

机械参量动态测试技术

梁德沛 主编

重庆大学出版社

机械参量动态测试技术

梁德沛 主编

重庆大学出版社

内 容 提 要

全书共分九章。第一、二、九章系统地介绍动态测试的基础知识，主要内容有：信号的描述、分析和处理、测试装置的特性和选择原则及信号的传输等。第三至八章详细地介绍振动噪声、位移、应变、力和温度等六种机械参量的测量原理、测量方法及常用的各种传感器和测量电路。

本书兼顾理论与实践两方面，并注意贯彻少而精，突出重点，利于自学，可作为高等院校机械类各专业本科及专科教材，也可供有关工程技术人员参考。

机械参量动态测试技术

梁德沛 主编

责任编辑 蒋怒安

*

重庆大学出版社出版
新华书店重庆发行所发行
重庆大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：15.25 字数：387 千
1987年 9 月第 1 版 1987年 9 月第 1 次印刷
印数：1—8000

标准书号： ISBN 7-5624-0016-4 统一书号：15408·20
TH·3 定 价：2.60元

前 言

本书是由“全国高校机械工程测试技术研究会西南分会”中的八所高校根据机械类专业《测试技术》课程的基本要求，总结近年来的教学实践，按照少而精的原则联合编写的。本书可作为高等院校机械类专业本科生及大专生的教材，也可供夜大和职大有关专业选用，此外，还可供从事机械工程测试工作的工程技术人员参考。

机械参量的动态测试技术涉及的知识领域非常广泛，为使读者能获得比较系统和完整的概念，本书以信号的传输、分析和处理为脉络，阐述了动态测试的基础理论知识，即信号描述和分析，测试系统的静、动态特性等。在本书第三至八章中，介绍了几种典型机械参量的测试方法，并将有关的基本理论和传感技术、中间变换电路及显示记录等方面的知识贯穿其中，以加强理论和实践的联系。不同的专业可以根据各自的教学要求选择有关章节进行讲授。在全书的讲授中，各章的顺序亦可作适当的调整，例如可将第九章提前到第一章与第二章之间讲授。

本书由重庆大学、成都科技大学、西南石油学院、西南交通大学、四川工业学院、贵州工学院、云南工学院和昆明工学院等八所院校的有关教师共同编写，并得到这些院校领导的关心和支持。

本书由重庆大学梁德沛主编。参加本书编写的有杨仁逖、缪以智、沈爱琴、支镛、秦兰锦、郭之鑽、王孝英、张明洪、黄治明、钟扬扬等。

本书由赵沔教授和张先普教授主审。参加审稿的还有华瑞敖、廖伯瑜、雷继尧、张拯人、张流富、周吉彬等。

本书在编写过程中得到兄弟院校和有关单位的大力支持和帮助。重庆大学出版社蒋怒安编辑为本书做了大量工作。在此，一并表示谢意。

本书在编写体系和内容组织方面作了一些尝试，尚不成熟，加之编者水平所限，书中错误和欠妥之处在所难免，恳请读者指正。

编者

1987年3月

目 录

绪论	1
第一章 信号的描述	3
§ 1-1 信号的分类及其描述方法	3
一、信号的分类	3
二、信号的描述方法	4
§ 1-2 周期信号的描述	5
一、周期信号的特征参数	5
二、周期信号与付里叶级数展开	6
§ 1-3 非周期信号的描述	12
一、付里叶变换	12
二、几种典型信号的频谱	15
三、付里叶变换的主要性质	17
四、单位脉冲函数及其频谱	20
§ 1-4 随机信号的描述	23
一、随机过程	23
二、各态历经过程	25
第二章 测试系统及其主要特性	27
§ 2-1 测试系统	27
一、概述	27
二、试验装置	27
三、测量装置	28
四、数据处理装置	28
五、显示或记录装置	28
§ 2-2 线性系统及其主要性质	28
一、测试系统与线性系统	28
二、线性系统的主要特性	29
§ 2-3 测试装置的传递特性	31
一、测试装置的基本性能	31
二、测试装置的静态传递特性	32
三、测试装置的动态传递特性	34
四、系统在典型输入下的动态响应	40
五、测试系统实现信号不失真传递的条件	44

