單跨多層對稱剛架的臨界載荷計算、 π 係數法	151
第三章	剛架和拱的臨界載荷近似計算法	159
第二十四節	引言、計算由結點變位引起力矩的方法	159
第二十五節	使結點垂直反力為零的方法確定單跨剛架的臨 界載荷	164
第二十六節	用等穩定單跨剛架代替多跨剛架的方法	171
第二十七節	代用剛架法確定拱的歐拉臨界載荷	174
第二十八節	γ 係數法確定變截面扁平拱的臨界載荷	187
第四章	塑性範圍內的桿、拱和剛架的穩定問題	196
第二十九節	按壓縮圖求折算模數以及強化計算	196
第三十節	由臨界應力曲綫定折算模數	204
第三十一節	在折算模數沿拱長為變值的情形確定拱的極限 載荷	206
第三十二節	關於考慮塑性變形計算壓彎剛架的一般強度和 剛度	212
第三十三節	各種截面桿在塑性階段橫向彎曲情形的應力和 極限彎矩	215
第三十四節	工字形截面偏心壓桿的極限載荷	224
第三十五節	考慮壓力影響的剛架極限狀態計算	227
第三十六節	考慮壓力影響作拱的受壓計算和拱受不對稱載 荷的計算	243
附 錄		254
1.	壓桿的 H. E. 茹科夫斯基函數	254
2.	特殊函數表	258
3.	變形法公式的係數	269
4.	中心受壓拱的臨界載荷表	271
參考書籍		277

桿系的穩定性

东北工学院材料力学教研組 譯

建築工程出版社出版

內容提要 本書分為四章：第一章講基本原理和方法以及桿的穩定問題；第二章討論剛架的穩定性；第三章介紹剛架和拱的臨界載荷的近似計算法；第四章係壓-彎剛架和拱按極限狀態計算的實用方法。書中附有許多實例。

本書可供設計工程師以及研究穩定的實際計算方法的科學研究人員、教師和研究生作參考之用。

* * *

參加本書翻譯工作的為東北工學院材料力學教研組陶學文、王中心、楊恩德、賈伯庸、褚宗良、張玉忱、王增華；最後由陶學文、賈伯庸、褚宗良作校對。

原本說明

書 名 УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

著 者 Н. К. Снитко

出版者 Государственное издательство литературы по
строительству и архитектуре

出版地點 及 日期 Москва — 1952

桿系的穩定性

東北工學院材料力學教研組 譯

*

建築工程出版社出版 (北京市阜成門外南風口路)

(北京圖書刊出成績書號許可證出字第052號)

建築工程出版社印刷廠印刷・新華書店發行

書 號 294 232千字 850×1168 1/32 84張插頁

1956年7月第1版 1956年7月第1次印刷

印 數：1—5,000冊 定價(10) 1.70元

71.212
4722
12

目 錄

序	5
第一章 基本概念、桿的穩定問題	7
第一節 穩定理論發展史概述	7
第二節 基本原理、喪失第一類穩定性時的臨界載荷	12
第三節 第二類穩定性的喪失	16
第四節 確定歐拉臨界載荷的方法	20
第五節 壓彎桿和拉彎桿的彈性綫一般方程式	26
第六節 起始參數法確定常截面桿在複雜縱彎曲情形的 臨界載荷	41
第七節 局部受壓桿和壓拉桿的穩定問題	46
第八節 變截面柱受集中力系作用時的穩定性	52
第九節 差分方程式的应用、圖解分析法	56
第十節 能量法確定軸向分佈載荷的臨界值	65
第十一節 多跨彈性支座桿(起始參數法)	70
第十二節 虛變位原理应用在研究多跨彈性支座桿的穩 定性	78
第十三節 起始參數法確定拱的臨界載荷、三鉸拱	81
第二章 彈性變形範圍內的剛架系統穩定性	92
第十四節 引言、基本方法	92
第十五節 用端力矩和實際載荷表示的壓彎桿轉角公式	93
第十六節 壓彎剛架的四力矩方程式	97
第十七節 有結點綫變位的剛架的穩定問題、採用機動鍵形 式基本系的力矩法	101
第十八節 力矩法確定多層柱和剛架的臨界載荷的实例	106
第十九節 起始參數法在壓彎剛架的計算和穩定分析中的 应用	114
第二十節 固結剛架穩定性分析中的力矩焦點法	125



