工商管理硕士系列教材

管理数学方法

主编 龚德恩

编写者 胡显佑 卢刚 严颖 龚德恩

工商管理硕士系列教材

管理数学方法

主编 龚德恩

编写者 胡显佑 卢刚 严颖 龚德恩

中国人民大学出版社

工商管理硕士系列教材

管 理 数 学 方 法

主编　龚德恩

●

中国人民大学出版社出版发行
（北京海淀路39号　邮码100872）
中国人民大学出版社印刷厂印刷
（北京鼓楼西大石桥胡同61号）
新 华 书 店 经 销

●

开本：850×1168毫米32开　印张：11.75
1991年5月第1版　1991年5月第1次印刷
字数：291 000　册数：1-4 000

●

ISBN 7-300-00957-3

F·276　定价：5.20元

前　言

进行社会主义现代化建设，不仅离不开先进的科学技术，而且也离不开先进的科学管理。当代管理科学发展的一个重要特征是，管理理论与管理实践越来越朝着定量化的方向发展。诸如管理中的计划、组织、领导、决策、控制、创新，以及风险决策等问题的解决，无一不要用到数学方法（与计算机技术相结合），使数学方法成为学习当代先进管理方法所必不可少的基础知识之一。马克思曾经说过："一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。"① 因此，从事管理工作的同志，学习一些数学方法是非常必要的。

本书是为工商管理硕士研究生（MBA)编写的教材。MBA研究生大多来自实际工作部门，从事过多年的企业领导或实际管理方面的工作，有比较丰富的实际管理工作经验。但是，一般说来，他们对在实践中已被证明为行之有效的许多当代管理科学的新方法却不一定了解，或者了解的不多，更不用说熟悉了。为此，在他们攻读MBA期间，将要系统地学习各种新的管理知识和方法，而这些新的管理知识和方法大多与数学方法的运用有着密切的关系。本书正是为适应这种需要而编写的。

---

① 苏共中央马克思列宁主义研究院编，胡尧之等译：《回忆马克思恩格斯》，人民出版社1957年版，第73页。

当代管理科学中用到的数学方法非常之多，由于教学时数和本书篇幅的限制，要将所有的数学方法都一一加以介绍是不可能的。为此，我们在参考大量的国内外文献之后，从众多的管理数学方法中选取了一些最基本、最有代表性的数学方法加以介绍。

本书以介绍基本的管理数学方法为主，实际应用为辅。更多的实际应用的案例，在其他的MBA课程中，如管理系统工程，将会作更深入的介绍。本书的叙述尽可能做到由浅入深，通俗易懂，重点放在数学方法的介绍和运用。为了避免冗长的数学推导和证明，书中大多数定理未加证明，对定理证明感兴趣的读者，请参考每章后面所列的参考文献。为了帮助读者巩固所学的知识，每章后面均附有一定数量的习题，希望读者能努力完成这些习题。

由于MBA研究生入学时已考过相当于全国硕士生统一考试的“数学五”的数学知识，因此在编写此书时，假定读者已熟悉微积分、线性代数和概率论的基本知识。

本书的编写组织工作由龚德恩负责。参加编写的同志有：胡显佑（第一、二、三、四章），卢刚（第五章），严颖（第六、七、八、九章），龚德恩（第十章）。全书的最后定稿工作由龚德恩完成。

由于时间仓促，再加上缺乏编写MBA教材的经验，对书中不当之处，恳切希望读者批评指正。

编著者

1990年2月于中国人民大学

目　　录

前言……………………………………………………………I
第一章　线性规划……………………………………………………1
　§1.1　线性规划问题的一般形式……………………………1
　§1.2　线性规划问题解的概念和性质………………………6
　§1.3　单纯形表………………………………………………11
　§1.4　单纯形方法……………………………………………19
　§1.5　线性规划问题的对偶性………………………………31
　§1.6　灵敏度分析……………………………………………44
　§1.7　整数线性规划…………………………………………55
　习题一……………………………………………………………64
　参考文献…………………………………………………………66
第二章　非线性规划………………………………………………67
　§2.1　基本概念………………………………………………67
　§2.2　最优性条件……………………………………………75
　§2.3　最优性条件的经济意义………………………………85
　§2.4　一维最优化方法………………………………………90
　§2.5　无约束最优化方法……………………………………98
　§2.6　约束最优化方法………………………………………107
　习题二……………………………………………………………115
　参考文献…………………………………………………………116