六、测试装置的负载效应·····	45
§ 2-4 测试装置动态特性的测试方法·····	45
一、频率响应法·····	45
二、阶跃响应法·····	46
§ 2-5 信号在测试系统中的传输·····	48
一、信号的传输方式·····	48
二、信号传输过程中的抗干扰问题·····	51
§ 2-6 测试装置的选择原则·····	59
一、灵敏度·····	59
二、精确度·····	59
三、响应特性·····	59
四、线性范围·····	59
五、稳定性·····	60
六、测量方式·····	60
七、各特性参数之间的配合·····	60
八、其它·····	60
第三章 机械振动测试·····	61
§ 3-1 概述·····	61
一、振动测试的意义·····	61
二、振动的类型·····	61
三、振动测试的内容·····	63
四、振动测试系统·····	64
§ 3-2 振动的激励和激振器·····	65
一、振动的激励方法·····	65
二、激振器·····	69
§ 3-3 测振传感器·····	72
一、相对式测振传感器的原理·····	72
二、绝对式测振传感器的原理·····	73
三、磁电式速度传感器·····	75
四、压电式加速度传感器·····	76
五、伺服式加速度计·····	83
六、阻抗头·····	84
§ 3-4 振动分析方法与分析仪·····	84
一、振动的分析方法·····	84
二、带通滤波器·····	85
三、基于带通滤波式频谱分析仪·····	86
四、跟踪滤波式振动分析仪·····	87
§ 3-5 振动参数的测试方法·····	89
一、机械阻抗的测试·····	89
二、固有频率和阻尼比的测试·····	92
§ 3-6 测振装置的校准·····	94

一、绝对校准法	95
二、比较校准法	97
三、机械阻抗测试系统的校准	97
第四章 噪声的测量	99
§ 4-1 基本概念	99
一、声波与噪声	99
二、噪声的物理度量	99
三、级和分贝	100
四、频带和噪声的频谱	103
五、指向性	105
六、噪声的主观评价	106
§ 4-2 噪声测量常用仪器	110
一、传声器	110
二、声级计	111
§ 4-3 噪声测量方法	112
一、测量环境	112
二、一般的现场测量——A声级测量	112
三、声功率级的测量	113
四、声强的测量	115
§ 4-4 噪声现场测量的误差估计	116
一、仪器的精确度	116
二、测量现场的声学特性	117
三、反射效应的影响	117
四、本底噪声	117
五、机器温升的影响	117
六、机器噪声不稳定的影响	117
第五章 位移的测量	118
§ 5-1 常用的位移传感器	118
一、电感式位移传感器	119
二、电容式位移传感器	124
三、旋转变压器式角位移传感器	127
四、微动同步器式角位移传感器	128
§ 5-2 位移测量应用实例	129
一、回转轴误差运动的测量	129
二、移动部件运动不均匀性的测量	133
第六章 应变测试	134
§ 6-1 概述	134
§ 6-2 电阻应变片	134
一、应变片工作原理及其构造	134
二、应变片的灵敏系数(K)	135
三、横向效应系数(H)	136

四、应变片的工作特性	138
五、应变片的选择	140
六、特殊用途的应变片	144
§ 6-3 应变测量电路	147
一、应变电桥	147
二、应变片在构件上的布置和接桥	152
三、电阻应变仪简介	155
§ 6-4 复杂状态下的应变测量	157
一、平面应变测量	157
二、高应变梯度区域的应变测量	157
第七章 力的测量	160
§ 7-1 概述	160
§ 7-2 测力传感器	160
一、应变片式测力传感器	160
二、压电式测力传感器	163
三、压阻式测力传感器	164
四、差动变压器式测力传感器	165
五、测力传感器的定度	166
§ 7-3 工程应用实例	167
一、切削力的测量	167
二、扭矩的测量	170
第八章 温度的测量	175
§ 8-1 温标及基本测量方法	175
一、温标	175
二、测温方法分类	176
§ 8-2 热电偶测温法	177
一、热电偶测温原理	177
二、常用热电偶	179
三、热电偶的冷端补偿	180
四、热电势测量	181
五、热电偶的定度	184
六、测温误差分析	184
§ 8-3 其它测温方法	185
一、电阻式温度计	185
二、红外测温	187
第九章 信号分析	189
§ 9-1 概述	189
一、信号处理与分析的目的	189
二、信号处理与分析方法简介	189
§ 9-2 概率密度分析	190
一、概率密度函数	190

