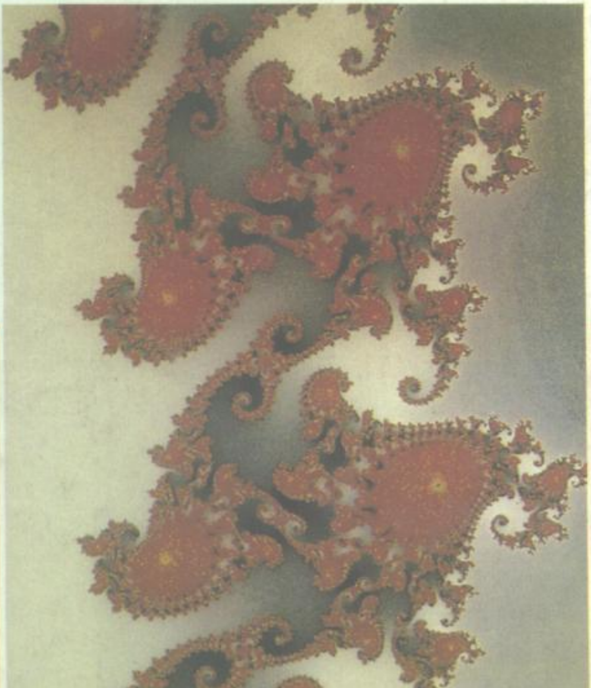
科学出版社

分形应用中的数学基础与方法

谢和平　薛秀谦　编著



博士丛书 · 博士丛书 · 博士丛书 · 博士丛书

0 18
-2

博 士 丛 书

分形应用中的数学基础与方法

谢和平 薛秀谦 编著

国家教委跨世纪人才专项基金资助项目
国家杰出青年科学基金资助项目
煤炭科学基金资助项目

科 学 出 版 社
1997

内 容 提 要

分形理论是研究非线性问题的一门新学科。自从20世纪70年代，曼德尔布罗特首先提出分形以来，这门学科无论是在其数学基础还是在其它学科的应用方面都得到了迅速发展。本书详细介绍了分形应用中的数学基础和方法，主要内容有：集合与度量空间，分形空间，自相似分形与自仿射分形，勒贝格测度与豪斯道夫测度，分形维数与多重维数，分形的结构与迭代函数系，分形上的动力系统与居里叶集和曼德尔布罗特集，随机分形与分形集上的随机过程，分形插值法与分形逼近法，分形边界上的狄利克雷问题，最后介绍了分形空间上的力学问题。各章都附有一定数量的例子和练习。

本书的编写注意了分形理论中数学基础的系统性和方法的实用性，可供从事于分形研究的科技人员使用，也可以作为高等院校的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

分形应用中的数学基础与方法/谢和平，薛秀谦编著.

北京：科学出版社，1997

(博士丛书/向春礼主编)

ISBN 7-03-005703-1

Ⅰ.分… Ⅱ.①谢…②薛… Ⅲ.分形学-应用-数学基础 Ⅳ.019

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第25661号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997年3月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1997年3月第一次印刷　印张：6 3/4

印数：1—1 800　字数：176 000

定价：16.00元

序

环顾当今世界，国家的发达，民族的振兴，无一例外地离不开科学技术的推动作用。年轻博士们历来是科技队伍中最活跃、最富创造性的生力军。他们的科研成果是学科发展强有力的推动力量，是体现一个国家高层次教育水平和科研水平的窗口。为了系统地反映年轻博士们的科研成果，促使他们的快速成长，加强国际国内的学术交流，在老一辈科学家的热心支持下，科学出版社决定出版一套《博士丛书》。