第三章　动态规划 ……117
§3.1　最短路问题与最优化原理 ……117
§3.2　背包问题 ……123
§3.3　资源分配问题 ……130
§3.4　生产—库存问题 ……137
习题三 ……143
参考文献 ……144
第四章　多目标规划 ……146
§4.1　基本概念 ……146
§4.2　多目标规划的基本方法 ……154
§4.3　目标规划 ……160
习题四 ……169
参考文献 ……170
第五章　DEA 方法 ……172
§5.1　评价规模有效性和技术有效性的C^2R模型 ……172
§5.2　DEA 有效性的经济含义 ……179
§5.3　评价技术有效性的C^2GS^2模型 ……186
§5.4　应用实例 ……191
习题五 ……195
参考文献 ……197
第六章　马尔科夫链 ……199
§6.1　预备知识 ……199
§6.2　马氏性与转移概率 ……207
§6.3　访问某个固定状态 ……214
§6.4　状态分类 ……216
§6.5　马氏链的极限性质 ……219
习题六 ……225
参考文献 ……226

第七章　马氏决策过程 ……227
§7.1　引言 ……227
§7.2　有限阶段总报酬模型 ……230
§7.3　无限阶段折扣报酬模型 ……234
习题七 ……249
参考文献 ……250
第八章　排队论 ……251
§8.1　引言 ……251
§8.2　预备知识 ……255
§8.3　基于生灭过程的排队模型 ……261
§8.4　M/G/1/∞排队系统 ……275
附录A　指数分布的无记忆性 ……283
附录B　M/M/S/∞系统中系统处于忙期的概率 ……284
附录C　母函数 ……284
附录D　普阿松分布表 ……285
习题八 ……292
参考文献 ……294
第九章　库存理论 ……295
§9.1　引言 ……295
§9.2　确定性库存模型 ……299
§9.3　随机库存模型 ……311
习题九 ……320
参考文献 ……321
第十章　最优控制 ……322
§10.1　最优控制的基本概念 ……322
§10.2　最大值原理 ……326
§10.3　最大值原理在管理问题中的应用 ……331
§10.4　生产库存系统的最优控制 ……339

§10.5　自然资源的最优管理……………………………347
习题十 ……………………………………………………364
参考文献 …………………………………………………366

第一章　线性规划

线性规划是研究在一组线性不等式或线性等式的限制条件下，使某个线性目标函数取得最大值（或最小值）的问题的。早在30年代末期，苏联数学家Л.В.康托洛维奇就研究了生产组织中的一些线性规划问题。在40年代末，美国数学家G.B.丹捷格又提出了求解线性规划的单纯形方法。特别是50年代以来计算机科学的迅速进步，使线性规划的理论和方法成功地运用于工业、农业、军事和经济管理等各个领域。目前，线性规划已成为运筹学中理论和算法比较成熟、应用最广的分支之一。

§1.1　线性规划问题的一般形式

一、线性规划问题的数学模型

为了便于说明线性规划问题的特点，首先研究两个实例。

例1.某工厂利用甲、乙、丙三种原料生产A_1，A_2，A_3，A_4四种产品。如果工厂每月可得到的原料供应量，生产一吨不同产品所消耗的各种原料的数量，以及生产一吨不同产品可获得的利润如表1—1。问工厂应如何安排月生产计划，使总利润最大？

解：设工厂每月生产产品A_1，A_2，A_3，A_4的数量分别为x_1，x_2，x_3，x_4（单位：吨）。根据问题的条件和要求，需求出x_1，x_2，x_3，x_4的值，使得

表1—1

消耗＼产品 原料	A_1	A_2	A_3	A_4	每月原料供应量(吨)
甲	1	1	2	3	500
乙	0	1	1	3	300
丙	1	2	1	0	200
利润(元/吨)	200	250	300	150	

$$\max f = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 150x_4 \quad [\text{总利润最大}]$$

$$\text{满足}\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqq 500 \\ \qquad x_2 + x_3 + 3x_4 \leqq 300 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \leqq 200 \end{cases} \quad \begin{array}{l}\text{生产各种产品的} \\ \text{原料消耗不超过} \\ \text{供应量}\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0 \quad [\text{各种产品的数量非负}]$$