二、联合概率密度函数	193
三、典型信号的概率密度函数	194
四、概率密度函数的应用	196
§ 9-3 相关分析	197
一、相关	197
二、自相关函数	198
三、互相关函数	203
四、相关函数的估计和测量分析方法	205
五、相关分析在工程中的应用	207
§ 9-4 功率谱密度分析	210
一、概述	210
二、自功率谱密度函数	210
三、互功率谱密度函数	212
四、功率谱密度估计	217
五、谱分析的工程应用举例	220
§ 9-5 信号的数字处理与分析简介	222
一、信号数字处理的基本步骤	222
二、信号数字处理中的几个问题	222
三、有限离散付里叶变换——DFT	229
四、信号分析仪简介	232
参考文献	234

绪 论

(一)

机械工业负有装备国民经济各部门的任务，有责任为各行业提供性能优异的机器和设备，诸如机床、精密机械、石油钻采设备、化工轻工机械、汽车拖拉机、机车车辆以及兵器等等。为此，机械工业的技术改造在一定程度上应先行一步，为其它行业奠定基础。面对上述任务，机械参量的动态测试技术愈加显得重要。例如，由于机械加工精度和生产过程自动化水平的不断提高，机械加工过程已从单机自动化和生产自动线，发展到柔性加工系统，并且逐步向无人化工厂过渡。显然，仅仅对工件加工完成以后进行自动测量已不能满足生产的需求。必须进一步对生产流程的全过程进行检测，并且还实现诸如在线测试、自适应控制、故障诊断、安全监控等技术措施。因此，先进的测试技术已成为现代生产系统中必不可少的，起着感官作用的组成部分。

当前，空间技术、高能物理、大规模集成电路及智能机器等高技术的迅速发展，给机械工业部门提出了许多难度极大、条件苛刻的新课题。譬如，宇航飞行器、原子锅炉、大规模集成电路的机械装置等，它们要求具有很高的精度和运转时极高的可靠性。这时，测试技术就可以对这些设备的质量和性能提供准确而客观的评价，为生产技术的合理改进提供基础数据，以指导设计和制造。不仅如此，测试技术还可以作为进行一切探索性、开发性和创造性的科学发现或技术发明的手段。所以，测试技术是机械工业发展的一项重要基础技术，对从事机械工程的技术人员来说，也应该掌握这一门学科。

(二)

测试包括试验和测量的全过程，是具有试验性质的测量。它是人们从客观事物中摄取所需信息，借以认识客观事物，并掌握其客观规律的一种科学方法。在测试过程中，需要选用专门的仪器设备，设计合理的实验方法和进行必要的数据处理，从而获得被测对象的有关信息的量值。所以，测试技术属于信息科学的范畴。对机械这一类物理系统，信息是其客观存在或运动状态的特征。信息本身不是物质，也不具有能量，然而它的传输却依赖于物质和能量。一般来说，信息的载体称为信号，而信息则蕴涵于信号之中。信息总是通过某些物理量的形式表现出来，这些物理量也就是信号。例如，单自由度的质量-弹簧系统的动态特性可以通过质量块的位移-时间关系来描述，质量块位移的时间历程就是信号，它所包含的该系统的固有频率和阻尼率等特征参数，就是人们所需要的信息。分析采集到的有关信息，就可以掌握这一系统的动态特性。

根据信号的物理性质，可以将它分为非电信号和电信号。例如，随时间而变化的力、位移、速度和加速度等，属于非电信号；而随时间变化的电流，磁通量和电压等，则属于电信号。这两者可以借助于一定的装置相互交换。在测试过程中，常常将被测的非电信号通过传感器变换成电信号，以便于传输、放大、分析处理和显示记录等。

被测信号中包含着需要研究的有用信息，但也不同程度地混入无用信息，这些叠加在有

用信息之上的无用信息，通常称为噪声。各种电磁测量线路和测试装置在不同的环境中工作，不可避免地会侵入噪声而受到干扰。它对被测信号所产生的影响，最终将以误差的形式表现出来，导致测试的精确度降低，甚至难以进行正常的测试工作。因此，在噪声背景下提取有用的信息，是测试工作者的任务之一。

(三)

随着科学技术的发展，从事机械设计与制造的工程技术人员，不仅需要掌握宏观上不随时间而变化的静态几何量的测量，而且还要掌握日益增多的动态机械参量（诸如力、位移、振动、噪声及温度等）的测试。由于这些机械参量随时间而不断变化，因而沿用传统的计量器具已难以进行符合客观规律的测试，所以要大量地采用所谓非电量电测法。本课程研究的对象主要是机械工程中常见的动态参量的电测技术及有关基础理论。尽管它涉及的知识范围很广，但由于学时数所限和各课程之间的分工不同，本教材中只讨论测试技术的理论基础和常见机械参量的测试方法及具体应用。