第二十一節	變位法計算壓彎剛架時的基本關係式	133
第二十二節	變位法作剛架穩定計算的一般過程、臨界載荷 計算实例	143
第二十三節	單跨多層對稱剛架的臨界載荷計算、 π 係數法	151
第三章	剛架和拱的臨界載荷近似計算法	159
第二十四節	引言、計算由結點變位引起力矩的方法	159
第二十五節	使結點垂直反力為零的方法確定單跨剛架的臨 界載荷	164
第二十六節	用等穩定單跨剛架代替多跨剛架的方法	171
第二十七節	代用剛架法確定拱的歐拉臨界載荷	174
第二十八節	γ 係數法確定變截面扁平拱的臨界載荷	187
第四章	塑性範圍內的桿、拱和剛架的穩定問題	196
第二十九節	按壓縮圖求折算模數以及強化計算	196
第三十節	由臨界應力曲綫定折算模數	204
第三十一節	在折算模數沿拱長為變值的情形確定拱的極限 載荷	206
第三十二節	關於考慮塑性變形計算壓彎剛架的一般強度和 剛度	212
第三十三節	各種截面桿在塑性階段橫向彎曲情形的應力和 極限彎矩	215
第三十四節	工字形截面偏心壓桿的極限載荷	224
第三十五節	考慮壓力影響的剛架極限狀態計算	227
第三十六節	考慮壓力影響作拱的受壓計算和拱受不對稱載 荷的計算	243
附 錄		254
1.	壓桿的 H. E. 茹科夫斯基函數	254
2.	特殊函數表	258
3.	變形法公式的係數	269
4.	中心受壓拱的臨界載荷表	271
參考書籍		277

序

近來，在結構的穩定計算、強度計算和剛度計算中，考慮到軸向力對彎曲變形的影響的人，已經很多。

柔細桿系的穩定性和強度的研究，近數年來在蘇聯得到了極大的發展，表現在不僅研究出了一般的計算方法（院士 Б. Г. 加勒爾金、А. Н. 迪尼克、教授 П. Ф. 巴普科維奇、И. М. 拉賓諾維奇等人的工作），而且研究出了新的專門方法（В. З. 符拉索夫教授把歐拉問題推廣到薄壁桿、壓-彎桿系建築力學的新方法）。可是柔細桿系理論還有許多問題沒有解決。

為工程技術人員和科學工作者而寫的本書，是專門敘述桿系結構的穩定計算，以及強度和剛度計算的、並具有創造性的新方法。

在關於受壓結構的穩定性和強度計算的理論中，許多最重要的實際問題，至今還沒有適用的解答。這些問題包括壓彎桿系承載能力的精確計算問題、彈塑性狀態結構系統的穩定問題、板桿剛架系統的穩定問題、部分構件失去穩定時複雜結構工作情形的精確分析問題等。對於桿系結構，精確的、有時極繁複的方法難於應用，不得不尋找新的計算方法。

起始參數法在本書中得到廣泛應用和發展。這個方法是由許多蘇聯學者研究出來的，其中也包括本書著者。在確定自由場中的和彈性地基上的壓彎梁和拉彎梁的內力和變位時，在桿件和剛架的穩定理論中，在結構動力學以及在薄壁結構理論中，起始參數法對於受任意連續載荷的、具有常特性的系統，是能統一所有計算步驟的獨特方法。