这是一个有关生产计划的线性规划问题，它的求解方法将在§1.4中讨论。

例2. 设某种物资要由m个产地A_1，A_2，…，A_m运往n个销地B_1，B_2，…，B_n。若产地A_i的产量为a_i吨($i=1$，2，…，m)，销地B_j的需求量为b_j吨($j=1$，2，…，n)，并且$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。各产地到各销地的物资单位运价如表1—2所示。那么应如何组织调运，使得总运费最小？

解：设x_{ij}表示由产地A_i运往销地B_j的物资数量($i=1, 2$，…，m；$j=1$，2，…，n)。我们需求出x_{ij}($i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n)的值，使得

表1—2

运价 产地 \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量（吨）
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量(吨)	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

$$\min f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad \text{[总运费最小]}$$

满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

[由产地A_i运往各销地的物资总量等于A_i的产量]

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

[由各产地运往销地B_j的物资总量等于B_j的需求量]

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j = 1,\ 2,\cdots,n)$$

这一问题是线性规划最早研究的问题之一，一般称之为运输问题。当总产量大于（或小于）总销量时，读者不难写出类似的数学模型。

虽然这两个例子的经济背景不同，但它们的数学模型有共同的特点：要在一组线性不等式或线性等式的限制条件下，使一个线性函数取得最大值或最小值。这类问题都称为线性规划问题。

一般地，具有n个变量的线性规划问题可以写成下述形式：

$$\max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \left(\text{或}\quad \min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \qquad (1.1.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j * b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) & (1.1.2) \\ x_j \geqq 0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) & (1.1.3) \end{cases}$$

其中，“$*$”表示可以取“$\geqq$”或“$\leqq$”或“$=$”。$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 称为目标函数。“max”表示求最大值，“min”表示求最小值。变量x_j($j=1$，2，…，n)必须满足的条件(1.1.2)和(1.1.3)称为问题的约束条件。

满足约束条件(1.1.2)和(1.1.3)的一组x_1，x_2，…，x_n的值称为此线性规划问题的可行解。所有可行解构成的集合称为线性规划问题的可行解集。使目标函数达到最优值的可行解称为线性规划问题的最优解。

二、两个变量的线性规划问题的图解法

为了进一步研究线性规划问题解的性质，我们首先讨论两个变量的线性规划问题的图解法。

例3．用图解法求解线性规划问题

$$\max f = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geqq -9 \\ x_1 + x_2 \leqq 6 \\ x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0 \end{cases}$$

解：首先在坐标平面上求出约束条件所限定的可行解集合。约束条件中的每个线性不等式都表示一个半平面，因此，可行解集是四个半平面的公共部分（图 1—1 中的阴影部分 $OABC$）。这是一个“凸区域”。然后考察目标函数，把 f 看作参数，则 $f=x_1+2x_2$ 表示坐标平面上的一族平行线，位于每条直线上的任意一点的坐标所对应的目标函数值都相等。这样的每条直线都称为等值线或等高线。令 f 分别取不同的值，作出一组等值线，则

由图 1—1 可以看出：经过 B 点的等值线可以使目标函数取得最大值，解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -9 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

得最优解 $x_1 = \frac{9}{5}$，$x_2 = \frac{21}{5}$，对应的目标函数值

$$f_{max} = \frac{9}{5} + 2 \times \frac{21}{5} = \frac{51}{5}$$

例4.用图解法解线性规划问题

$$\max f = 2x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geqq -9 \\ x_1 + x_2 \leqq 6 \\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0 \end{cases}$$

解：显然，可行解集与例 1 完全相同。而目标函数 $f = 2x_1 + 2x_2$ 所确定的等值线平行于直线 $x_1 + x_2 = 6$。由图 1—1 可以看出，线段 AB 上任意一点都是此线性规划问题的最优解。例如，可以取 $x_1 = 6$，$x_2 = 0$ 或 $x_1 = \frac{9}{5}$，$x_2 = \frac{21}{5}$ 等等，对应的目标函数最优值为 $f_{max} = 12$。这时线性规划问题有无穷多个解。