基础理论部分包括测试信号的描述和分析，测试装置的基本特性及信号传输中的抗干扰等问题。

信号分析一般采用时域分析法和频域分析法。时域分析法是通过信号的幅值随时间而变化的波形图或数学表达式来求取任一时刻的瞬时值，或者信号的峰值，均值和均方根值等；在时域内对信号进行相关分析，可以了解信号自身或不同信号彼此之间的相似程度；研究信号在各个时刻的瞬时幅值的取值分布状态，可以知道信号幅值的取值概率和概率分布情况。频域分析是以频率为横坐标来研究信号的幅值、相位和能量等的分布，可得到相应的幅值谱、相应谱和能量谱等，故又称为频谱分析法。通过对信号的频谱分析，可以从另一个方面提供更为丰富的有用信息。

要想从被测对象中获取有关信息，必须借助于专门的设备——测试装置来实现。因此，应掌握测试装置静、动态特性的评价方法和不失真测试条件，以利于正确地、合理地选用仪器。信号在传输过程中会受到各种噪声的干扰，为保证信号的不失真传输，应采取有效的抗干扰措施。

本课程具有很强的实践性。因此，机械参量测试的具体应用部分中对机械振动、噪声、应变、力、温度和位移的测试，分章予以论述。并对检测信号所用的传感器，信号的中间变换，记录显示以及数据处理分析都进行了较为系统的介绍。在学习过程中应紧密联系实际，加强实验环节，弄清物理意义，才能获得有关动态测试技术的完整概念，才能初步具有处理实际测试工作的能力。

第一章 信号的描述

§ 1-1 信号的分类及其描述方法

机械参量的动态测试，就是要观测与分析各种机械在运行中的物理现象和参数的变化。为此，往往需要通过测量装置将其变换成易于测量、记录、分析的电信号。无论信号采用哪种数据形式或图形表示，它都包含着反映某个物理系统的状态或特性的某些有用信息，它是我们认识客观事物的内在规律、研究事物之间相互关系及预测事物未来发展的依据。研究各类信号的特征及其分析方法也就成为了测试工作中的首要任务。

一、信号的分类

按信号的变化规律可分为确定性信号和非确定性信号（即随机信号）两大类。

1. 确定性信号

可以用确定的数学关系式描述的信号，称为确定性信号。它又可分成周期信号和非周期信号。

(1) 周期信号

每经过一定时间间隔即重复出现的信号，称为周期信号。它应满足下列关系式：

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

式中 T —— 周期

按正弦或余弦规律变化的信号，工程上称简谐信号，其波形如图1-1a所示，是最简单的周期信号，它仅具有单一频率 f_0 ($f_0 = \frac{1}{T}$)。

复杂周期信号的波形如图1-1b、c所示，它们可以看成是由若干频率比为有理数的正弦信号叠加而成，图1-1d即是由1、3、5次谐波叠加的方波波形。

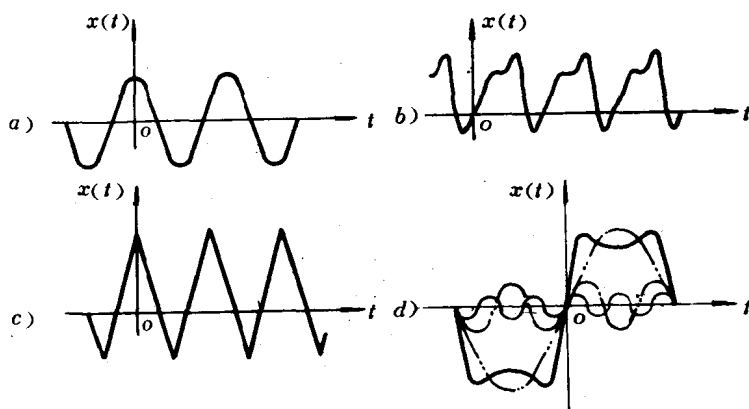


图1-1 周期信号的波形

- a) 正弦波 b)、c) 复杂周期波
d) 由1、3、5次谐波叠加的方波波形

(2) 非周期信号

凡能用确定的数学关系式描述的, 但又不具有周期重复性的信号, 统称非周期信号。各种规则的脉冲信号是最常见的和最典型的非周期信号。

尽管任何确定性信号都可以用一个时间函数(或表达式)来描述, 但是实际中的信号一般都比较复杂, 若直接对其原始时间函数进行分析有困难时, 可以将其分解成某种基本函数和的形式或按某种级数展开, 所采用的基本函数必须是易于实现和分析的简单函数。例如正(余)弦函数, 就是广泛应用的一种基本函数。