利用壓彎桿彈性綫的一般方程式，可以解決許多穩定問題，特

別是能够精確地解決下列問題：確定 n 層柱的臨界載荷；彈性支座上桿的穩定分析；拱的穩定分析以及單跨壓彎剛架的計算。

在剛架系統和拱的穩定研究中，著者也很注意於敘述在引用機動鏈形式基本系時以及在應用虛變位原理時的力矩法和變位法。

最後一章敘述壓彎剛架和拱受非結點載荷作用時，按照極限狀態計算的合理方法。

同一章內還敘述了經著者研究而成功的任意外形壓彎拱受不對稱載荷及受壓縮作用時的一般計算方法。壓彎剛架及拱的極限載荷比歐拉臨界載荷要低得多。

當然，按照極限狀態的計算是具有最實際的意義的；但考慮到塑性變形而精確地解決這個問題時所發生的困難極大。著者只限於應用按照危險截面對極限狀態作一般估計的近似方法。這是按新理論作鋼筋混凝土結構計算時一般採用的方法。

在1949年12月於基輔召開的全蘇建築力學（關於穩定問題的）會議上，以及在1950年全蘇科學工程技術協會（ВНТО）列寧格勒市金屬結構工程師會議上，著者曾以本書基本的內容作過報告。

著者希望本書對於廣大的設計工程師，以及研究實用穩定理論的科學工作者，都能有所補益。

應該感謝蘇聯科學院通訊院士И. М. 拉賓諾維奇教授、砲兵科學院通訊院士Н. И. 畢佐霍夫教授及А. Р. 爾詹尼津教授，他們對本書出版工作提供了許多寶貴的意見。

第一章 基本概念、桿的穩定問題

第一節 穩定理論發展史概述

很早以前，在最簡單的壓桿穩定問題還沒有從理論上解決的時候，就已經知道長柱強度不僅和柱的橫截面及材料有關，而且和柱的高度也是有關的。首先從理論上解決這個問題，打下了穩定理論的基礎的，是著名的數學家、俄國科學院院士遼納德·歐拉。1744年，歐拉[33]①解決了壓桿的縱彎曲問題，確定在有極小的初偏離時，有限值的力能够使桿彎曲。根據歐拉的計算，如果在壓桿稍彎曲時，將其二端 A 和 B 用繩 AB 聯結，則繩內發生拉力，其值為

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2}。$$

歐拉得出這個解答時，根據當時已熟知的柏努利關係式，即外力力矩 M 和曲率半徑 ρ 的乘積是常數：

$$M\rho = EJ，$$

而且他利用了如下的曲率的近似式子：

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}。 \quad (1.1)$$

歐拉用無窮級數研究了縱彎曲問題和其他的許多特例。他又把彈性綫的各種平衡形式作了分類。從上面的敘述看到，歐拉對於中心受壓桿的臨界力，了解為這樣的一個軸向力：它能使桿保持其最初由於偶然原因而造成的彎曲狀態；甚至在這些偶然原因消失時，還保持彎曲狀態。但歐拉理論長期未被工程師所採用；爾後，在其被應用的時期（19世紀末），又由於各種原因引起許多不同看法，

① 這裏的和以後的方括弧內數字，是指書末參考書籍的編號。

而發生爭論。

首先是有人不相信外力精確地和軸綫重合的理想直桿会有可能發生彎曲。其次,某些工程師忽視了精確分析的結果,認為受壓桿在壓力達臨界值時的彎曲情形是不確定的,而只要繼續再增加那怕是最微小的壓力時,桿軸就保持其原來的直綫位置。可是認為桿的撓度不確定的結論,一定會引向認為第一次導數 $\frac{dy}{dx}$ 有任意值的假設,這和原來假設是不符的;原來假設變位很小,因而在曲率式子

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1.2)$$

中, $\frac{dy}{dx}$ 的平方和壹比較是可以略去的。

所以,根據近似微分方程得出的歐拉的結論,只可能作出這個結論,即當壓力達臨界值而桿軸對原來的直綫平衡狀態存在極微小的偏差時,甚至當引起其微彎曲的原因消失後,桿仍是微彎的。