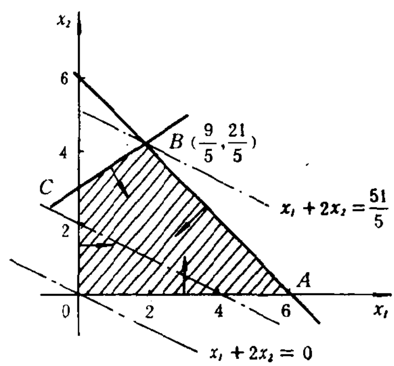

图1—1

对于两个变量的线性规划问题，我们也会遇到有可行解，但最优值无界，因而没有最优解的情形；也可能出现无可行解的情形（约束条件相互矛盾）。

§1.2 线性规划问题解的概念和性质

一、线性规划问题的标准形式

为了便于研究线性规划问题的理论和一般解法，我们需要把任意一个线性规划问题化为标准形式。所谓标准形式，是指线性规划问题中：

（1）所有变量非负；

（2）所有约束条件（非负变量约束除外）都是等式；

（3）求目标函数的最大值。

如果约束条件中含有不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i \qquad (\text{或} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqq b_i)$$

则此约束条件可以等价地化为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (\text{或} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i)$$

新添加的变量x_{n+i}称为松弛变量。

如果某个变量x_j无非负限制，则引入非负变量$x_j' \geqq 0$，$x_j'' \geqq 0$，并令$x_j = x_j' - x_j''$代入目标函数和约束条件中，就可以使所有变量都具有非负约束。

如果目标函数是求

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

则令$f' = -f = \sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$，可化为求

$$\max f' = \sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$$

由此可见，任意一个线性规划问题都可以用上述方法化为标准形式。一般地，具有 n 个变量的线性规划问题的标准形式记为：

$$\max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(LP)\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ x_j \geqq 0 & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases}$$

如果记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$c = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)^T \qquad x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$$

则线性规划问题(LP)可以写成矩阵形式：

$$\max f = c^T x$$

$$(LP)\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

二、线性规划问题解的概念

在线性规划问题(LP)中，满足约束条件 $Ax=b, x\geqq 0$ 的$x\in E_n$，称为问题(LP)的可行解。可行解的集合记为

$$S = \{x \mid Ax = b,\ x \geqq 0\}$$

使目标函数达到最大值的可行解，称为线性规划问题(LP)的最优解。

为了深入研究问题(LP)的解的性质，不妨设矩阵 A 的秩为 m，并且$m<n$。记

$$A=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

其中 $p_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$是$A$的第$j$列。

定义1.2.1　在线性规划问题(LP)中，设矩阵A的秩为m，A的任一$m\times m$非奇异子矩阵B称为问题(LP)的一个基。

若$B=(p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_m})$是问题($LP$)的一个基，则称对应的变量$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$为对应于基$B$的基变量，其余的变量称为非基变量。

为了便于讨论，不失一般性，设$B=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$是问题($LP$)的一个基。记

$$N=(p_{m+1}, \cdots, p_n)$$

$$x_B=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$$

$$x_N=(x_{m+1}, \cdots, x_n)^T$$

则约束方程 $Ax=b$可以写成

$$(B, N)\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}=b$$

由此可得

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \tag{1.2.1}$$

在(1.2.1)中，取$x_N=0$，则$x_B=B^{-1}b$。

定义1.2.2　设B是线性规划问题的一个基，则$x_B=B^{-1}b$，$x_N=0$称为对应于基B的基本解。如果$B^{-1}b\geqq 0$，则称基本解$x_B=B^{-1}b$，$x_N=0$为问题(LP)的一个基本可行解。B称为可行基。

问题(LP)的目标函数也可以用非基变量表示。记

$$c_B=(c_1, c_2, \cdots, c_m)^T;\ c_N=(c_{m+1}, \cdots, c_n)^T$$

则

$$f=c^Tx=(c_B^T, c_N^T)\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}$$