2. 随机信号

不能用确定的数学关系式表达的信号称为随机信号。例如闹市的噪声、地脉动等。这类信号的特点是每次观测的结果都不相同, 它只是一定范围内可能产生的结果之一, 且不能预知未来任一瞬时的精确值。对于随机信号, 一般采用概率和统计平均的方法来处理。

实际信号究竟是确定性的或是非确定性(随机)的, 在许多场合下是很难确切定论的。例如产生信号的物理现象必然要受到某些未知因素的影响, 导致偏离原有的规律, 表现出不确定性, 因而可以说真正纯粹的确定性信号并不存在。反之, 当人们对产生信号的物理现象的基本规律, 由完全不认识到有足够认识时, 就可以用足够精确的数学关系式来近似表达, 即视为确定性信号。实际中信号是否具有确定性, 通常是以实验能否重复产生这些信号作为判断的依据。

此外, 信号在数学上可以用一个或多个独立变量的函数表示。独立变量可以是连续的, 也可以是离散的。用连续变量的函数表示的信号称模拟信号(或称连续信号), 如图1-2a所示。离散信号中, 独立变量仅取离散值, 常以离散图形表示, 如图1-2b所示。也可用数字序列表示, 或以表格记录的数据形式来表示等等。另外, 幅值也可以是连续的或离散的。独立变量和幅值都是离散的信号称数字信号, 如计算机的输入、输出信号。还应指出, 尽管事实上独立变量不一定是时间, 但通常习惯上用时间变量的函数表示原始信号, 本书亦遵循这一习惯。

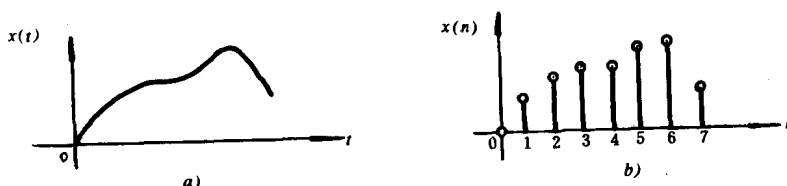


图1-2 模拟信号与离散信号

a) 模拟信号

b) 离散信号

二、信号的描述方法

信号作为一定物理现象的表示包含着丰富的信息, 为了从中提取某种有用信息, 需要对信号进行分析、处理。所谓“信号分析”就是采用各种物理的或数学的方法提取有用信息的过程。为了实现这个过程, 从数学角度讲, 需要对原始信号进行各种不同变量域的数学变换或特征参数的估算等。所以讨论信号的描述方法, 在一定程度上就是讨论与“信号分析”有关的数学模式及其图象。值得指出的是, 这一过程在今天已基本上由相应的测试手段来完

成。换句话说，一些测试仪器的功能正是围绕上述某种“信号分析”的要求而设计、制造的。

通常主要从三个变量域来描述信号，即幅值域（简称幅域）、频率域（简称频域）、时间域（含时延域，简称时域）。直接观测或记录的信号一般是随时间变化的物理量，即以时间作为独立变量，称为信号的时域描述。时域描述是信号最直接的描述方法，它只能反映信号的幅值随时间变化的特征。但由于实际信号比较复杂，直接借时域描述来揭示信号的频率结构及各频率成分的幅值大小就很困难。然而在机械工程中，大量的有用信息与频率有关，如振动、噪声等，所以动态测试中广泛运用信号的频域描述，即以频率作为独立变量，揭示出信号各频率成分的幅值、相位与频率的对应关系，或者是信号能量沿频率域的分布规律。信号的幅域描述，则是反映信号中某一范围内的幅值出现的概率。信号的各种描述方法仅是从不同的角度去认识同一事物，它们相互间可以通过一定的数学运算进行转换。图1-3形象地表示出三个域之间的关系。