我们指导思想是突出本丛书的学术性、创造性、新颖性、先进性和代表性，使之成为所有青年博士平等竞争的学术舞台和优秀科研成果的缩影。

这套丛书以专著为主，并适时组织编写介绍学科最新进展的综述性著作。它将覆盖自然科学各个领域，是一套充分体现我国青年学者科研成果和特色的丛书。

从书编委会将在由著名科学家组成的专家委员会指导下开展编辑工作。本丛书得到了国家自然科学基金委员会和全国博士后管理协调委员会的特别资助。在此我们深表谢意。

《博士丛书》编委会

一九九三年十月

《博士丛书》专家委员会

《博士丛书》编委会

前言

分形理论是现代非线性科学研究中十分活跃的一个数学分支，在物理、地质、材料科学以及工程技术中都有着广泛的应用。特别是随着电子计算机的迅速发展和广泛应用，分形的思想和方法在模式识别、自然图象的模拟、信息讯号的处理以及艺术的制作等领域都取得了极大的成功。分形理论的研究对象是自然界和非线性系统中出现的不光滑和不规则的几何形体；分形应用中的数学基础是分形几何学。

我们编写本书的目的是想为从事分形应用的科技工作者和对分形理论有兴趣的研究人员提供一本实用读物。本书既注意到分形理论中数学基础的系统性和方法的实用性，又尽量注意不使其成为抽象数学推导的汇集。因此，在给出每个精确结论的同时，对于其证明过程，有些仅叙述了证明大意，有些没有给出证明过程。书后列出了一些参考文献，以便有兴趣的读者做进一步的了解。

全书共分六章。第一章介绍了与分形有关的数学的基本概念，内容有集合与集合序列的极限集、代数结构与波雷尔集、空间与度量、完备度量空间与分形空间、自相似分形与自仿射分形；第二章介绍了勒贝格测度的基本理论、豪斯道夫测度与豪斯道夫维数、分形维数与多重分形维数，给出了自相似分形维数的计算公式；第三章讨论了分形的结构性质，介绍了度量空间上的迭代函数系与动力系统、居里叶集、曼德尔布罗特集，给出了几个利用计算机绘制分形图形的算法；第四章讨论了随机分形，内容有概率空间与稳定分布、随机分形模型、布朗运动以及分形集上的随机过程；第五章讨论了分形数值方法，在介绍经典的多项式插值与样条插值的基础上，详细讨论了近年来发展起来的分形插值理论与方法、分形空间中的有限元方法与分形逼近法；第六章讨论了分形边界上的狄

利克雷问题，并利用索伯列夫空间的理论探讨了分形空间中的一些力学问题。在每章之后，给出了一定数量的练习题，这些练习是为了理解有关的概念、定理与方法而设计的。由于我们水平有限，错误与不当之处，恭请读者批评指正。

本书的出版得到首届国家杰出青年科学基金和首批国家教委跨世纪人才专项基金以及煤炭部科教司的资助。

谢和平　薛秀谦

1996.9.16

目 录

绪论

分形理论是非线性科学研究中十分活跃的一个分支，它的研究对象是自然界和非线性系统中出现的不光滑和不规则的几何形体[1-15]，分形理论的数学基础是分形几何[1-8]。

分形理论的发展大致可分为三个阶段[17]。下面简要回顾一下分形理论在这三个历史阶段的发展过程。

第一阶段为1875年至1925年，在此阶段，人们已认识到几类典型的分形集，并且力图对这类集合与经典几何的差别进行描述、分类和刻画。19世纪，尽管人们已能区别连续与可微的曲线，但是普遍认为连续而不可微的情形是极为例外的，并且在理论研究中应排除这类“怪物”，而且特别认为一条连续曲线上不可微的点应当是极少的。在1872年，维尔斯特拉斯(Weierstrass)证明了一种连续函数(称为维尔斯特拉斯型函数图，0.1)在任意一点均不具有有限或无限导数。这一结果在当时曾引起了极大的震动；但是人们认为维尔斯特拉斯型的函数是极为“病态”的例子。即使如此，人们仍从不同方面推广了上述函数，并对这类函数的奇异性质作了深入的研究，获得了丰富的结果。冯·科赫(Von Koch)于1904年通过初等方法构造了如今被称为冯·科赫曲线(图0.2)的处处不可微的连续曲线，并且讨论了该曲线的性质。由于该曲线的构造极为简单，从而改变了人们认为连续不可微曲线的构造一定非常复杂的看法。特别重要的是，该曲线是第一个人为构造的具有局部与整体相似的结构的例子，它被称为自相似结构。