在桿的撓度超過了應用臨界力的範圍的情形下,對臨界力作出較精確的特徵描述的問題,由拉格蘭日提出。他在 1773 年研究了細直桿縱彎曲時的大變位問題。拉格蘭日在其“論柱的圖形”文集中,應用精確分析,證明歐拉的臨界力公式是正確的,並且在壓力超過臨界力的情形下,根據桿軸的精確微分方程的積分,確定了有限變位的數值。基爾赫霍夫和克萊勃斯在 1850~1859 年內研究了細桿彈性綫的一般理論。1867 年 M. Ф. 奧卡托夫在其論文“彈性綫的平衡和運動的理論”中,第一次把細桿的一般理論應用於分析細綫的平衡和運動。

1894 年出版了彼得堡運輸工程學院 Ф. С. 雅辛斯基教授 (1856~1899 年) 的巨著“論縱彎曲強度問題”[85, 86, 87, 88], 討論到許多穩定問題。卓越的理論家和工程師 Ф. С. 雅辛斯基的這部著作,第一次解決了關於桿和橋梁結構的穩定性的許多新的、實用上重要的問題。Ф. С. 雅辛斯基應用了根據未定係數法得到的微分

方程的代數級數解，求出了：

(1) 直桿的均佈和三角形分佈的軸向載荷臨界值；

(2) 彈性介質內的桿的三角形載荷臨界值。

此外，他还確定了下列各情形的臨界載荷：

(1) 截面慣性矩有一次變化的階梯狀桿；

(2) 多格桁架內受相交斜桿支持的柔細斜桿；

(3) 平行弦桁架開式橋梁的受壓弦桿，而且他分析了這種失去穩定的結果所引起的二座橋梁破壞的原因（塞士蘭鐵路過奎得河的橋以及美茵州法蘭克福城附近的尼德河上的橋）。

Ф. С. 雅辛斯基用最小二乘法把泰特邁耶爾等人作得不完全的許多縱彎曲試驗結果作了仔細的研究，提出了他的中等柔度鑄鋼桿的臨界應力經驗公式：

$$\sigma_{kp} = 3,387 - 14.83\lambda. \quad (1.3)$$

Ф. С. 雅辛斯基可認為是俄國學派穩定理論的奠基者。

И. Г. 布勃諾夫教授[7]研究了等剛度彈性支座等跨桿的穩定問題。

在拱的穩定方面提出許多基本解答的 А. Н. 迪尼克院士關於桿的穩定的最初的研究[16, 17]，也可算在這個時期（1912~1914年）。

桿的縱彎曲問題的利用精確曲率式的解答，是由 В. Г. 加勒爾金教授作出的[10]。圓環和圓拱穩定問題的最初解答，歸功於 Е. Л. 尼古拉教授[40]。在複雜的微分方程不可能求解時，求臨界載荷的一般的和近似的能量法的研究有着巨大的實際意義。解決穩定問題的能量法由於蘇聯許多學者的研究而得到廣泛的發展。不需寫位能式子的著名方法，是由 В. Г. 加勒爾金教授指出的[11]。

在著者的論著[67]中，發展了求臨界載荷的圖解分析法變體。選擇了既滿足變位邊界條件，又滿足內力 M 和 Q 的邊界條件的可能偏離形式；這形式是作為特別選擇的假想橫向載荷作用下的彈性綫而求得的。

К. С. 薩夫列夫教授在 1913 年首先研究按極限狀態作壓彎桿

的联合强度計算，以後又大大發展了这个計算方法[25, 26]。

H. E. 茹科夫斯基教授有效地把 1916 年就已知的压弯連續梁的三力矩一般方程式应用於研究飛機結構構件的穩定問題，並且編製了力矩法特殊函數表[23, 24]。

在細压桿縱弯曲時的大变位問題方面有論著的，为 B. П. 魏欽金和 H. Г. 陈佐夫教授[8]、A. H. 克雷洛夫院士[32]、E. H. 季赫米罗夫教授[74]、M. M. 費洛寧柯-鮑罗第契教授[75]、B. И. 魯德涅夫教授[58]、斯大林獎金獲得者 E. П. 波波夫教授[48]、M. Э. 貝尔曼副教授[5]及 B. П. 曼惹洛夫斯基副教授[36]。在有極小偏心的情形，当極限力接近歐拉值而应用近似曲率式得出的变位和內力值太大時，大变位問題對於估計柔細桿的承载能力有其实意义。