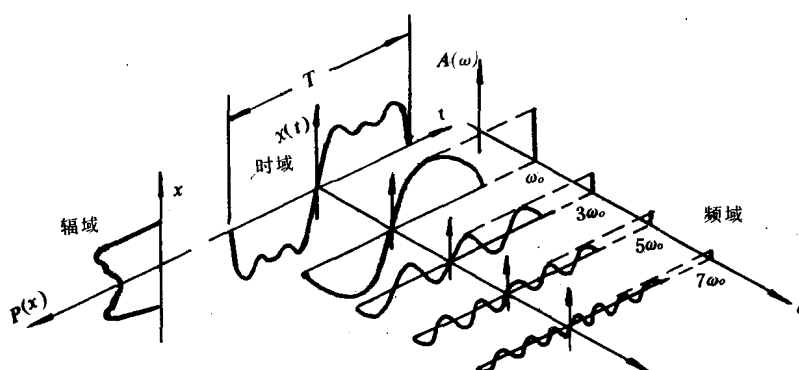


图1-3 信号的幅域、时域、频域描述

§ 1-2 周期信号的描述

一、周期信号的特征参数

以时间为独立变量的周期信号 $x(t)$ （特别是对于被测物理量转换为电信号时）的幅值特征，通常用峰值、均值、有效值等特征参数来表示，人们一旦掌握了这些特征值，就会对信号有一初步的认识。

1. 峰值 x_F

峰值 x_F 即信号的最大瞬时值，记为

$$x_F = |x(t)_{max}|$$

测试过程中如能充分估计峰值大小，就便于确定测试仪器的动态工作范围。对峰值估计不足，将造成削波失真，甚至导致仪器损坏。

由于峰值不能完全反映信号整个时间过程的状况，所以还要引出其它两个特征参数。

2. 平均值 μ_x

周期信号的平均值（简称均值） μ_x ，是指信号在一周（或若干整周期）内幅值对时间的

平均, 记为

$$\mu_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1-1)$$

均值是信号 $x(t)$ 的稳定分量 (对电信号而言即直流分量)。

周期信号 $x(t)$ 的绝对值的均值称绝对值均, 即

$$\mu_{|x|} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (1-2)$$

对交流电信号进行全波整流后的均值就是绝对均值。

3. 有效值 x_{rms}

周期信号 $x(t)$ 的有效值是信号的均方根值, 记为

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1-3)$$

有效值的平方——均方值是信号的平均功率 P_{av} , 即

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

故有效值从平均功率的角度反映信号的等效幅值。例如有一正弦信号为

$$x(t) = A \sin \omega t$$

则

$$x_F = A;$$

$$\mu_x = 0; \quad \mu_{|x|} = \frac{2A}{\pi};$$

$$x_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

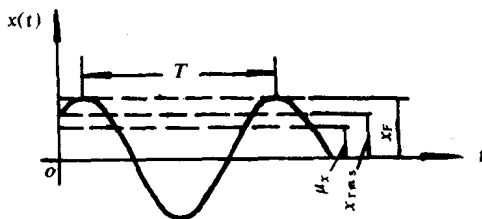


图 1-4 正弦信号的特征参数

如图 1-4 所示。

二、周期信号与付里叶级数展开

为了便于分析复杂周期信号, 往往将其分解为若干简单的基本函数的线性组合。分解信号的方法与矢量分析相类似。我们知道, 在三维空间中的任一矢量, 可以按选定的三维直角坐标系进行分解, 即用三个互相正交的单位矢量与相应的系数 (矢量各分量的模) 的乘积来描述。同理, 对于某一函数, 也可以按选定的正交函数集来进行分解, 即利用它在完备正交函数集中各分量的线性组合来表示, 各分量同样为一个基本函数与系数的乘积, 这种表示方法叫做函数的广义付里叶级数展开。三角函数集是应用最广的一种完备正交函数集, 通常, 可将一复杂周期信号展开为各三角函数分量的叠加。当然也可以用其它的完备正交函数集来分解周期信号, 但因三角函数集具有简单、易于获得以及能明确揭示信号频率结构等优点, 所以应用最广, 是信号频域描述和分析的基础。

1. 三角函数集

函数集 $1, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t, \dots$, 当所取函数有无限多个时 (即 $n \rightarrow \infty$), 则在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 组成完备正交函数集。 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