冯·科赫曲线的构造过程如图0.3，设 E_0 是单位长直线段，E_1 是由 E_0 除去中间1/3的线段、而代之以底边在被除去的线段

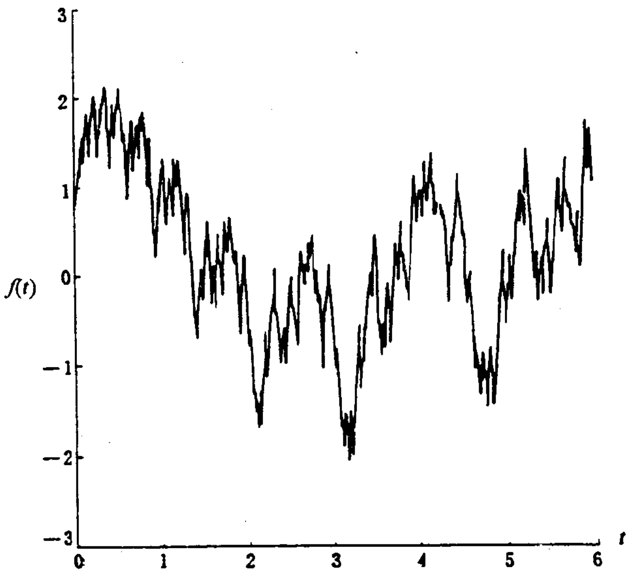


图 0.1 维尔斯特拉斯函数 $f(t)$ 的图象

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$$

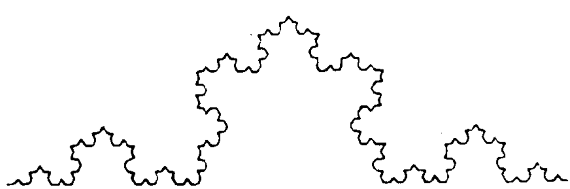


图 0.2 冯·科赫曲线

上的等边三角形的另外两条边所得到图形，它包含 4 个线段。对 E_1 的每个线段都进行同一过程来构造 E_2，依此类推。于是得到一个曲线序列 $\{E_k\}$，其中 E_k 是把 E_{k-1} 的每一个直线段中间 1/3 用等边三角形的另外两边取代而得到的；当 k 充分大时，曲线 E_k 和 E_{k-1} 只在精细的细节上不同，而当 $k\to\infty$ 时，曲线序列 $\{E_k\}$ 趋于一个极限曲线 F，称 F 为冯·科赫曲线。

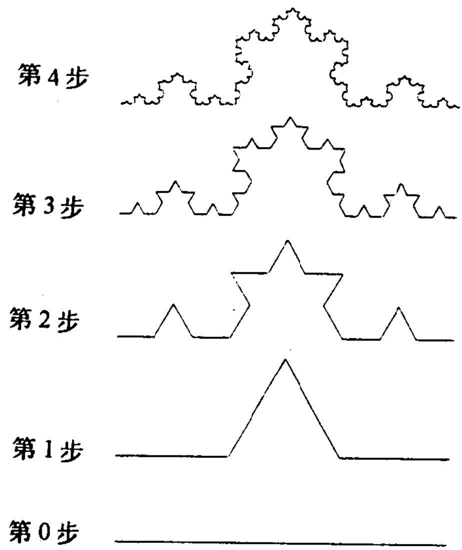


图 0.3　冯·科赫曲线之构造过程

皮亚诺(Peano)于 1890 年构造出填充平面的曲线图 0.4，这一曲线出现后，人们提出应正确考虑以往的长度与面积的概念。皮亚诺曲线以及其它的例子导致了后来拓扑维数的引入。