在每一个載荷成分可能独立变化的複雜載荷情形，關於載荷臨界值總和的幾個寶貴的一般原理，由 П. Ф. 巴普科維奇教授作了証明[46]。B. И. 諾沃托采夫副教授把積分方程应用在結構動力学中，其論著[41]是以問題的積分方程的逐步漸近法為基礎的。Я. Л. 努捷尔曼教授在其論著中[42, 44]，利用積分方程求压桿的臨界載荷。С. А. 貝尔恩斯琴教授藉“光譜函數”提出了对应的積分方程的解法[6]。

1938 年，本書著者提出压弯桿和拉弯桿彈性綫的一般方程式[65]。这个方程式被应用於以工程師易接受的形式精確地解決許多穩定問題。著者应用压弯桿一般方程式和截割法，獲得了任意段數階梯桿上任意集中力系的臨界值計算問題的精確解答[68]。

多跨受压彈性支座梁的穩定問題，由 Я. Л. 努捷尔曼教授[43]利用積分方程而得到解决。同一問題，在常截面情形，可利用压弯桿彈性綫一般方程式得出簡單而精確的解答[71]。

利用矩陣計算，按照“微擾動法”而得的許多複雜的穩定問題的解答，見於 A. Ф. 斯米尔諾夫教授的富有意义的著作[59, 60]。

上面已經說过，位能法是解决穩定問題的主要近似方法之一。假想橫向載荷法或圖解分析法，是一般的逐步漸近法的一个变体，B. H. 高尔布諾夫教授[15]对此法的發展非常注意。A. П. 柯罗博

夫教授提出一个移動軸向力的近似法，把有固定端的柱的各截面的軸向力移到一個端截面上[30]。

A.P. 尔詹尼津教授第一个把組合桿化成有連續分佈彈性聯繫的桿而解决其穩定問題[55]。

多跨單層自由剛架在其所有結點受相同載荷時的近似計算法，是由著者提出的[69]。假定剛架受壓桿彈性綫為拋物綫的小剛度剛架的近似計算，是 A.P. 尔詹尼津教授提出的[56]。

變形法作剛架穩定計算的展開的形式，是 H.B. 柯尔諾烏赫夫教授在 1937 年研究成功的[27]；變形法的標準形式，还在 1937 年就由 C.Д. 列依契斯工程師提出了[34]。

固結剛架穩定計算中的力矩焦點法，是在上面說過的著者論文[69]中發表的。在 C.Д. 列依契斯副教授的著作[34]中注意到的方法，在朱諾夫斯基副教授的論文[77]中得到了進一步的發展。

И.М. 拉賓諾維奇教授關於蘇聯學者在穩定問題方面的成就作了寶貴的綜述[53]。

H.B. 柯尔諾烏赫夫教授在其於 1949 年出版並獲得斯大林獎金的巨著[29]中，綜合了他在拱的穩定問題上的研究，並闡釋了許多分析穩定問題的基本方法。

蘇聯學者對拱的穩定性分析，非常注意。這方面在 E. Л. 尼古拉的論文[40]發表後，首先就有 И. Я. 斯泰依尔曼教授的論著[79]；也應該指出 A. Ш. 洛克辛教授的論著[35]，其中第一次給出了拋物綫拱的解答。

A. H. 迪尼克院士在 1933 到 1946 年內得到了各種特殊情形的許多精確解答，在 1935 年和 1946 年出版了關於彈性系和拱的穩定問題的專著[19, 20]。

現在，由於蘇聯學者的多方研究，彈性桿系（剛架和拱）的穩定性計算的各種有效方法，都獲得了廣泛的應用。

本書不敘述蘇聯斯大林獎金獲得者 B. 3. 符拉索夫教授所研究的開口截面薄壁桿的空間穩定理論[9]，只研究扭轉剛度比較大的桿。