函数集中任意两个函数 (不含 $\cos^2 n\omega_0 t$ 和 $\sin^2 n\omega_0 t$) 的乘积在一周内的积分为零。即它们之间不包含对方的分量, 两者是相互独立的, 称为三角函数集的正交性。若再也找不出任何

一个独立于函数集的新函数，则称此函数集具有完备性。因而三角函数集可以完整的表达任何周期信号，只要此函数满足狄里赫利条件（以下简称狄氏条件）。通常我们所遇到的周期信号都能满足狄氏条件，因此，以后如无特殊需要，一般不再考虑这一条件。

下面具体介绍周期信号的付里叶级数展开。

2. 付里叶级数的三角函数展开式

在有限区间上，周期函数 $x(t)$ 的付里叶级数的三角函数展开式如下：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-4)$$

其中 $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ (1-5)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1-6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1-7)$$

式中 a_0 —— 周期信号 $x(t)$ 在一周内的均值，称为稳定分量（或直流分量）；
 a_n 、 b_n —— 分别称为余弦分量和正弦分量的幅值（或称付里叶系数）。

设 $a_n = A_n \cos \theta_n$ ； $b_n = A_n \sin \theta_n$ ，如图 1-5 所示，则

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad ; \quad \theta_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

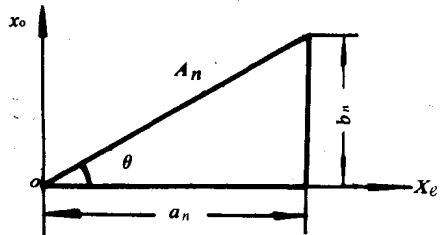


图1-5 a_n 、 b_n 与 A_n 、 θ_n 的关系

则式(1-4)可改写为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (1-8)$$

或 $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$

式中 $\varphi_n = 90^\circ - \theta_n$

周期函数的付里叶级数展开实质上就是求各项付里叶系数。

例 1 求图 1-6 中周期三角波的付里叶级数三角函数展开式。

解 $x(t)$ 在一周内的表达式为

$$x(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T} \cdot t & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ A - \frac{2A}{T} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

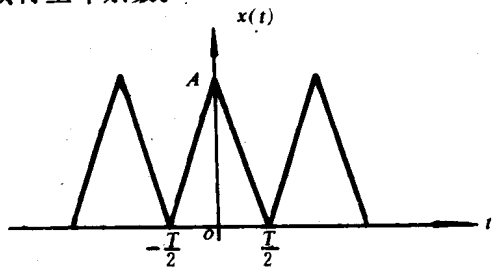


图1-6 周期三角波

稳定分量的幅值:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) dt = \frac{A}{2}$$

余弦分量的幅值

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n=1, 3, \dots \\ 0 & n=2, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

正弦分量的幅值:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

因为 $x(t)$ 是偶函数, 所以 $x(t)\sin n\omega_0 t$ 为奇函数, 奇函数在一周内积分为零, 故 $b_n=0$ 。这样, 周期三角波的付里叶级数三角函数展开为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos\omega_0 t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega_0 t + \dots \right) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t \end{aligned}$$

或

$$= \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(n\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

由上例及式(1-8)表明, 周期信号是由若干个不同频率的谐波叠加而成。其中各频率分量的幅值 A_n 和相位 θ_n 与频率的关系称为信号的频谱, 相应的 $A_n-\omega$ 图叫幅频图; $\theta_n-\omega$ 图叫相频图。我们把 ω_0 称为基频, 把 n 次倍频成分 $A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$ 称为 n 次谐波。由于各次谐波的频率($n\omega_0$)均是基频的整数倍, 所以周期信号的频谱是离散谱, 幅(相)频图是离散的谱线, 图1-7为上述周期三角波的幅频图。

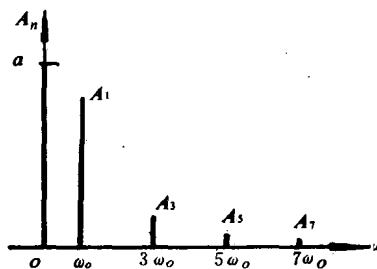


图1-7 周期三角波的幅频图

3. 付里叶级数的复数展开式

三角函数展开式虽可对复杂周期信号作频域描述, 然而付里叶级数的复数展开式更有其运算、分析简便等特点, 故为常用的表达形式。复数展开式是由三角函数展开式引入欧拉公式转换而得。已知欧拉公式为:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t \quad (1-9)$$