康托尔(Cantor)于 1872 年引入了一类全不连通的紧集 F，F 被称为康托尔三分集。康托尔三分集的构造过程为图 0.5，设 E_0 是单位长直线段，E_1 是由 E_0 除去中间 1/3 的线段所得到图形，它包含 4 个线段。对 E_1 的每个线段都进行同一过程来构造 E_2，依此

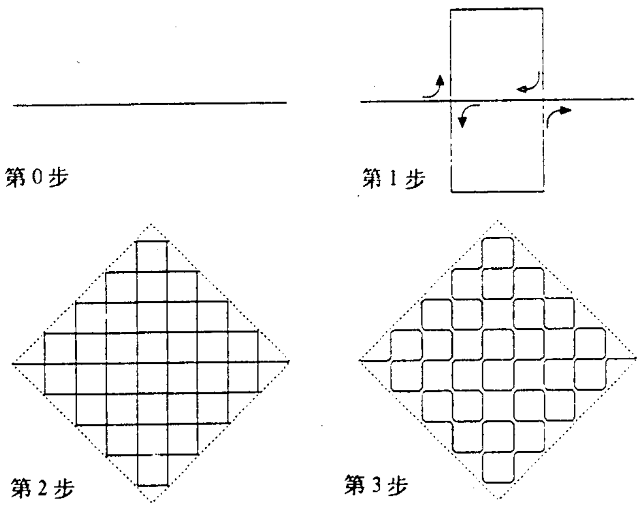


图 0.4　皮亚诺曲线

类推。于是得到一个曲线序列$\{E_k\}$，其中E_k是把E_{k-1}的每一个直线段中间 1/3 除去而得到的；当k充分大时，曲线E_k和E_{k-1}只在精细的细节上不同，而当$k\to\infty$时，曲线序列$\{E_k\}$趋于一个极限曲线F，称F为康托尔三分集。在当时，人们认为这类集合在传统的研究中是可以忽略的。但是进一步的研究结果表明，这类集合在象三角级数的唯一性这样重要问题的研究中不仅不能忽略，而且起着非常重要的作用。

一类极为典型的随机分形集，即布朗(Brown)运动，在那时已经受到物理学家的重视。珀瑞(Perrin)在 1913 年对布朗运动的轨迹图 0.6 进行了深入的研究，明确指出布朗运动作为运动曲线不具有导数。他的这些论述在 1920 年左右使年轻的维纳(Wiener)受到震动，并促使他建立了很多布朗运动的概率模型。为了表明自然混乱的极端形式，维纳采用了“混沌”(Chaos)一词。珀瑞曾经注意到：一方面，自然界的几何是混乱的，不能用通常形式的欧氏几何

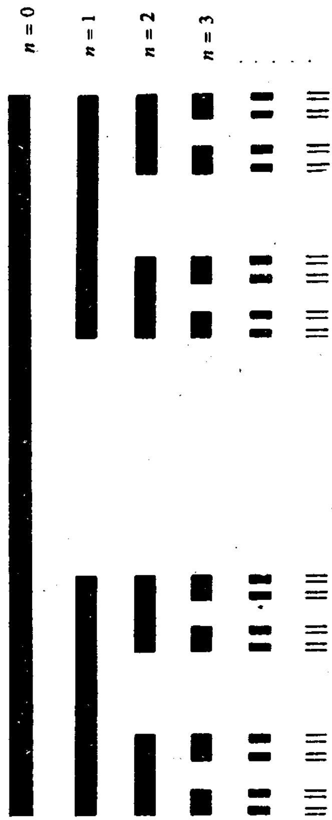


图0.5　康托尔三分集

或微积分中那种完美的序表现出来；另一方面，它能使人们想到数学的复杂性。

图 0.6 R^2 上的布朗运动

曼德尔布罗特(Mandelbrot)在回顾珀瑞及维纳的工作以及分形几何的发展历史时指出,分形几何以下面两种选择为其特征:一是在自然界的混沌中选择问题，因为描述整个混沌是既无意义又无可能的主张；二是在数学中选择工具。这两种选择逐渐成熟并引发出了新东西，在无序混沌与欧氏几何过分的有序之间，产生了一个具有分形序的新领域。由于非常“复杂”的集合的引入，而且长度、面积等概念必须重新认识。为了测量这些集合，同时为了更一般的理论，闵可夫斯基（Minkowski）于 1901 年引入了闵可夫斯基容度。进而，豪斯道夫（Hausdorff）于 1919 年引入了豪斯道夫测度和豪斯道夫维数。这些概念实际上指出了为了测量一个几何对象，必须依赖于测量方式以及测量所采取的尺度。

总之，在分形理论发展的第一阶段，人们已经提出了典型的分形对象及其相关问题并为讨论这些问题提供了最基本的工具。

第二阶段大致为 1926 年到 1975 年，在这半个世纪里，人们实际上对分形集的性质做了深入的研究，特别是维数理论的研究已获得了丰富的成果。可以说第二阶段更为系统、深入的研究深化了第一阶段的思想，不仅逐渐形成理论，而且将研究范围扩大到数学的许多分支中。贝西柯维奇（Besicovitch）及其他学者的研究工作贯穿了第二阶段。他们研究了曲线的维数、分形集的局部

性质、分形集的结构、S-集的分析与几何性质、以及在数论、调和分析、几何测度论中的应用。他们的研究结果极大地丰富了分形几何理论。在此期间，维数理论得到了进一步发展并日臻成熟。Bouligand 于 1928 年引入了 Bouligand 维数，Poutrjagin 与 Schnirelman 于 1932 年引入覆盖维数，柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 与 Tikomirov 于 1959 年引入熵维数。另外，刻画集合“大小”的容量及容量维数亦引入到分析之中。由于维数可以从不同的角度来刻画集合的复杂性，从而起了重要的作用。在这一阶段，列维 (Levy) 在下面两个方面的工作极为重要，其一，他第一个系统地研究了自相似集，我们如今研究的许多自相似集的性质可追溯到他的工作；其二，他建立了分数布朗运动的理论，实际上，他是随机分形理论系统研究的最重要的先驱之一。以 Salem 与 Kahane 为代表的法国学派从稀薄集的研究出发，对各种类型的康托尔集及稀薄集作了系统的研究，应用了相应的理论方法与技巧，并在调和分析理论中得到了重要的应用。同时，维数的乘积理论、投影理论、位势方法、网测度技巧、随机技巧均先后建立并成熟，这已使分形几何的研究具有自己的特色与方法。

尽管在此阶段分形的研究取得了许多重要的结果，并使这一学科在理论上初见雏形，但是绝大部分从事这一领域工作的人主要局限于纯数学理论的研究，而未与其它学科发生联系。另一方面，物理、地质、天文学和工程学等等学科已产生了大量与分形几何有关的问题，迫切需要新的思想与有力的工具来处理。正是在这种形势下，曼德尔布罗特以其独特的思想，自 60 年代以来，系统、深入、创造性地研究了海岸线的结构、具强噪声干扰的电子通讯、月球的表面、银河系中星体的分布、地貌的生成的几何性质等等典型的自然界中的分形现象，并取得了一系列令人瞩目的成功。

第三阶段为 1975 年至今，是分形几何在各个领域的应用取得全面发展，并形成独立学科的阶段。曼德尔布罗特将前人的结果进行总结，集其大成，于 1975 年以“分形：形状、机遇和维数”